

ВАЛЕРІЙ УСПЕНСЬКИЙ, ЄВГЕНІЙ РЕШЕТНЯК

МЕТОД ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЦІЛІСНОСТІ ДАНИХ В СИСТЕМІ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ОРБІТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

Статтю присвячено питанням вдосконалення програмно-математичного забезпечення бортових гібридних навігаційних систем штучних супутників Землі. Метою роботи є розробка та обґрунтування методу визначення цілісності даних у таких системах під час автономної роботи, коли корекція від глобальних супутникових навігаційних систем тимчасово відсутня. Функція цілісності полягає у гарантованому визначенні придатності до використання вихідної інформації навігаційної системи в умовах неконтрольованої деградації її точності, що притаманно автономному режиму роботи. Метод, що розроблено, є узагальненням розширеного фільтра Калмана для умов відсутності зовнішніх вимірів. Він полягає у попередньому налаштуванні матриць фільтра за критерієм узгодженості фактичної похибки визначення координат з оцінкою її середнього квадратичного відхилення, яку здійснює коваріаційний блок фільтра незалежно від наявності вимірів. Така узгодженість досягається через розв'язок визначальних рівнянь, який передбачає використання методу покоординатного спуску та апріорного імітаційного моделювання. Результатом роботи є нова методика реалізації функції цілісності даних в гібридній навігаційній системі орбітальних об'єктів через модифікацію фільтра Калмана, математичне формулювання задачі налаштування матриць фільтра та критерій такого налаштування. Вказана необхідність проведення розв'язку цієї задачі для різних початкових умов руху супутника вздовж фіксованої орбіти та запропоновано перспективний нейромережвий метод адаптації матриць фільтра безпосередньо під час польоту. Таким чином, розроблено та проілюстровано на прикладі метод забезпечення цілісності даних в системі визначення координат орбітальних об'єктів, який дозволяє поширити термін штатного функціонування систем супутника і робить його бортову навігаційну систему більш стійкою до можливих перерв у сигналах супутникових навігаційних систем.

Ключові слова: штучний супутник Землі, інтегрована навігаційна система, автономний режим, цілісність даних, фільтр Калмана, прогнозування похибок, коваріаційна матриця, орбітальний рух.

VALERII USPENSKYI, YEVHENII RESHETNIAK

METHOD FOR ENSURING THE DATA INTEGRITY PROVISION IN THE COORDINATE DETERMINATION SYSTEM OF ORBITAL OBJECTS

The article is devoted to the issues of improving the software and mathematical support of onboard hybrid navigation systems of artificial Earth satellites. The aim of the work is to develop and substantiate a method for determining data integrity in such systems during autonomous operation, when corrections from global satellite navigation systems are temporarily unavailable. The integrity function consists in the guaranteed determination of the suitability for use of the navigation system's output information under conditions of uncontrolled degradation of its accuracy, which is inherent to autonomous operation. The developed method is a generalization of the extended Kalman filter for conditions in which external measurements are absent. It is based on the preliminary tuning of the filter matrices according to the criterion of consistency between the actual coordinate determination error and the estimate of its root-mean-square deviation, which is produced by the covariance block of the filter regardless of the presence of measurements. Such consistency is achieved by solving defining equations that involve the use of the coordinate descent method and a priori simulation modeling. The result of the work is a new methodology for implementing the data integrity function in a hybrid navigation system of orbital objects through modification of the Kalman filter, including the mathematical formulation of the problem of tuning the filter matrices and the corresponding tuning criteria. The necessity of solving this problem for different initial conditions of satellite motion along a fixed orbit is indicated, and a promising neural-network-based method for adapting the filter matrices directly during flight is proposed. Thus, a method for ensuring data integrity in the coordinate determination system of orbital objects is developed and illustrated by an example; it makes it possible to extend the nominal operational lifetime of satellite systems and increases the robustness of onboard navigation systems to possible interruptions in signals from global satellite navigation systems.

Keywords: artificial Earth satellite, integrated navigation system, autonomous mode, data integrity, Kalman filter, error prediction, covariance matrix, orbital motion.

Вступ. Об'єктом дослідження є штучні супутники Землі (ШСЗ), для функціонування яких потрібно на борту мати інформацію щодо їх поточних координат. Такі вимоги можуть стосуватись супутників дистанційного зондування Землі; супутників глобальних навігаційних систем; супутників, які у навколоземному просторі утворюють певну функціональну мережу, наприклад, підтримку мереж зв'язку або мережі Internet. Як впливає з аналізу літератури, методи визначення координат орбітальних об'єктів можна поділити на такі, що локалізовані на Землі у відповідних пунктах спостережень, і такі, які реалізуються безпосередньо на борту ШСЗ [1, 2]. Останні будемо називати автономними. Обидва класи мають свої переваги і недоліки. В статті [1] зазначено, що методи, що використовуються на наземних пунктах, потребують складного обладнання: радіо або лазерних локаційних станцій. Вони дають досить точний результат, але працюють тільки у межах

сеансу спостережень, який є нетривалим. Інформація, отримана таким чином, може передаватись на супутник. На відміну від цих методів, автономні методи працюють постійно, не залежать від наземного обладнання, але при певних умовах можуть мати похибку, що накопичується [3]. Таке накопичення припустиме, якщо воно є контрольованим. Тобто, якщо бортова система, визначаючи координат ШСЗ одночасно формує імовірнісну оцінку поточного значення похибки, з якою визначаються ці координати, тоді можливо гарантувати коректне функціонування всіх інших бортових систем, якщо похибка залишається у межах припустимої. Така властивість навігаційної системи називається функцією цілісності [4, 5]. У даному разі вона полягає у прогнозуванні у часі очікуваного значення поточної похибки визначення координат, яка з певною ймовірністю буде не менша, ніж фактична похибка. В умовах

імітаційного моделювання польоту це не є проблемою, але в умовах реального польоту фактична похибка є невідомою. В цих умовах ціллю даної роботи є розробка та обґрунтування методу прогнозування похибки визначення координат бортовою навігаційною системою ШСЗ для реалізації функції цілісності. Реалізація такої функції на борту дає можливість обґрунтовано формувати ознаку параметричної відмови системи, коли прогнозоване значення перевищить припустимий рівень похибки за технічними умовами.

Таким чином, проблема, що вирішується, стосується функціонування бортових навігаційних систем ШСЗ.

