OPEN ACCESS ISSN 2078-9130

УДК 004.93 DOI: 10.20998/2078-9130.2026.1.357443

МАРИНА МОРОЗОВА, ОЛЕНА СИДОРЕНКО

СТАТИСТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПЛАТОНОВИХ ТІЛ У ВЕЛИКИХ НАБОРАХ ДАНИХ

Статтю присвячено розробці автоматизованого алгоритму статистичної ідентифікації правильних опуклих багатогранників (Платонових тіл) у великих наборах даних. Проведено аналіз сучасних наукових робіт, присвячених питанням пошуку і розпізнавання просторових об'єктів у масивах великої розмірності. В основу дослідження покладено методи обчислювальної геометрії, описової статистики та інтелектуального аналізу даних. Для реалізації алгоритму обрано детермінований підхід. Процес ідентифікації правильних опуклих багатогранників здійснено шляхом пошуку статистичних аномалій за чотирма основними критеріями: однорідність граней, рівність довжин ребер, ідеальна сферичність та еквівалентність площ граней. Обґрунтовано причини вибору відповідних пошукових параметрів з математичної точки зору, згідно з теорією класичної геометрії та описової статистики. Подано короткі теоретичні відомості щодо використаних термінів і формул. Результатом дослідження є створена програмна модель, що дозволяє виконувати багатокритеріальний фільтр у вибірках даних для пошуку Платонових тіл. У підсумку роботи алгоритмом успішно ідентифіковано Платонові тіла із загального набору канонічних багатогранників і марковано шукані об'єкти на підсумковій діаграмі розсіювання. Встановлено, що Платонові тіла утворюють статистичні аномалії за всіма чотирма досліджуваними параметрами. Доведено, що розгляд правильних опуклих багатогранників крізь призму статистичних аномалій є дієвим підходом для їх автоматизованого розпізнавання у великих наборах даних. Отримані результати підтверджують перспективність поєднання методів обчислювальної геометрії та описової статистики у наукових дослідженнях. Запропоновані комплексні підходи можуть бути використані у задачах класифікації у комп'ютерному моделюванні, машинному навчанні, інженерії, архітектурі, фізиці, хімії тощо.

Ключові слова: правильні опуклі багатогранники, Платонові тіла, набір даних, детермінований відбір, багатокритеріальна фільтрація, нульова дисперсія, статистичні аномалії, формула Ейлера.

MARYNA MOROZOVA, OLENA SYDORENKO

STATISTICAL IDENTIFICATION OF PLATONIC SOLIDS IN LARGE DATASETS

The article is devoted to the development of an automated algorithm for the statistical identification of regular convex polyhedra (Platonic solids) in large datasets. An analysis of contemporary scientific studies addressing the search and recognition of spatial objects in high-dimensional data arrays is conducted. The research is based on methods of computational geometry, descriptive statistics, and data mining. A deterministic approach was selected for the implementation of the algorithm. The process of identifying regular convex polyhedra is carried out through the detection of statistical anomalies according to four principal criteria: uniformity of faces, equality of edge lengths, perfect sphericity, and equivalence of face areas. The reasons for selecting the corresponding search parameters are substantiated from a mathematical perspective, in accordance with the theory of classical geometry and descriptive statistics. Brief theoretical background on the applied terms and formulas is also presented. The result of the study is a developed software model that enables multicriteria filtering of data samples for the identification of Platonic solids. As a result, the algorithm successfully identifies Platonic solids from a general set of canonical polyhedra and marks the target objects on summary scatter plot. It is established that Platonic solids form statistical anomalies with respect to all four investigated parameters. It is demonstrated that considering regular convex polyhedra through the lens of statistical anomalies constitutes an effective approach to their automated recognition in large datasets. The obtained results confirm the promise of combining computational geometry and descriptive statistics in scientific research. The proposed integrated approaches can be applied to classification problems in computer modeling, machine learning, engineering, architecture, physics, chemistry, and related fields.

Keywords: regular convex polyhedra, Platonic solids, dataset, deterministic selection, multi-criteria filtering, zero variance, statistical anomalies, Euler's formula.

