

АНТОН САВЧЕНКО, МАКСИМ СИДОРОВ

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОГИНУ КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Проведено дослідження математичної моделі нелінійної статички в мікроелектромеханічних системах (MEMS), а саме розв'язано нелінійну крайову задачу, що описує стаціонарний прогин пружної консольної балки під дією електростатичних сил. Особливу увагу приділено сучасним архітектурам MEMS, де на нерухомий електрод нанесено тонкий діелектричний шар, що модифікує електростатичну силу та утворює нелінійний доданок зі специфічною сингулярністю у диференціальному рівнянні четвертого порядку. Метою роботи є розробка та обґрунтування високоточного методу розв'язання вказаної крайової задачі з гарантованим контролем похибки. Запропоновано використати для дослідження задачі метод двобічних наближень, який базується на апараті теорії нелінійних операторів у напівпорядкованих банахових просторах та застосуванні функції Гріна. Вихідну крайову задачу з умовами вільного лівого та жорстко закріпленого правого кінців балки зведено до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна у просторі неперервних функцій. Доведено додатність та ізотонність відповідного нелінійного інтегрального оператора. У просторі неперервних функцій виділено конус невід'ємних функцій та побудовано інваріантний конусний відрізок, який є апріорною оцінкою невідомого точного розв'язку. Сформульовано та доведено теорему про існування та єдиність додатного розв'язку досліджуваної крайової задачі на побудованому конусному відрізку. Конструктивно розроблено ітераційний алгоритм, який на кожному кроці генерує гарантовану двобічну оцінку – проміжні верхнє та нижнє наближення, що монотонно збігаються до точного розв'язку. Встановлено умови двобічної збіжності алгоритму. Завдяки доведеній монотонності інтегрального оператора розроблений метод забезпечує строгий контроль абсолютної похибки на кожному етапі обчислень, ефективно усуваючи ключові недоліки традиційних сіткових, спектральних і проєкційних методів. Проведено обчислювальний експеримент для заданих фізичних параметрів балки та діелектричного шару, що довів високу швидкість збіжності запропонованого методу. Виконано порівняльний аналіз із результатами, що отримані за допомогою модифікованого методу декомпозиції Адомяна (MADM). Встановлено наявність відхилень у наближених розв'язках MADM, які зумовлені специфікою усічення нескінченного ряду та неможливістю точно оцінити залишок. Результати методу двобічних наближень можуть слугувати надійною базою для безпосередньої верифікації розв'язків, отриманих іншими методами. Отримані результати мають вагомое практичне значення для надійного проєктування складних пристроїв MEMS (радіочастотних перемикачів, сенсорів, мікродзеркал тощо) та дозволяють мінімізувати похибки на ранніх стадіях розробки.

Ключові слова: напівлінійне диференціальне рівняння четвертого порядку, діелектричний шар, консольна балка, математичне моделювання, метод двобічних наближень, мікроелектромеханічна система, прогин, функція Гріна, чисельні методи.

ANTON SAVCHENKO, MAXIM SIDOROV

MODELING THE DEFLECTION OF A MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM CANTILEVER BEAM WITH A DIELECTRIC LAYER USING THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS

A study of the mathematical model of nonlinear statics in microelectromechanical systems (MEMS) is conducted; namely, a nonlinear boundary value problem describing the stationary deflection of an elastic cantilever beam under the action of electrostatic forces is solved. Special attention is paid to modern MEMS architectures, where a thin dielectric layer is deposited on a fixed electrode, which modifies the electrostatic force and forms a nonlinear term with a specific singularity in a fourth-order differential equation. The goal of this paper is to develop and justify a high-precision method for solving the specified boundary value problem with guaranteed error control. It is proposed to use the method of two-sided approximations for investigating the problem, which is based on the methods of the theory of nonlinear operators in semiordered Banach spaces and the application of Green's functions. The initial boundary value problem with the conditions of a free left end and a rigidly fixed right end of the beam is transferred to the equivalent integral equation of Hammerstein in the space of continuous functions. The positiveness and isotonicity of the corresponding nonlinear integral operator are proved. In the space of continuous functions, a cone of nonnegative functions is distinguished, and an invariant cone segment is constructed, which serves as an a priori estimate of the unknown exact solution. A theorem on the existence and uniqueness of a positive solution to the considered boundary value problem on the constructed cone segment is formulated and proved. An iterative algorithm is constructively developed; at each step, it generates a guaranteed two-sided estimate – intermediate upper and lower approximations that monotonically converge to the exact solution. The conditions for the two-sided convergence of the algorithm are established. Due to the proven monotonicity of the integral operator, the developed method provides strict control of the absolute error at each step of the calculations, effectively eliminating the key drawbacks of traditional grid, spectral, and projection methods. A computational experiment was performed for the given physical parameters of the beam and the dielectric layer, proving the high convergence rate of the proposed method. A comparative analysis was performed with the results obtained using the Modified Adomian Decomposition Method (MADM). The presence of deviations in the approximate MADM solutions is established, which is caused by the specifics of truncating an infinite series and the inability to accurately estimate the remainder. The results of the two-sided approximations method can serve as a reliable basis for the direct verification of solutions obtained by other methods. The obtained results are of significant practical importance for the reliable design of complex MEMS devices (RF switches, sensors, micromirrors, etc.) and allow minimizing errors at the early stages of development.