Оцінімо стан розвитку таких систем на сьогодні. Найпоширенішим класом навігаційного обладнання будь-яких рухомих об'єктів є інтегровані інерціально-супутникові навігаційні системи (ІСНС) [6], які містять гіроскопи, акселерометри та приймачі сигналів супутникових радіонавігаційних систем (СРНС). Основними методами обробки інформації у таких системах є алгоритм інерціальної навігації, що за вимірами інерціальних датчиків визначає поточний вектор стану об'єкту, та алгоритм комплексування інерціальної та супутникової інформації. Найчастіше це певний різновид фільтра Калмана [7, 8]. Дослідженню таких систем, у тому числі з боку реалізації функції цілісності, присвячена робота [9], в якій розглядається інтегрована ІСНС система виявлення відмов, тобто цілісність навігаційного рішення, розв'язано задачу виявлення та ідентифікації відмов GNSS-вимірювань; запропонований підхід забезпечує виявлення одиничних і множинних відмов та підвищує точність позиціонування. Але питання цілостності в навігаційній системі ШСЗ ніде не розглядається, тому проведене дослідження є актуальним.

Для ШСЗ інерціальна навігація має принципові відмінності, оскільки в умовах пасивного орбітального руху акселерометри перебувають у стані невагомості та вимірюють переважно негравітаційні прискорення; тому їх покази близькі до нуля з точністю до збурень [10]. В цих умовах алгоритми навігації для орбітального застосування відрізняються від алгоритмів наземних, повітряних та водних транспортних засобів з наступних причин:

- замість інтегрування вимірів акселерометрів треба здійснювати інтегрування рівнянь руху під впливом гравітаційного прискорення, що обчислюється за певною визначеною моделлю, безпосередній вплив якого проаналізовано у [11];

- для орбітальних застосувань модель гравітаційного прискорення повинна бути найбільш точною, з урахуванням місячних, сонячних та інших збурень. На відміну від ШСЗ, для інерціальних систем наземного застосування точність моделі може не перевищувати точності вимірів акселерометрів, тобто для найточніших випадків це тільки 4-5 знаків після коми;

- для орбітальних об'єктів обчислення просторових координат не залежить від орієнтації ШСЗ у просторі, якщо не враховувати аеродинамічні сили або сили світового тиску. Тому похибки гіроскопів не впливатимуть на результати навігації і характер та властивості навігаційних похибок для ШСЗ зовсім інші, ніж для наземних об'єктів [12].

Все висловлене дозволяє навігаційну систему ШСЗ, на відміну від інтегрованої інерціально-супутникової навігаційної системи, у подальшому називати інтегрованою аналітично-супутниковою навігаційною системою (ІАСНС).

Основним методом комплексування інформації в ІАСНС, так само як і для ІСНС, є розширений узагальнений фільтр Калмана [13]. Основний обчислювальний процес – це інтегрування рівнянь руху центру мас з обчисленням гравітаційного прискорення згідно моделі. Такі обчислення з часом втрачатимуть точність через методичну похибку методу інтегрування, моделі гравітаційного прискорення, наявності збурюючих динамічних впливів. Для запобігання цьому використовуються виміри СРНС та через фільтр Калмана проводиться коригування поточного вектору стану за замкненою схемою корекції [13]. Можливість використання СРНС для ШСЗ досліджувалась у роботах [2, 14], з яких витікає, що відносні методи можуть забезпечувати сантиметрову точність, а абсолютні мають помітно гіршу точність – від метрового до дециметрового рівня залежно від схеми та даних. При регулярному коригуванні координат в ІАСНС така точність є цілком задовільною. Але завжди є можливість перерв у супутникових сигналах, які можуть сягати навіть 10-20 хвилин [15, 16]. В такі інтервали часу ІАСНС працюватиме в автономному режимі із накопиченням похибки. Звісно, до появи супутникової інформації, немає інформації про точні значення таких похибок. І це є проблема, бо при перевищенні припустимого рівня похибок система повинна сигналізувати про це у керуючий обчислювач ШСЗ. В цих умовах локалізуємо проблему, що вирішується.

Розглядається задача прогнозування похибки визначення координат в ІАСНС на пасивній ділянці руху орбітального об'єкту в умовах автономного режиму функціонування, тобто при тимчасовій відсутності супутникової інформації. Основна вимога до оцінки – не бути меншою за фактичне значення похибки, бо інакше неприпустима деградація точності не буде своєчасно виявлена. Але і перевищення не повинно бути значним, бо діагностування відмови буде хибним.

Постановка задачі. Динаміка руху об'єкта в центральному полі гравітаційної сили Землі з урахуванням збурень описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}}(t) = \vec{V}(t) \\ \dot{\vec{V}}(t) = \vec{F}_G(\vec{R}) + \vec{F}_D \end{cases} \quad (1)$$

де \vec{R} – радіус-вектор ШСЗ відносно геоцентричної другої екваторіальної інерціальної системи координат;

\vec{V} – вектор швидкості;

\vec{F}_G – прискорення від гравітаційної сили Землі;

\vec{F}_D – всі інші сили, що діють на ШСЗ, такі як аеродинамічна сила, сила світлового тиску, гравітації від Місяця, Сонця, від дегазації об'єкту і інші.

Опишемо алгоритм функціонування ІАЧНС. В його основу покладається стохастична модель:

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\xi}_R \\ \dot{\vec{V}}(t) = -\mu \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} + \Delta\vec{A}(t) + \vec{\xi}_V, \\ \Delta\dot{\vec{A}}(t) = \vec{\xi}_A(t) \end{cases} \quad (2)$$

де t – поточний час;

$\vec{\xi}_R(t), \vec{\xi}_V(t), \vec{\xi}_A(t)$ – тривимірні векторні білі шуму з нормальним розподілом відносно нульового середнього, інтенсивністю $Q_R = q_R \cdot E_{(3 \times 3)}, Q_V = q_V \cdot E_{(3 \times 3)}, Q_A = q_A \cdot E_{(3 \times 3)}$ відповідно;

$E_{(3 \times 3)}$ – одинична матриця (3x3);

$q_R \geq 0, q_V \geq 0, q_A \geq 0$ – деякі параметри, що визначаються моделюванням;

$R = (\vec{R}, \vec{R})^{\frac{1}{2}}$ – довжина радіус-вектору;

$\mu = 3.9860044 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{c}^2$ – гравітаційна стала Землі.

Гравітаційне прискорення тут представлено у вигляді найпростішої сферичної моделі поля; $\Delta\vec{A}(t)$ – доданок, який вважається невідомим і визначає частку дійсного прискорення поза сферичної гравітаційної моделі. У загальному випадку у якості модельного гравітаційного прискорення можна брати будь-яке наближення. У даному дослідженні порядок наближення не є принциповим, тому для запобігання надмірної складності обрано найпростішу модель, хоча на практиці він має бути як найвищим. Для збіжності алгоритму фільтрації в модель штучно додається віртуальний шум $\vec{\xi}_R(t), \vec{\xi}_V(t), \vec{\xi}_A(t)$, який називається *стабілізаційним*. При завданні певного параметра із сукупності q_R, q_V, q_A нульовим значенням відповідна складова шуму фактично виключається з розгляду.

Одразу за [13] введемо вектор стану фільтра Калмана $x(t) = \text{col}(\vec{R}(t), \vec{V}(t), \Delta\vec{A}(t))$. Тоді (2) у дискретному часі набуває вигляду:

$$x_k = x_{k-1} + \tau \cdot f(x_{k-1}, \xi_{k-1}) = F(x_{k-1}, \xi_{k-1}), \quad (3)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$ – номер моменту часу;

$f(x_{k-1}, \xi_{k-1})$ – дев'ятивимірний вектор-функція, компоненти якої відповідають правим частинам рівнянь (2), в які підставлені значення вектору стану та дев'ятивимірного вектору шуму ξ , актуальні для моменту t_{k-1} .

Додамо модель вимірів. Нехай z_s – шестивимірний вектор вимірів, які поступають від приймача сигналів GPS один раз на секунду в моменти часу t_s . Будемо вважати, що ці моменти співпадатимуть з деякими моментами дискретизації t_k .

Фізично вимірами є три компоненти радіус-вектору $\vec{R}(t_s)$ та три компоненти вектору швидкості

$\vec{V}(t_s)$ в проекціях на осі інерціальної системи координат з випадковими перешкодами. В цих умовах модель, що зв'язує фактичні виміри із вектором стану, має вигляд:

$$z_s = H \cdot x_s + v_s, \quad (4)$$

де $H = [E_{(6 \times 6)} \quad 0_{(6 \times 3)}]$ – блокова матриця (6x9), яка складається з одиничної матриці (6x6) та нульової матриці (6x3);

v_s – випадковий шестивимірний вектор з незалежними змінними з нульовим середнім, нормальним розподілом та матрицею дисперсій:

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 \cdot E_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & \sigma_V^2 \cdot E_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де σ_R, σ_V – середньоквадратичні відхилення похибок визначення координат та швидкості у приймачі сигналів GPS, які беруться з приймача або задаються апіорі.

Як визначено у [13], отримання оцінок координат $\hat{R}(t_k)$, швидкості $\hat{V}(t_k)$ та поправок до модельного прискорення $\Delta\hat{A}(t_k)$ для нелінійного стохастичного процесу (3), (4) здійснюється за схемою розширеного фільтра Калмана:

1. Для чергового моменту часу t_k робиться прогноз оцінок вектору стану ФК за формулою:

$$\hat{x}_k^- = F(\hat{x}_{k-1}, \xi_{k-1} = 0), \quad (6)$$

в якій шум покладається нульовим, та прогноз коваріаційної матриці (9x9) їх похибок:

$$P_k^- = \Phi_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot \Phi_{k-1}^T + Q, \quad (7)$$

де $\Phi_{k-1} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{t=t_{k-1}} = \begin{bmatrix} E_{(3 \times 3)} & \tau \cdot E_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ \Psi_{(3 \times 3)} & E_{(3 \times 3)} & \tau \cdot E_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} & E_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}$ – яacobіан системи (9x9) (див. [13]);

Q – діагональна позитивно визначена матриця, пов'язана із дискретним аналогом стабілізаційного шуму.

Початкові умови для шести компонент оцінки вектору стану \hat{x}_0 задаються з миттєвих вимірів GPS, для решти – нульові. Початкове значення коваріаційної матриці доцільно взяти у діагональному вигляді, вздовж головної діагоналі три елементи мають значення σ_R^2 , наступні три елементи σ_V^2 , останні три елементи визначаються, як $(\delta A_{max}/3)^2$, де δA_{max} – евристично задана величина, напевно більша, ніж абсолютне значення кожної з компонент невідомого вектору $\Delta\vec{A}(t_0)$.

2. Якщо для моменту часу t_k виміри z_s відсутні, то покладаємо $\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$, $P_k = P_k^-$ та повертаємось до пункту 1.

3. При $t_k = t_s$ проводиться корекція прогнозованого вектору стану за формулами:

$$K_{(9 \times 6)} = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + \mathfrak{R})^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K \cdot (z_s - H \cdot \hat{x}_k^-), \quad (9)$$

та обчислюється апостеріорна коваріаційна матриця похибок оцінок для наступного кроку:

$$P_k = (E - K \cdot H) \cdot P_k^-. \quad (10)$$

Далі знов потрапляємо до пункту 1. Кінець роботи алгоритму співпадає із закінченням місії.

З точки зору цілісності, важливим є саме тривалий режим, коли виміри z_s відсутні. У цьому разі алгоритм обчислення коваріаційної матриці виглядає наступним чином:

$$P_k^- = \Phi_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot \Phi_{k-1}^T + Q, \quad (11)$$

і, зокрема, веде до накопичення дисперсій похибок оцінки вектора стану фільтра. В цих умовах дані для моменту часу t_k вважатимемо цілісними, якщо для достатньо великого числа реалізацій потрійна величина оцінки максимального середнього квадратичного відхилення для похибок координат, яку отримуємо з діагональних елементів матриці P за формулою:

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k) = 3 \cdot \max_{i=1,2,3} \sqrt{P_{ii}(t_k)}, \quad (12)$$

з частотою 0.997 перевищує фактичну похибку:

$$\varepsilon_{max}(t_k) = \max_{i=1,2,3} |r_i^e(t_k) - r_i^e(t_k)|, \quad (13)$$

де $r_i^e(t_k)$ – еталонні значення координат.

Практичне значення «цілісності» полягає в тому, що в умовах експлуатації, коли фактична похибка координат невідома, але є оцінка (12), навігаційну систему можна вважати працездатною, якщо:

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k) \leq \epsilon, \quad (14)$$

де ϵ – задане граничне значення припустимої похибки визначення координат.