Keywords: semilinear fourth-order differential equation, dielectric layer, cantilever beam, mathematical modeling, two-sided approximation method, microelectromechanical system, deflection, Green's function, numerical methods.

Вступ. Еволюція мікроелектромеханічних систем (MEMS) протягом останніх десятиліть стала одним із визначальних чинників технологічного прогресу. Ринок MEMS швидко зростає завдяки їх інтеграції з біомедичними технологіями (наприклад, системи безперервного моніторингу, мікропомпи для адресної доставки ліків [1–3]), телекомунікаційними мережами (зокрема, радіочастотні перемикачі [4]) та автомобільною промисловістю (наприклад, інерційні модулі [5]). У контексті концепції Інтернету речей

MEMS-сенсори газів та хімічних речовин на основі консольних балок застосовуються для екологічного моніторингу та промислової безпеки [6, 7]. Конструктивно багато з цих пристроїв (зокрема й у телекомунікаціях) додатково використовують діелектричний шар. Похибка у математичному розрахунку прогину таких пружних елементів (наприклад, у мікродзеркалах [8]) може призвести до значних збоїв у роботі систем. Саме тому проєктування

складних мікроелектромеханічних пристроїв вимагає глибокого розуміння їхньої фізичної поведінки та розробки високоточних математичних моделей. Зокрема, математичне моделювання деформації пружних елементів під дією електростатичних сил є критичним етапом, який дозволяє уникнути помилок на стадії мікрофабрикації та забезпечити надійність мікропристроїв. Фундаментальною математичною проблемою у цій області є розв'язання нелінійних крайових задач, що описують статичний прогин пружних балок. Електростатичні сили, що виникають між рухомих пружним електродом та нерухомою основою, мають нелінійну природу, оскільки їхня величина обернено пропорційна квадрату відстані між поверхнями. Така нелінійність створює значні труднощі для отримання точних аналітичних розв'язків, що робить розробку надійних чисельних методів надзвичайно актуальним завданням сучасної прикладної математики. У класичних моделях стаціонарний прогин балки під дією електростатичних сил описується крайовою задачею для напівлінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку. У найпростішому випадку, коли простір між рухомих та нерухомих електродами заповнений лише повітрям або вакуумом, нелінійна права частина рівняння містить сингулярність типу

$$\frac{1}{(1-u)^2},$$

де u – безрозмірна величина прогину.

Для різних типів закріплення кінців балки (жорстке закріплення, шарнірне обпирання, один кінець закріплено жорстко, а інший – вільний) отримуємо різні крайові умови. Дослідженню таких моделей приділено значну увагу у [9 – 13]. У цій роботі основна увага зосереджена на дослідженні балок, один кінець яких жорстко закріплено, а інший – вільний, що є базовим елементом багатьох сучасних МЕМС. На практиці прямий контакт електродів призводить до короткого замикання та виходу пристрою з ладу. Для запобігання цьому, а також для модифікації ємнісних характеристик системи, у сучасних архітектурах МЕМС на нерухомих електрод часто наносять тонкий діелектричний шар [14 – 18]. Врахування цього шару змінює математичну модель задачі: електростатична сила модифікується, і знаменник у нелінійному доданку набуває вигляду

$$\frac{1}{(\mu+1-u)^2},$$

де μ – параметр, що характеризує ефективну товщину та діелектричну проникність ізолятора.

Традиційні підходи до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку, такі як метод скінченних різниць, метод скінченних елементів або різноманітні спектральні та проєкційні методи (наприклад, метод Гальоркіна чи модифікований метод декомпозиції Адомяна), хоча й є стандартними, мають ряд суттєвих математичних обмежень. Головним їхнім

недоліком є те, що вони не завжди дозволяють аналітично строго довести умови існування та єдиності розв'язку для сильно нелінійних крайових задач. Крім того, вони позбавлені зручних інструментів для побудови надійних, гарантованих апостеріорних оцінок похибки. Ефективною та математично строгою альтернативою є застосування методу двобічних наближень, що ґрунтується на апараті теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Фундамент цієї теорії було закладено ще у працях класиків функціонального аналізу (Л.В. Канторовича, М.О. Красносельського, В.І. Опойцева та ін.) [19, 20]. Запропонований метод дозволяє не лише довести існування та єдиність додатного розв'язку крайової задачі, але й конструктивно побудувати ітераційний процес, який обмежує точний розв'язок зверху та знизу на кожному кроці алгоритму і дає змогу отримати зручну апостеріорну оцінку похибки. Метод двобічних наближень у математичному моделюванні МЕМС було застосовано, наприклад, у роботах [21 – 23], але досліджувалася задача для напівлінійного рівняння другого порядку.