Таким чином, щоб на практиці користатись критерієм (14), треба, по-перше, забезпечити цілісність навігаційних даних, по-друге, забезпечити якомога пізніше порушення цього критерію, бо швидкість зростання у часі оцінки $\tilde{\sigma}_{max}(t_k)$ може набагато перевищувати швидкість зростання $\varepsilon_{max}(t_k)$.

В цих умовах висувається гіпотеза, що задачу забезпечення цілісності можна розв'язати за рахунок вибору матриць Q та \mathfrak{R} , бо від них суттєво залежить $\tilde{\sigma}_{max}(t_k)$. При чому цілісність даних в умовах наявності зовнішніх вимірів та корекції вектору стану від них за допомогою викладеного фільтра Калмана досягається автоматично. Тому необхідно забезпечити розв'язок задачі саме в умовах автономного режиму навігації, там, де власно і використовується оцінка цілісності.

Сформулюємо завдання. Задача забезпечення функції цілісності полягає у знаходженні параметрів $q_R \geq 0, q_V \geq 0, q_A \geq 0$ матриці Q та $\sigma_R^2 \geq 0, \sigma_V^2 \geq 0$ матриці \mathfrak{R} через розв'язок рівнянь:

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k) = \varepsilon_{max}(t_k) = \epsilon, \quad (15)$$

відносно t_k та q_R, q_V, q_A . При цьому для будь-якого $t_k \leq T$ повинні виконуватись умови цілісності, тобто:

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k) \geq \varepsilon_{max}(t_k). \quad (16)$$

Розробка методу. На початковому етапі дослідження виявлено, що алгоритм (11) обчислення коваріаційної матриці в умовах відсутності коригуючих вимірів згідно з фільтром Калмана не спроможний надати адекватної оцінки очікуваного СКВ, яка б була узгоджена із фактичним значенням похибки. Ця оцінка зростає набагато швидше за похибку. Для подолання цього ефекту запропоновано в умовах відсутності вимірів зберегти структуру алгоритму відновлення коваріаційної матриці і обчислювати її за формулами:

$$\begin{aligned} P_k^- &= \Phi_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot \Phi_{k-1}^T + \tilde{Q}, \\ K &= P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + \tilde{\mathfrak{R}})^{-1}, \\ P_k &= (E - K \cdot H) \cdot P_k^-, \end{aligned} \quad (17)$$

в яких матриці \tilde{Q} та $\tilde{\mathfrak{R}}$ відрізняються значеннями від однойменних матриць Q та \mathfrak{R} , що застосовані в режимі корекції вектору стану.

Звісно, корекція самого вектору стану при відсутності вимірів не проводиться. Таким чином, в основу розв'язання задачі цілісності покладається наведена вище модель обчислення коваріаційної матриці похибок, яка виходить за межі стандартного алгоритму фільтра Калмана і потребує певного налаштування в частині вибору матриць \tilde{Q} та $\tilde{\mathfrak{R}}$.

Повернемось до рівнянь (15). Вираз (15) являє собою систему двох рівнянь:

$$\varepsilon_{max}(t_k) = \epsilon, \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V) = \epsilon, \quad (19)$$

ліві частини яких обчислюються за допомогою (12), (13) і які є результатом моделювання автономного режиму. Спочатку визначається час, протягом якого фактична похибка (13) досягає значення. Слід зазначити, що залежність на часі, що не перевищує тривалості контрольованого автономного режиму, є монотонно зростаючою і (18) напевно має один розв'язок. Нехай фактична похибка навігації досягла значення в момент часу T ді рівняння (19) залишається одне і набуває вигляду:

$$\tilde{\sigma}_{max}(T, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V) = \epsilon. \quad (20)$$

Визначення шуканих параметрів $q_R \geq 0, q_V \geq 0, q_A \geq 0, \sigma_R \geq 0, \sigma_V \geq 0$ матриць \tilde{Q} та $\tilde{\mathfrak{R}}$ здійснюється методом покоординатного спуску, шляхом моделювання автономного режиму з одних і тих же початкових умов і обчислення параметру:

$$\tilde{\sigma}_{max}(T, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V) = 3 \cdot \max_{i=1,2,3} \sqrt{P_{ii}(T)}, \quad (21)$$

Особливістю розв'язку рівняння (20) є те, що під час моделювання для кожного $t_k \leq T$ необхідно контролювати умову:

$$\tilde{\sigma}_{max}(t_k, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V) \geq \varepsilon_{max}(t_k). \quad (22)$$

При порушенні (22) моделювання для поточної точки $q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V$ припиняється, значення параметрів змінюються за обраною стратегією і моделювання відновлюється знову з початку автономного режиму.

Наявність обмеження (22) може привести до того, що точного рішення для (20) не існує. Щоб запобігти такого випадку і знайти хоча б приблизне рішення пропонується пошук параметрів $q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V$ здійснювати через додатковий ітераційний процес:

$$\tilde{\sigma}_{max}(T, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V) = \varepsilon^L, L = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Верхній індекс означає номер ітерації. Значення параметрів, знайдені для поточної ітерації, стають початковим наближенням для наступної ітерації. Початкове значення $\varepsilon^0 = \sqrt{P_{ii}(T)}$ визначається при довільному завданні шуканих параметрів шляхом моделювання автономного режиму до моменту часу T . При цьому єдиною вимогою є нерівність (22). Отримане таким чином значення ε^0 напевно буде більшим за ε . На наступній ітерації покладається $\varepsilon^L = \varepsilon^{L-1} - \Delta_\varepsilon$, де $\Delta_\varepsilon > 0$ - параметр, що задається, і в цих умовах шукається розв'язок (23). Якщо пошук розв'язку з урахуванням (22) був успішним, зменшується ε^L і процедура повторюється. Ітераційний процес закінчується, якщо $\varepsilon^L = \varepsilon$, або при порушенні умови (22) при черговому значенні ε^L . Якщо використовувати статистичну метрику, можна рахувати кількість моментів часу, коли умова (22) порушується, і припинити пошук тільки при перевищенні певного значення частоти порушень на повному відрізку часу.

Таким чином, описана стратегія дозволяє знайти хоча б один приблизний розв'язок рівняння (19). При вдалому збігу обставин через такі ітерації можливо суттєво наблизитись до встановленого значення ε , тобто отримати $\varepsilon^L \approx \varepsilon$. У цьому разі розв'язок задачі забезпечення цілісності даних через налаштування матриць \tilde{Q} та $\tilde{\mathcal{Y}}$ буде найкращим.

Результати моделювання та їх обговорення. Для перевірки працездатності сформульованого методу скористаємось моделюванням. Воно проводиться у наступних умовах. Розглядається низькоорбітальний штучний супутник Землі (ШСЗ). Його незбурений рух здійснюється вздовж еліпсу і в інерціальній системі координат періодичний. Зафіксуємо довільну точку орбіти, як початкову для розв'язання задачі. Нехай протягом одного вітка є GPS-виміри координат (з точністю до 100 м) та швидкості ШСЗ, які корегують вектор стану супутника і додатково дозволяють отримати оцінку вектору поправок до модельного прискорення $\Delta\tilde{A}(t)$. Корекція здійснюється за замкненою схемою, повний вектор стану корегується кожної секунди. Оскільки вектор поправок до модельного прискорення в основному зумовлений часткою гравітаційного прискорення, що не враховується при обчисленні за моделлю, він є майже однаковим для сусідніх орбітальних вітків. В

цих умовах під час супутникової корекції цей вектор запам'ятовується на всьому вітку раз на секунду і використовується на тих ділянках орбіти у наступному, де буде здійснюватись автономний режим.

Розглядається такий сценарій роботи навігаційної системи. Протягом одного вітку вона працює в інтегрованому режимі з уточненням всіх своїх параметрів. Після чого моделюється автономний режим роботи, упродовж якого здійснюється обчислення матриці P_k з (17) і параметру $\tilde{\sigma}_{max}(t_k, q_R, q_V, q_A, \sigma_R, \sigma_V)$ з (12). Паралельно визначаються фактичні похибки обчислення вектору стану $\varepsilon_{max}(t_k)$ шляхом порівняння оцінки вектору стану з еталонними значеннями з (13). Таким чином формується ліва частина виразів (18), (19). В цих умовах за допомогою ітераційної процедури (23) знаходяться матриці \tilde{Q} та $\tilde{\mathcal{Y}}$, що відповідають точному або наближеному розв'язку рівнянь (18), (19) з врахуванням умов (16). Отримані таким чином матриці можуть використовуватись у межах алгоритму (17) для оцінки фактичних похибок автономного режиму, реалізуючи функцію цілісності даних.

Наведемо графічні результати моделювання.

Періодична зміна координат вектору стану на двох вітках зображено на рис.1.

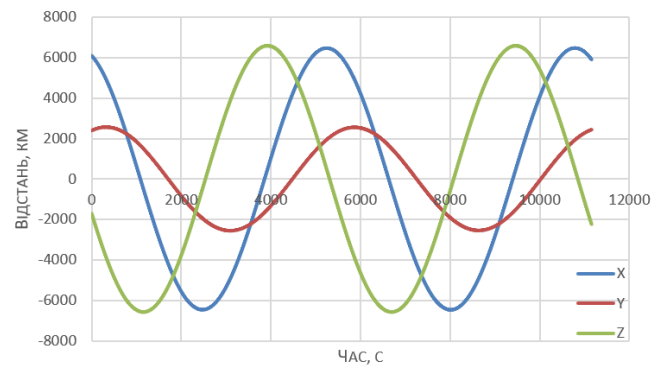


Рис.1 – Координати ШСЗ відносно геоцентричної інерціальної системи координат (в км)

Тривалість одного вітку складає 5580 с. При використанні розширеного фільтра Калмана, який здійснює корекцію повного вектору стану за вимірами GPS, похибка разом із параметром $\tilde{\sigma}_{max}$ наведена на рис.2.

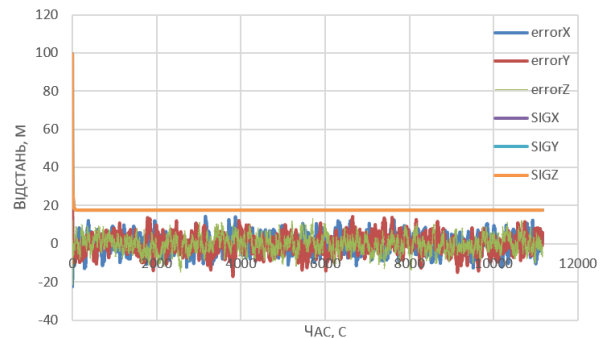


Рис.2 – Фактична похибка визначення координат в інтегрованому режимі та потрошене значення СКВ похибки (в м)

В процесі корекції визначається оцінка поправки до гравітаційного прискорення (рис.3), яка в інтегрованому та автономному режимах роботи використовується для компенсації.