Отже, метою даної роботи є розробка та обґрунтування високоточного методу розв'язання нелінійної крайової задачі, що описує стаціонарний прогин пружної консольної балки під дією електростатичних сил, з гарантованим контролем похибки.

Постановка задачі. Розглянемо балку довжиною L , шириною b , товщиною h , яка підвішена над нерухомих електродом на початковій відстані g_0 (рис. 1).

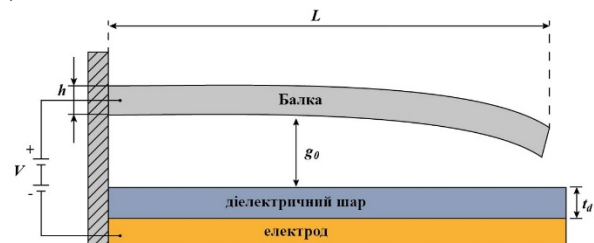


Рис. 1 – Схема балки в МЕМС

Прогин балки описується класичною теорією Ейлера-Бернуллі:

$$EI \frac{d^4 w}{dX^4} = q_{el}(X), \quad (1)$$

де $w(X)$ – функція, що описує прогин балки;

X – просторова координата вздовж балки $X \in [0, L]$;

EI – жорсткість балки на згин (E – модуль Юнга, I – момент інерції);

$q_{el}(X)$ – розподілена електростатична сила на одиницю довжини.

Оскільки розглядувана схема утворює плоский конденсатор, то енергія конденсатора визначає силу, що діє на балку. Згідно з дослідженнями МЕМС-

перемикачів, за наявності діелектричного шару товщиною t_d та відносною проникністю ε_r , ефективний зазор між пластинами стає рівним $(g_0 - w(X)) + \frac{t_d}{\varepsilon_r}$. Розподілена електростатична сила q_{el} дорівнює похідній енергії за переміщенням і записується як [13, 24]:

$$q_{el}(X) = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2 \left(g_0 - w(X) + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2},$$

де V – прикладена напруга;

ε_0 – електрична стала.

Тоді рівняння (1) можемо записати у вигляді

$$EI \frac{d^4 w}{dX^4} = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2 \left(g_0 - w(X) + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2}.$$

Перейдемо до безрозмірних величин. Позначимо

$$x = \frac{X}{L}, \quad u(x) = \frac{w(X)}{g_0}.$$

Після перетворень отримуємо напівлінійне рівняння

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{\lambda}{(\mu + 1 - u(x))^2}, \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

де $\lambda = \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2EI g_0^3}$ – коефіцієнт, що пропорційний прикладеній напрузі;

$\mu = \frac{t_d}{\varepsilon_r g_0}$ – параметр діелектричного шару.

Для того, щоб отримати повну математичну модель, напівлінійне диференціальне рівняння четвертого порядку (2) необхідно доповнити чотирма крайовими умовами (по дві на кожному кінці). Ми розглядаємо балку на відрізку $[0, 1]$, де лівий кінець ($x = 0$) жорстко закріплений, а правий кінець ($x = 1$) – вільний. У точці жорсткого закріплення балка не може ні зміщуватися (прогин у цій точці дорівнює нулю), ні змінювати свій кут нахилу (тангенс кута нахилу дорівнює нулю). На вільному кінці балка може вільно згинатися, тому там відсутній згинальний момент (друга похідна, що пропорційна згинальному моменту, дорівнює нулю) та поперечна сила (третя похідна, що пропорційна поперечній силі, дорівнює нулю). Тоді отримуємо крайові умови вигляду [25]:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \quad (3)$$

Метод розв'язання. До розв'язання задачі (2), (3) застосуємо метод двобічних наближень на основі

використання функції Гріна. Функція Гріна крайової задачі (2), (3) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}sx^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{2}xs^2 - \frac{1}{6}s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Функція Гріна задачі (2), (3) є невід'ємною, що перевіряється безпосередньо. Таким чином, задача (2), (3) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - u(s))^2} ds. \quad (5)$$

Рівняння (5) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0; 1]$ функцій, неперервних на відрізку $[0; 1]$. Норма у $C[0; 1]$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{x \in [0; 1]} |u(x)|$. У просторі $C[0; 1]$ виділимо конус невід'ємних функцій

$$K_+ = \{u \in C[0; 1] : u(x) \geq 0, x \in [0; 1]\}.$$

Узагальненим розв'язком крайової задачі (2), (3) називатимемо функцію $u^* \in K_+$, що є розв'язком інтегрального рівняння (5). З рівнянням (5) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[0; 1]$ за правилом

$$T(u)(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - u(s))^2} ds. \quad (6)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (5) матиме вигляд $u = T(u)$. Очевидно, що оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус K_+ .