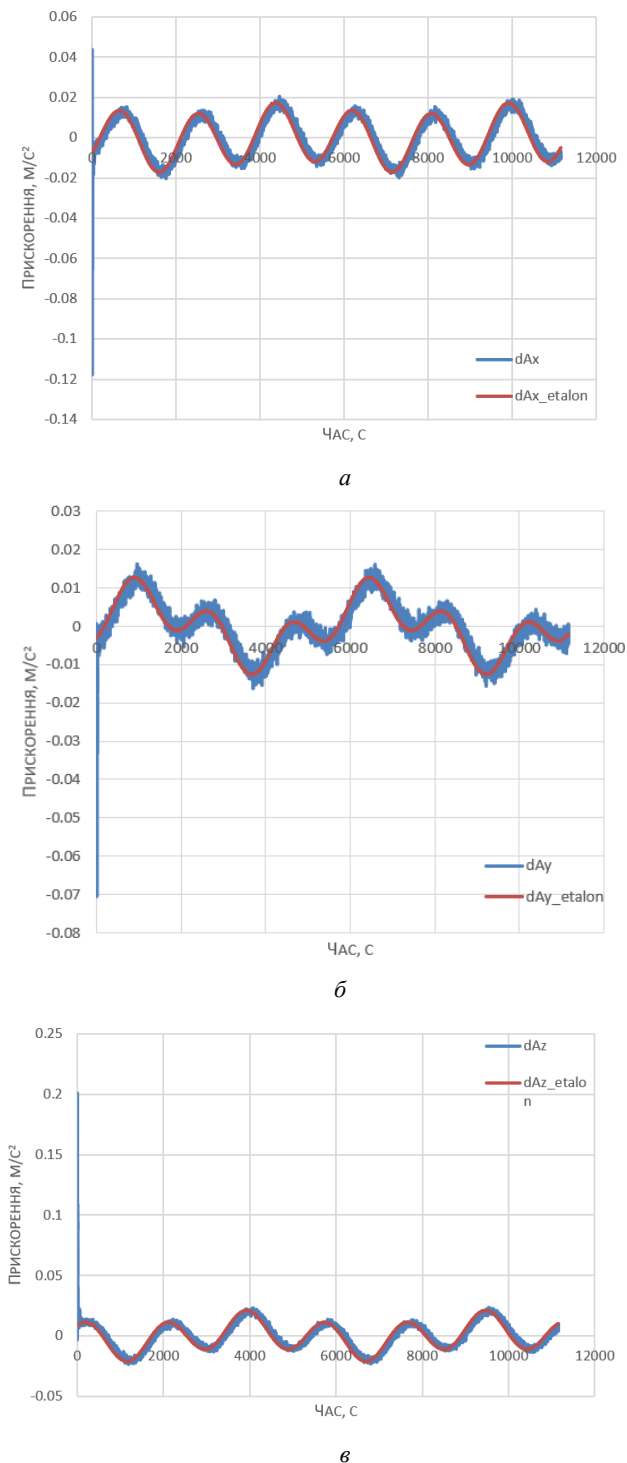


Рис.3 – Еталонне значення поправки до модельного прискорення та його оцінка фільтром Калмана (м/с²)

- а – проекція векторів на вісь X;
- б – проекція векторів на вісь Y;
- в – проекція векторів на вісь Z;

З наведених графіків можна зробити висновок, що в інтегрованому режимі координати визначаються з високою точністю, яка перевищує точність GPS-

вимірів в 10 разів. Співвідношення похибки координат з оцінкою СКВ демонструє гарну узгодженість фільтра в умовах корекції. При цьому також адекватно оцінюються поправки до прискорення, яке має періодичний характер з періодом 5580 с. Це дозволяє їх запам'ятати та використовувати у подальшому автономному режимі.

Промодельємо випадок, коли перший віток система працює в інтегрованому режимі, потім в автономному режимі протягом 2000 с, решту часу знов в інтегрованому режимі. Похибка визначення координат виглядає, як на рис.4.

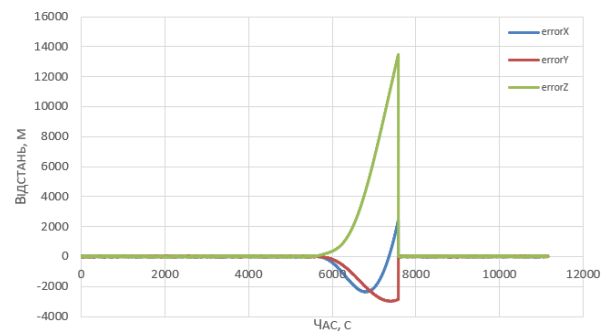


Рис.4 – Похибка визначення координат при роботі у змішаних режимах (в м)

Нехай навігаційна система вважається справною, якщо похибки визначення координат не перевищують, наприклад, 2000 м. Як бачимо з наведених графіків, фактична похибка для будь-якої координати не перевищує вказаний поріг близько 900 с з 2000 с автономного режиму. Тобто система може вважатись справною ще деякий час після початку автономного режиму. В умовах експлуатації, не маючи фактичної похибки, встановити факт параметричної відмови можливо тільки через розроблену функцію оцінки цілісності. Функція цілісності налаштовується на етапі проектування системи шляхом моделювання. Далі обговорено можливість адаптації цієї функції під час експлуатації.

В результаті моделювання отримані налаштування матриць \tilde{Q} та $\tilde{\mathfrak{R}}$ у двох режимах: з корекцією та в автономному (таблиця 1).

Таблиця 1 – Параметри матриць

Назва параметру/ Назва режиму	$q_R, (m)^2$	$q_V, (m/c)^2$	$q_A, (m/c^2)^2$	σ_R, m	$\sigma_V, m/c$
В інтегрованому режимі	1	0.01	0.000001	1	1
В автономному режимі	500	0.05	0.000001	1000	22

На рис. 5 наведені фактичні похибки визначення координат в автономному режимі та параметр $\pm \tilde{\sigma}_{max}(t)$ після відповідного налаштування матриць \tilde{Q} та $\tilde{\mathfrak{R}}$. Для параметру $\tilde{\sigma}_{max}$ для зручності наведено дві симетричні криві. Налаштування проводилось для $\epsilon =$

2000 м. Збіг значень двох кривих на рівні ϵ свідчить про те, що вдалось знайти точне рішення рівнянь (18), (19).

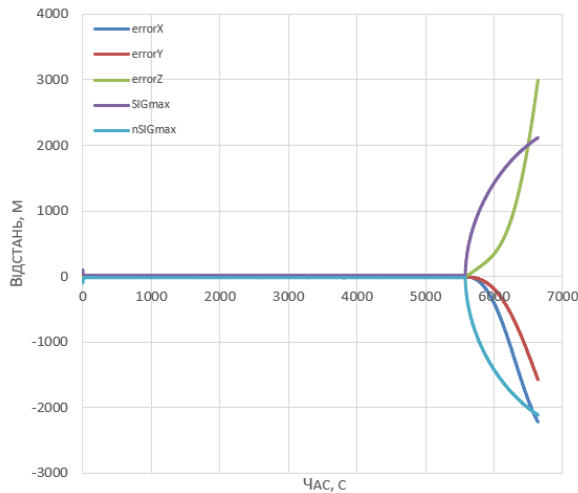


Рис.5 – Графіки фактичних похибок та параметру $\tilde{\sigma}_{max}$

Обговоримо, як і для чого надалі можна використовувати знайдені параметри. Якщо такі параметри вже отримані, під час автономного режиму, коли еталонні значення вектора стану не відомі, за алгоритмом (17), (12) проводиться обчислення параметру $\tilde{\sigma}_{max}$. В той момент, коли він досягне рівня ϵ , система самостійно визначить параметричну відмову і припинить видавати коректні дані в іншій системі до того моменту, доки не з'явиться сигнали GPS і не відновиться режим корекції.