Функція $f(x, u) = \frac{\lambda}{(\mu + 1 - u)^2}$ є неперервною і додатною для $x \in [0; 1]$, $0 < u < 1 + \mu$, монотонно зростає за u , а отже, інтегральний оператор (6) буде ізотонним. Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, який є апіорною оцінкою невідомого розв'язку u^* . Оскільки $f(x, 0) = \frac{\lambda}{(\mu + 1)^2} > 0$, то шукатимемо цей відрізок у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де $0 < \beta < 1 + \mu$. Тоді умови, що виділяють інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\frac{\lambda}{(\mu + 1)^2} \int_0^1 G(x, s) ds \geq 0 \quad \text{для всіх } x \in [0; 1],$$

$$\frac{\lambda}{(\mu + 1 - \beta)^2} \int_0^1 G(x, s) ds \leq \beta \quad \text{для всіх } x \in [0; 1].$$

Оскільки функція Гріна $G(x, s)$ вигляду (4) є невід'ємною, то перша нерівність завжди виконуватиметься, а другу можемо записати у вигляді

$$\frac{\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^2} \leq \beta, \quad (8)$$

$$\text{де } M = \max_{x \in [0; 1]} \int_0^1 G(x, s) ds.$$

Для функції Гріна вигляду (4) знаходимо, що

$$M = \max_{x \in [0; 1]} \int_0^1 G(x, s) ds = \frac{1}{8}.$$

З нерівності (8) випливає, що

$$\lambda \leq \frac{4(1 + \mu)^3}{27M} = \frac{32(1 + \mu)^3}{27}.$$

Для швидшої збіжності ітерацій треба брати якомога менше значення β , тобто за β слід обрати найменший корінь рівняння

$$\lambda M = \beta(\mu + 1 - \beta)^2. \quad (9)$$

Ітераційний процес сформулюємо за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - v^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - w^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = w_0(x) = \beta. \quad (12)$$

Перевіримо, за яких умов ітераційний процес (10) – (12) двобічно збігається до єдиного на $\langle 0, \beta \rangle$ додатного розв'язку задачі (2), (3). При $0 < v, w < \beta$ має місце нерівність

$$|f(x, w) - f(x, v)| = \left| \frac{\lambda}{(\mu + 1 - v)^2} - \frac{\lambda}{(\mu + 1 - w)^2} \right| \leq L |w - v|,$$

$$\text{де } L = \frac{2\lambda}{(\mu + 1 - \beta)^3}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - T(v^{(k)})\| = \\ &= \max_{x \in [0; 1]} [T(w^{(k)})(x) - T(v^{(k)})(x)] = \end{aligned}$$

$$= \max_{x \in [0; 1]} \int_0^1 G(x, s) [f(s, w^{(k)}(s)) - f(s, v^{(k)}(s))] ds \leq$$

$$\leq LM \max_{x \in [0; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді збіжність матиме місце, якщо $\gamma = LM < 1$. Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. Якщо рівняння (9) має розв'язок $\beta \in (0; 1 + \mu)$ і $\frac{2\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^3} < 1$, то крайова задача (2), (3)

має єдиний на $\langle 0, \beta \rangle$ додатний розв'язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (10) – (12).

Обчислювальний експеримент.

Обчислювальний експеримент проведено для задачі (2), (3) з наступним набором параметрів [26]

$$L = 200 \text{ мкм}, \quad b = 50 \text{ мкм}, \quad h = 2 \text{ мкм}, \quad E = 150 \text{ ГПа},$$

$$g_0 = 2 \text{ мкм}, \quad t_d = 0,1 \text{ мкм}, \quad \varepsilon_r = 7,5, \quad V = 10 \text{ В},$$

$$\varepsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}. \quad (13)$$

Знаходимо, що

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2 E I g_0^3} = 0,885, \quad \mu = \frac{t_d}{\varepsilon_r g_0} \approx 0,00667.$$

Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $\langle 0, \beta \rangle$, де β – визначається з рівності (9). Обчисливши отримуємо, що $\beta = 0,142166$. Тоді

$\frac{2\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^3} = 0,3289... < 1$, а отже, виконана умова

збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 1. Задаємо точність $\delta = 10^{-4}$. Проводимо ітераційний процес (10) – (12). Процес зійшовся із заданою точністю за п'ять ітерацій. На рисунку 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень, $k = \overline{0, 5}$.

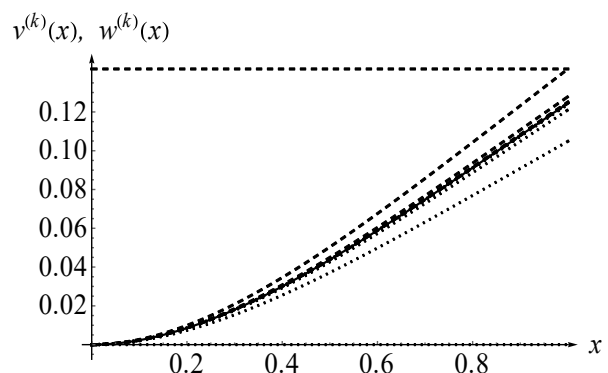


Рис. 2 – Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (пунктирна лінія) наближень

На рисунку 3 наведено графік наближеного розв'язку.

Враховуючи отримані результати можемо говорити про те, що при наведених параметрах моделі (13) максимальний прогин балки склав

$$w_{max} = u(1) \cdot g_0 = 0,124525 \cdot 2 = 0,24905 \text{ мкм},$$

що є стабільним станом балки (прогин складає лише близько 12,45% відстані між електродами), що відповідає невеликій прикладеній нарузі.

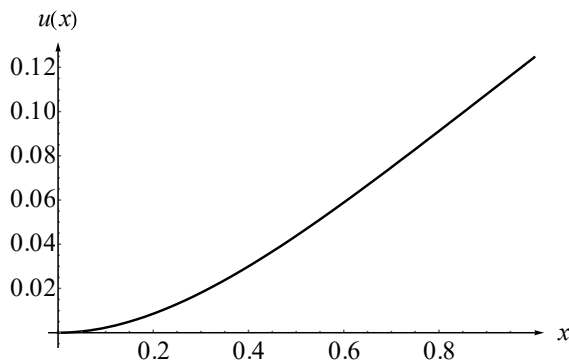


Рис. 3 – Графік наближеного розв'язку

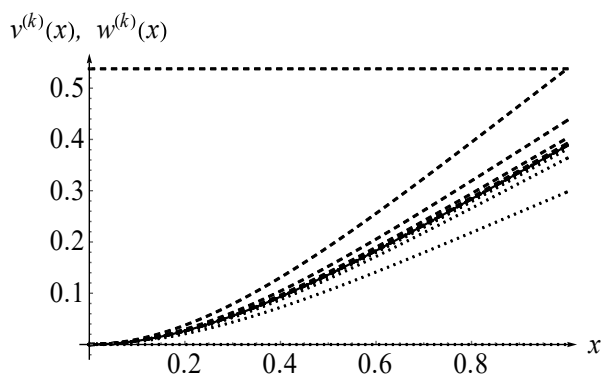
Тепер розглянемо задачу (2), (3) з параметрами [18]

$$\lambda = 10,5, \quad \mu = 1,1. \quad (14)$$

Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $\langle 0, \beta \rangle$, де β – визначається з рівняння (9). Обчисливши отримуємо, що $\beta = 0,537821$. Тоді

$$\frac{2\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^3} = 0,6886... < 1, \text{ а отже, виконана умова}$$

збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 1. Задаємо точність $\delta = 10^{-4}$. Проводимо ітераційний процес (10) – (12). Процес зійшовся із заданою точністю за сім ітерацій. На рисунку 4 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень, $k = \overline{0, 7}$.

Рис. 4 – Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (пунктирна лінія) наближень

На рисунку 5 наведено графік наближеного розв'язку.

Дослідження задачі (2), (3) також проводилося у [18], де вивчався вплив діелектричного шару на напружено-деформований стан мікробалки до виникнення явища втягування («pull-in»). Автори цієї роботи використали модифікований метод

декомпозиції Адомяна (MADM). Його математична суть зводиться до розкладання нелінійної частини диференціального рівняння в ряд за поліномами Адомяна, що дозволяє шукати розв'язок у вигляді часткової суми нескінченного степеневого ряду, коефіцієнти якого визначаються з крайових умов.

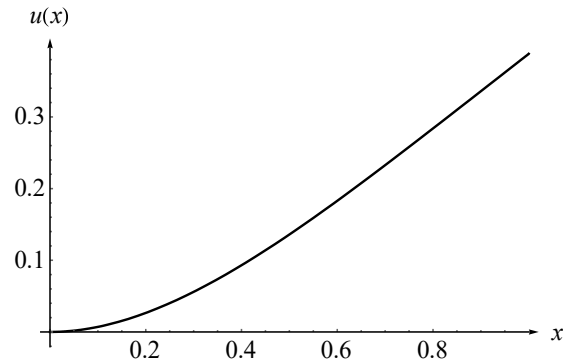


Рис. 5 – Графік наближеного розв'язку

Для тестового набору параметрів (14) розраховане нами значення максимального прогину на вільному кінці балки становить $u^* = 0,388014$. Натомість використання функції, побудованої методом MADM, для тих самих параметрів дає значення прогину $u_{MADM} = 0,382858$. Абсолютна похибка складає

$$\Delta = |u^* - u_{MADM}| = |0,388014 - 0,382858| = 0,005156,$$

а відносна похибка

$$\tilde{\Delta} = \frac{|u^* - u_{MADM}|}{u^*} \cdot 100\% = \frac{0,005156}{0,388014} \cdot 100\% \approx 1,33\%.$$

Така відмінність зумовлена специфікою алгоритму MADM. Точність розв'язку при його реалізації цілком залежить від кількості утриманих членів ряду, проте сам метод не має внутрішнього механізму для оцінки похибки. Натомість запропонований нами метод двобічних наближень ґрунтується на доведеній монотонності інтегрального оператора. На кожному кроці ітераційного процесу він генерує гарантовану двобічну оцінку абсолютної похибки. Оскільки наш підхід забезпечує математично строгий контроль точності, отримані ним результати можна розглядати як еталонні. Це дає змогу використовувати їх для верифікації та безпосередньої оцінки реальної похибки наближених розв'язків, знайдених за допомогою MADM та інших методів.