Описана методика налаштування матриць має те обмеження, що результат, отриманий для одних початкових умов автономного режиму, може не збігатися з потребами діагностування при інших початкових умов. Для подолання цієї обмеженості пропонується наступні заходи:

- в умовах апріорного моделювання польоту і налаштування функції цілісності проводиться обчислення для різних початкових точок автономного режиму і обирається варіант, який задовольняє усім випадкам. При цьому для деяких випадків він буде не

найкращим. Враховуючи періодичність руху ШСЗ такий підхід є реалістичним;

- в умовах фактичного польоту пропонується процес налаштування проводити постійно, на фоні інтегрованого режиму, коли гібридні координати можна використовувати, як еталонні. Для цього достатньо паралельно запускати алгоритм обчислення координат в автономному режимі, порівнювати їх з еталонними, та прогнозувати коваріаційну матрицю за алгоритмом (17). За результатом їх порівняння проводити корекцію параметрів матриць і продовжувати процес налаштування вже в інших поточних координатах. При цьому не допускати зменшення часу T (час діагностування відмови) на наступних наближеннях, бо це призведе до втрати ефективності для попередніх випадків. Таким чином, віртуально починаючи автономний режим з різних початкових точок, поводити постійну адаптацію матриць. Звісно, цей процес займатиме більше одного витку, але може виконуватись постійно і не обов'язково тільки для запланованій орбіти. Для реалізації подібного процесу перспективним є використання нейромережевої моделі.

Висновки. Розглянута задача визначення функції цілісності даних в інтегрованій аналітико-спутниковій навігаційній системі штучного супутника Землі в автономному режимі. Запропоновано алгоритм визначення контрольних параметрів, які є подібними до СКВ прогнозованих похибок координат ШСЗ в автономному режимі. Їх визначення пов'язане із налаштуванням матриць фільтра через процедуру чисельного пошуку. Наведено результати моделювання такого алгоритму та обговорено аспекти практичного використання. Вказано, що адаптацію шуканих матриць до змінних умов автономного режиму перспективно проводити за методологією штучних нейромереж. Практична реалізація розробленого методу у бортовому програмному забезпеченні ШСЗ підвищить надійність навігаційних визначень в умовах короткочасної відсутності корегуючих сигналів від GPS та покращить умови функціонування супутника за призначенням.

Інформація щодо наборів даних. Набори даних, використані у цьому дослідженні, створені авторами в рамках цього дослідження. Контакт для запиту даних: e-mail: Yevhenii.Reshetniak@infiz.khpi.edu.ua.

Заява щодо фінансування та подяки. Це дослідження не отримувало зовнішнього фінансування.

Заява щодо конфлікту інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Заява щодо використання інструментів штучного інтелекту. Інструменти штучного інтелекту не використовувалися.

Список літератури

- [1] R. Deng, H. Qin та Y. Zhang, "Non-Cooperative LEO satellite orbit determination using single station for space-based opportunistic positioning", *Remote Sens.*, т. 16, № 5, с. 912, берез. 2024, doi: <https://doi.org/10.3390/rs16050912>.
- [2] K. Selvan, A. Siemuri, F. S. Prol, P. Välisuo, M. Z. H. Bhuiyan та H. Kuusniemi, "Precise orbit determination of LEO satellites: A systematic review", *GPS Solut.*, т. 27, № 4, серп. 2023, doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-023-01520-7>.
- [3] K. Wang та A. El-Mowafy, "LEO satellite clock analysis and prediction for positioning applications", *Geo-Spatial Inf. Sci.*, с. 1–20, черв. 2021, doi: <https://doi.org/10.1080/10095020.2021.1917310>.
- [4] M. Jia та Z. M. Kassas, "Kalman filter-based integrity monitoring for GNSS and 5G signals of opportunity integrated navigation", *IFAC-PapersOnLine*, т. 55, № 24, с. 273–278, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.296>.
- [5] Y. Gao, Y. Jiang, Y. Gao та G. Huang, "A linear Kalman filter-based integrity monitoring considering colored measurement noise", *GPS Solut.*, т. 25, № 2, лют. 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-021-01086-2>.
- [6] N. Boguspayev, D. Akhmedov, A. Raskaliyev, A. Kim та A. Sukhenko, "A comprehensive review of GNSS/INS integration techniques for land and air vehicle applications", *Appl. Sci.*, т. 13, № 8, с. 4819, квіт. 2023. doi: <https://doi.org/10.3390/app13084819>.
- [7] R. Dhanalakshmi та ін., "Onboard pointing error detection and estimation of observation satellite data using extended kalman