Висновки. У роботі розв'язано актуальну задачу математичного моделювання стаціонарного прогину балки, як елемента мікроелектромеханічних систем (МЕМС) із діелектричним шаром. Відповідно до мети дослідження, вихідну фізичну модель прогину консольної балки під дією нелінійних електростатичних сил було формалізовано у вигляді крайової задачі для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку. Застосувавши апарат методу функцій Гріна, цю задачу зведено до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна,

яке було досліджено у банаховому просторі неперервних функцій $C[0; 1]$. Враховуючи додатність та ізотонність відповідного інтегрального оператора, було виділено конус невід'ємних функцій і побудовано інваріантний конусний відрізок, що дозволило отримати надійну апіорну оцінку точного розв'язку. На основі цього теоретично обґрунтовано метод двобічних наближень: сформульовано та доведено теорему, яка встановлює умови існування і єдиності розв'язку задачі на цьому відрізку, а також гарантує двобічну збіжність ітераційного процесу. Практичну ефективність запропонованого алгоритму підтверджено результатами обчислювальних експериментів для різних наборів параметрів. Обчислення довели високу швидкість збіжності: задана точність досягається всього за п'ять-сім ітерацій

шляхом побудови монотонних послідовностей верхніх і нижніх наближень, які на кожному кроці обмежують точний розв'язок. На відміну від багатьох традиційних підходів метод забезпечує строгий контроль похибки. Порівняльний аналіз із результатами модифікованого методу декомпозиції Адомяна (MADM) показав, що розв'язки останнього містять відхилення (абсолютна похибка становить 0,005156, відносна – близько 1,33%), які зумовлені неможливістю точно оцінити залишок зрізаного ряду. Таким чином, доведено, що запропонований метод двобічних наближень виступає математично еталонним інструментом: він дозволяє отримувати гарантовано точні результати та може ефективно застосовуватися для верифікації наближених чисельних методів під час проектування МЕМС.



Інформація щодо наборів даних. Набори даних, використані у цьому дослідженні доступні за запитом. Дані розміщені за адресою: електронна пошта автора для листування (anton.savchenko@nure.ua).

Заява щодо фінансування та подяки. Це дослідження не отримувало зовнішнього фінансування

Заява щодо конфлікту інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Заява щодо дотримання етики при роботі з персональними медичними даними (лише для досліджень з персональними даними)

У цьому дослідженні не використовувалися персональні медичні дані та не проводилися дослідження за участю людей або тварин.

Заява щодо використання інструментів штучного інтелекту. Інструменти штучного інтелекту не використовувалися.