- filter”, *Comput. Intell. Neurosci.*, т. 2022, с. 1–8, жовт. 2022, doi: <https://doi.org/10.1155/2022/4340897>.
- [8] Y. Yuan, F. Li, J. Chen, Y. Wang та K. Liu, “An improved Kalman filter algorithm for tightly GNSS/INS integrated navigation system”, *Math. Biosciences Eng.*, т. 21, № 1, с. 963–983, 2023, doi: <https://doi.org/10.3934/mbe.2024040>.
- [9] F. Zhang, Y. Wang та Y. Gao, “A novel method of fault detection and identification in a tightly coupled, ins/gnss-integrated system”, *Sensors*, т. 21, № 9, с. 2922, квіт. 2021, doi: <https://doi.org/10.3390/s21092922>.
- [10] M. Romeshkani, J. Müller, S. Ebadi, A. Knabe та M. Schilling, “Accelerometer data transplant for future satellite gravimetry”, *Earth Space Sci.*, т. 13, № 1, груд. 2025, doi: <https://doi.org/10.1029/2025ea004417>.
- [11] Y. Zhuang та L. Wang, “Analysis of the gravity models impact on leo satellite orbit prediction”, *Int. Arch. Photogrammetry, Remote Sens. Spatial Inf. Sci.*, XLVI-3/W1-2022, с. 307–313, квіт. 2022, doi: <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-xlvi-3-w1-2022-307-2022>.
- [12] Y. Wang та ін., “Improving precise orbit determination of LEO satellites using enhanced solar radiation pressure modeling”, *Weather*, січ. 2023, doi: <https://doi.org/10.1029/2022sw003292>.
- [13] V. Uspenskiy, “Relative navigation method for orbital objects”, *Bull. Nat. Tech. Univ. «KhPI» Ser.: Dyn. Strength Mach.*, № 1, с. 96–107, верес. 2025, doi: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.324136>.
- [14] G. Michalak, S. Glaser, K. H. Neumayer та R. König, “Precise orbit and Earth parameter determination supported by LEO satellites, inter-satellite links and synchronized clocks of a future GNSS”, *Advances Space Res.*, берез. 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.03.008>.
- [15] M. Saajasto, Z. M. H. Bhuiyan, T. Rikkinen, S. Marila та S. Kaasalainen, “Effects of prolonged GNSS jamming on a continuously operating monitoring station”, *J. Location Based Services*, с. 1–16, листоп. 2025, doi: <https://doi.org/10.1080/17489725.2025.2587735>.
- [16] A. Jouybari, M. Bagherbandi та F. Nilfouroushan, “Numerical analysis of GNSS signal outage effect on eops solutions using tightly coupled GNSS/IMU integration: A simulated case study in sweden”, *Sensors*, т. 23, № 14, с. 6361, лип. 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/s23146361>.
- [4] M. Jia and Z. M. Kassas, “Kalman Filter-Based Integrity monitoring for GNSS and 5G signals of opportunity integrated navigation,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 24, pp. 273–278, Jan. 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.296>.
- [5] Y. Gao, Y. Jiang, Y. Gao, and G. Huang, “A linear Kalman filter-based integrity monitoring considering colored measurement noise,” *GPS Solutions*, vol. 25, no. 2, Feb. 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-021-01086-2>.
- [6] N. Boguspayev, D. Akhmedov, A. Raskaliyev, A. Kim, and A. Sukhenko, “A Comprehensive review of GNSS/INS integration techniques for land and air vehicle applications,” *Applied Sciences*, vol. 13, no. 8, p. 4819, Apr. 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/app13084819>.
- [7] R. Dhanalakshmi et al., “Onboard pointing error detection and estimation of observation satellite data using extended Kalman filter,” *Computational Intelligence and Neuroscience*, vol. 2022, pp. 1–8, Oct. 2022, doi: <https://doi.org/10.1155/2022/4340897>.
- [8] Y. Yuan, F. Li, J. Chen, Y. Wang, and K. Liu, “An improved Kalman filter algorithm for tightly GNSS/INS integrated navigation system,” *Mathematical Biosciences & Engineering*, vol. 21, no. 1, pp. 963–983, Jan. 2023, doi: <https://doi.org/10.3934/mbe.2024040>.
- [9] F. Zhang, Y. Wang, and Y. Gao, “A novel method of fault detection and identification in a tightly coupled, INS/GNSS-Integrated system,” *Sensors*, vol. 21, no. 9, p. 2922, Apr. 2021, doi: <https://doi.org/10.3390/s21092922>.
- [10] M. Romeshkani, J. Müller, S. Ebadi, A. Knabe, and M. Schilling, “Accelerometer data transplant for future satellite gravimetry,” *Earth and Space Science*, vol. 13, no. 1, Dec. 2025, doi: <https://doi.org/10.1029/2025ea004417>.
- [11] Y. Zhuang and L. Wang, “ANALYSIS OF THE GRAVITY MODELS IMPACT ON LEO SATELLITE ORBIT PREDICTION,” *the International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences/International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, vol. XLVI-3/W1-2022, pp. 307–313, Apr. 2022, doi: <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-xlvi-3-w1-2022-307-2022>.
- [12] Y. Wang et al., “Improving precise orbit determination of LEO satellites using enhanced solar radiation pressure modeling,” *Space Weather*, vol. 21, no. 1, Jan. 2023, doi: <https://doi.org/10.1029/2022sw003292>.
- [13] V. Uspenskiy, “Relative navigation method for orbital objects,” *Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series Dynamics and Strength of Machines*, no. 1, pp. 96–107, Sep. 2025, doi: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.324136>.
- [14] G. Michalak, S. Glaser, K. H. Neumayer, and R. König, “Precise orbit and Earth parameter determination supported by LEO satellites, inter-satellite links and synchronized clocks of a future GNSS,” *Advances in Space Research*, vol. 68, no. 12, pp. 4753–4782, Mar. 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.03.008>.
- [15] M. Saajasto, Z. M. H. Bhuiyan, T. Rikkinen, S. Marila, and S. Kaasalainen, “Effects of prolonged GNSS jamming on a continuously operating monitoring station,” *Journal of Location Based Services*, pp. 1–16, Nov. 2025, doi: <https://doi.org/10.1080/17489725.2025.2587735>.
- [16] A. Jouybari, M. Bagherbandi, and F. Nilfouroushan, “Numerical analysis of GNSS signal outage effect on EOPS solutions using tightly coupled GNSS/IMU integration: a simulated case study in Sweden,” *Sensors*, vol. 23, no. 14, p. 6361, Jul. 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/s23146361>

References (transliterated)

- [1] R. Deng, H. Qin, and Y. Zhang, “Non-Cooperative LEO satellite orbit determination using single station for Space-Based opportunistic positioning,” *Remote Sensing*, vol. 16, no. 5, p. 912, Mar. 2024, doi: <https://doi.org/10.3390/rs16050912>.
- [2] K. Selvan, A. Siemuri, F. S. Prol, P. Välisuo, M. Z. H. Bhuiyan, and H. Kuusniemi, “Precise orbit determination of LEO satellites: a systematic review,” *GPS Solutions*, vol. 27, no. 4, Aug. 2023, doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-023-01520-7>.
- [3] K. Wang and A. El-Mowafy, “LEO satellite clock analysis and prediction for positioning applications,” *Geo-spatial Information Science*, vol. 25, no. 1, pp. 14–33, Jun. 2021, doi: <https://doi.org/10.1080/10095020.2021.1917310>.

Надійшла (received) 17.04.2026
 Прийнята до друку (accepted) 28.05.2026
 Опублікована (published) 29.05.2026

Відомості про авторів та їх внесок / About The Authors And Their Contributions

Валерій Успенський (Valerii Uspenskiy) – доктор технічних наук, доцент, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Комп'ютерного моделювання процесів та систем»; м. Харків, Україна; тел.: (057)707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5960-7347>; e-mail: Valerii.Uspenskiy@khp.edu.ua; (постановка задачі, ідея методу, обговорення результатів)

Євгеній Решетняк (Yevhenii Reshetniak) – Національний технічний університет "Харківський Політехнічний Інститут"; аспірант кафедри «Комп'ютерного моделювання процесів та систем»; м. Харків, Україна; тел.: (099)437-27-57; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9230-4986>; e-mail: Yevhenii.Reshetniak@infiz.khpi.edu.ua; (алгоритм розв'язку, моделювання, оформлення, рецензування та редагування)

Усі автори ознайомилися з остаточною версією рукопису та погодилися з її публікацією.