Список літератури

- [1] S. Priya et al., "Advances in Bio-Microelectromechanical System-Based Sensors for Next-Generation Healthcare Applications," *ACS Omega*, vol. 10, pp. 34088–34105, 2025, doi: <https://doi.org/10.1021/acsomega.5c03258>.
- [2] J. Casals-Terré et al., "Enhanced Robustness of a Bridge-Type RF-Mems Switch for Enabling Applications in 5G and 6G Communications," *Sensors*, vol. 22, no. 22, Art. 8893, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228893>.
- [3] M. Alghairi, B. A. K. Farhan, H. M. Ridha, S. Mutashar, W. Algriree, and B. M. Sabbar, "Advancing healthcare through piezoresistive pressure sensors: a comprehensive review of biomedical applications and performance metrics," *Journal of Physics Communications*, vol. 8, no. 9, Art. 092001, 2024, doi: <https://doi.org/10.1088/2399-6528/ad7d5d>.
- [4] B. Shao, C. Lu, Y. Xiang, F. Li, and M. Song, "Comprehensive Review of RF MEMS Switches in Satellite Communications," *Sensors*, vol. 24, no. 10, Art. 3135, 2024, doi: <https://doi.org/10.3390/s24103135>.
- [5] W. A. Gill, I. Howard, I. Mazhar, and K. McKee, "A Review of MEMS vibrating gyroscopes and their reliability issues in harsh environments," *Sensors*, vol. 22, Art. 7405, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22197405>.
- [6] M. I. A. Asri, M. N. Hasan, M. R. A. Fuaad, Y. M. Yunos, and M. S. M. Ali, "MEMS gas sensors: A review," *IEEE Sensors Journal*, vol. 21, pp. 18381–18397, 2021, doi: <https://doi.org/10.1109/jsen.2021.3091854>.
- [7] B. Luo et al., "Magnetolectric microelectromechanical and nanoelectromechanical systems for the IoT," *Nature Reviews Electrical Engineering*, vol. 1, pp. 317–334, 2024, doi: <https://doi.org/10.1038/s44287-024-00044-7>.
- [8] D. Wang, C. Watkins, and H. Xie, "MEMS mirrors for LiDAR: A review," *Micromachines*, vol. 11, Art. 456, 2020, doi: <https://doi.org/10.3390/mi11050456>.
- [9] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, and A. H. Nayfeh, "A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 672–680, 2003, doi: <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2003.818069>.
- [10] P. M. Osterberg and S. D. Senturia, "M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 107–118, 1997, doi: <https://doi.org/10.1109/84.585788>.
- [11] A. Савченко та М. Гвоздев, "Застосування методу двобічних наближень до аналізу статичного прогину пружної балки з різними типами закріплення кінців в моделі мікроелектромеханічної системи," *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*, № 28, с. 93–106, 2025, doi: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.93-106>.
- [12] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. New York, NY, USA: Springer, 2011, doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6020-7>.
- [13] C. A. Mihaitoia, A. S. Goia, and T. O. Cheche, "Modeling electrostatically actuated MEMS cantilever beam," *Romanian Reports in Physics*, vol. 75, Art. 913, 2023, doi: <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2023.75.913>.
- [14] P. Laurençot and C. Walker, "Heterogeneous dielectric properties in models for microelectromechanical systems," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 78, no. 1, pp. 504–530, 2018, doi: <https://doi.org/10.1137/17M1117483>.
- [15] H. Feng, J. Zhao, C. Zhou, and M. Song, "Design and Analysis of the Capacitive RF MEMS Switches with Support Pillars," *Sensors*, vol. 22, no. 22, Art. 8864, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228864>.
- [16] V. R. Ambati et al., "Some studies on the deformation of the membrane in an RF MEMS switch," in *Proc. 63rd European Study Group Mathematics with Industry*, Enschede, Netherlands, Jan. 28 – Feb. 1, 2008. Enschede: University of Twente, 2008, pp. 65–84.
- [17] M. Koutsourelis et al., "Thermally activated discharging mechanisms in Si₃N₄ films with embedded CNTs for RF MEMS capacitive switches," *Microelectronic Engineering*, vol. 223, Art. 111230, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mee.2020.111230>.
- [18] E. Yazdanpanahi, A. Noghrehabadi, and M. Ghalambaz, "Effect of dielectric-layer on the stress field of micro cantilever beams at the onset of pull-in instability," *Journal of Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 49–56, 2014, doi: <https://doi.org/10.1017/jmech.2013.67>.
- [19] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964.
- [20] B. I. Опојцев та Т. А. Хуродзе, Нелінійні оператори в конічних просторах. Тбілісі: Вид-во Тбілісі. 10, 1984.
- [21] О. С. Кончаковська та М. В. Сидоров, "Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної

- системи," *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*, № 39, с. 33–41, 2018.
- [22] O. Konchakovska and M. Sidorov, "Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method," *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, vol. 14, no. 3–4, pp. 17–26, 2020.
- [23] O. С. Кончаковська та М. В. Сидоров, "Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електромеханічних систем," *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*, № 55, с. 19–31, 2022, doi: <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2022-55-02>.
- [24] P. Guidotti and D. Bernstein, "Modeling and analysis of hysteresis phenomena in electrostatic zipper actuators," in *Proc. Modeling and Simulation of Microsystems, Hilton Head Island, SC, USA, 2001*, pp. 306–309.
- [25] A. Koochi and M. Abadyan, *Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2020.
- [26] S. Ikizoglu and A. O. Ertanir, "Design considerations of a MEMS cantilever beam switch for pull-in under electrostatic force generated by means of vibrations," *Journal of Vibroengineering*, vol. 16, no. 3, pp. 1195–1204, 2014.
- [11] A. Savchenko and M. Hvozdiev, "Application of the two-sided approximations method to the static deflection analysis of an elastic beam under various boundary conditions in a microelectromechanical system model," *Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences*, no. 28, pp. 93–106, 2025, doi: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.93-106>.
- [12] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. New York, NY, USA: Springer, 2011, doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6020-7>.
- [13] C. A. Mihaitoia, A. S. Goia, and T. O. Cheche, "Modeling electrostatically actuated MEMS cantilever beam," *Romanian Reports in Physics*, vol. 75, Art. 913, 2023, doi: <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2023.75.913>.
- [14] P. Laurençot and C. Walker, "Heterogeneous dielectric properties in models for microelectromechanical systems," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 78, no. 1, pp. 504–530, 2018, doi: <https://doi.org/10.1137/17M1117483>.
- [15] H. Feng, J. Zhao, C. Zhou, and M. Song, "Design and Analysis of the Capacitive RF MEMS Switches with Support Pillars," *Sensors*, vol. 22, no. 22, Art. 8864, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228864>.
- [16] V. R. Ambati et al., "Some studies on the deformation of the membrane in an RF MEMS switch," in *Proc. 63rd European Study Group Mathematics with Industry*, Enschede, Netherlands, Jan. 28 – Feb. 1, 2008. Enschede: University of Twente, 2008, pp. 65–84.
- [17] M. Koutsourelis et al., "Thermally activated discharging mechanisms in SiN_x films with embedded CNTs for RF MEMS capacitive switches," *Microelectronic Engineering*, vol. 223, Art. 111230, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mee.2020.111230>.
- [18] E. Yazdanpanahi, A. Noghrehabadi, and M. Ghalambaz, "Effect of dielectric-layer on the stress field of micro cantilever beams at the onset of pull-in instability," *Journal of Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 49–56, 2014, doi: <https://doi.org/10.1017/jmech.2013.67>.
- [19] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964.
- [20] V. I. Opoytsev and T. A. Khurodze, *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*. Tbilisi: Tbilisi Univ. Press, 1984.
- [21] O. S. Konchakovska and M. V. Sidorov, "The method of two-sided approximations in numerical analysis of one microelectromechanical system," *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, no. 39, pp. 33–41, 2018.
- [22] O. Konchakovska and M. Sidorov, "Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method," *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, vol. 14, no. 3–4, pp. 17–26, 2020.
- [23] O. S. Konchakovska and M. V. Sidorov, "Two-sided iterative method based on the use of Green's function in problems of numerical analysis of some electromechanical systems," *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, no. 55, pp. 19–31, 2022, doi: <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2022-55-02>.
- [24] P. Guidotti and D. Bernstein, "Modeling and analysis of hysteresis phenomena in electrostatic zipper actuators," in *Proc. Modeling and Simulation of Microsystems, Hilton Head Island, SC, USA, 2001*, pp. 306–309.
- [25] A. Koochi and M. Abadyan, *Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2020.
- [26] S. Ikizoglu and A. O. Ertanir, "Design considerations of a MEMS cantilever beam switch for pull-in under electrostatic force generated by means of vibrations," *Journal of Vibroengineering*, vol. 16, no. 3, pp. 1195–1204, 2014.

References (transliterated)

- [1] S. Priya et al., "Advances in Bio-Microelectromechanical System-Based Sensors for Next-Generation Healthcare Applications," *ACS Omega*, vol. 10, pp. 34088–34105, 2025, doi: <https://doi.org/10.1021/acsomega.5c03258>.
- [2] J. Casals-Terré et al., "Enhanced Robustness of a Bridge-Type Rf-Mems Switch for Enabling Applications in 5G and 6G Communications," *Sensors*, vol. 22, no. 22, Art. 8893, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228893>.
- [3] M. Alghairi, B. A. K. Farhan, H. M. Ridha, S. Mutashar, W. Algriree, and B. M. Sabbar, "Advancing healthcare through piezoresistive pressure sensors: a comprehensive review of biomedical applications and performance metrics," *Journal of Physics Communications*, vol. 8, no. 9, Art. 092001, 2024, doi: <https://doi.org/10.1088/2399-6528/ad7d5d>.
- [4] B. Shao, C. Lu, Y. Xiang, F. Li, and M. Song, "Comprehensive Review of RF MEMS Switches in Satellite Communications," *Sensors*, vol. 24, no. 10, Art. 3135, 2024, doi: <https://doi.org/10.3390/s24103135>.
- [5] W. A. Gill, I. Howard, I. Mazhar, and K. McKee, "A Review of MEMS vibrating gyroscopes and their reliability issues in harsh environments," *Sensors*, vol. 22, Art. 7405, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/s22197405>.
- [6] M. I. A. Asri, M. N. Hasan, M. R. A. Fuaad, Y. M. Yunos, and M. S. M. Ali, "MEMS gas sensors: A review," *IEEE Sensors Journal*, vol. 21, pp. 18381–18397, 2021, doi: <https://doi.org/10.1109/jsen.2021.3091854>.
- [7] B. Luo et al., "Magnetolectric microelectromechanical and nanoelectromechanical systems for the IoT," *Nature Reviews Electrical Engineering*, vol. 1, pp. 317–334, 2024, doi: <https://doi.org/10.1038/s44287-024-00044-7>.
- [8] D. Wang, C. Watkins, and H. Xie, "MEMS mirrors for LiDAR: A review," *Micromachines*, vol. 11, Art. 456, 2020, doi: <https://doi.org/10.3390/mi11050456>.
- [9] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, and A. H. Nayfeh, "A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 672–680, 2003, doi: <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2003.818069>.
- [10] P. M. Osterberg and S. D. Senturia, "M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 107–118, 1997, doi: <https://doi.org/10.1109/84.585788>.

Надійшла (received) 30.04.2026
 Прийнята до друку (accepted) 28.05.2026
 Опублікована (published) 29.05.2026

Відомості про авторів та їх внесок / About The Authors And Their Contributions

Антон Савченко (Anton Savchenko) – Харківський національний університет радіоелектроніки, асистент кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057)7021436; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7547-8655>; email: anton.savchenko@nure.ua (збір даних та аналіз літератури, обґрунтування застосування методу двобічних наближень, виконання програмної реалізації, проведення чисельних експериментів)

Максим Сидоров (Maxim Sidorov) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057)7021436; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8022-866X>; email: maxim.sidorov@nure.ua (постановка задачі, розробка загальної ідеї методу)

Усі автори ознайомилися з остаточною версією рукопису та погодилися з її публікацією.