Вступ та постановка задачі. Одним з основних завдань сучасної обчислювальної геометрії є дослідження морфологічних властивостей просторових об'єктів. Серед них можна виділити особливу групу — правильні опуклі багатогранники, відомі також як Платонові тіла. Їхня виняткова просторова симетрія дозволяє використовувати ці об'єкти як еталонні і твірні для більш складних структур у багатьох галузях людської діяльності. У сучасних комп'ютерних науках правильні опуклі багатогранники і їхні характеристики вивчаються, здебільшого, за допомогою великих наборів даних, до яких можуть бути застосовані різні статистичні алгоритми.

Формула Ейлера, як універсальна властивість опуклих багатогранників, є недостатньою умовою для проведення класифікації високосиметричних об'єктів і подальшої диференціації Платонових тіл у великих наборах даних. Наявна в них кількість багатогранних структур призводить до хибнопозитивних результатів програмної перевірки базовими методами. У великих масивах виникає ситуація невизначеності, коли Платонові тіла важко розпізнати з-поміж інших, наприклад Архімедових тіл або тіл Джонсона. Тому процес морфологічного аналізу Платонових тіл потребує застосування специфічних критеріїв фільтрації. Це створює виклик для комп'ютерних систем, що потребують розробки алгоритмів пошуку, заснованих не лише на топологічних інваріантах, а і на інших характеристиках.

У статті описуються підходи до розв'язання задачі ідентифікації Платонових тіл у масивах даних великої розмірності на прикладі текстового набору Canonical Polyhedra від Wolfram Research. Об'єктом дослідження виступає вибірка з 2907 канонічних багатогранників з 4-9 гранями, серед яких виконано ідентифікацію наявних Платонових тіл на основі різних геометричних ознак. Здійснено спроби переходу від топологічного до статистичного дослідження цих об'єктів шляхом аналізу показників однорідності граней, варіативності довжин ребер, рівня сферичності вершин та еквівалентності площ граней.

Аналіз сучасних літературних джерел. Останні дослідження в комп'ютерній математиці відзначаються зростаючим інтересом до автоматизованих підходів у класифікації багатогранників. Однією з основних характеристик, що використовується у процесі диференціації, у сучасних роботах залишається формула Ейлера, що виступає універсальним інструментом для визначення різних видів просторових об’єктів [1]. Однак у контексті наборів великої розмірності, цей критерій може виявитися недостатнім, тому дослідники переходять до нових форм аналізу даних, наприклад за допомогою кривих та профілів Ейлера [2]. У напрямах, що стосуються 3D моделювання і комп'ютерного зору, дедалі більше уваги приділяється способам визначення симетрії у сітках об’єктів [3]. Автори робіт пропонують різні методи розпізнавання 3D моделей або оцінки рівня симетрії у них, зокрема через розрахунок чамферної відстані [4, 5]. Проблеми диференціації тіл у просторі розглядаються також через призму теорії графів, зокрема у питаннях автоматизованої класифікації об’єктів [6]. Однак, варто зазначити, що вищеназвані роботи стосуються, головним чином, дослідження 3D моделей об’єктів навколишнього середовища. Натомість у літературі останніх років налічується не так багато прикладів, присвячених проблемам розпізнавання суто геометричних фігур, що додатково зумовлює актуальність їх вивчення.

Частина робіт присвячена проблемам розуміння просторових форм за допомогою числових характеристик, зокрема при геометричному машинному навчанні [7]. Це може свідчити про потребу у коректних способах визначення різних типів просторових фігур для їхнього використання нейромережами. Проблеми декомпозиції та аналізу багатогранників частіше привертають увагу науковців і стають основою подальших досліджень [8]. В окремих роботах, присвячених перетворенням багатогранників, дедалі більше розглядаються питання строгості їхніх метричних характеристик [9]. Аналіз літературних джерел дозволяє виділити сучасні підходи, на які доцільно орієнтуватися під час процесу класифікації геометричних фігур у наборах даних. Ними, як приклад, можуть виступати оцінка рівня симетрії як еталон для виділення об’єктів або їхніх ознак [10]. В роботах, що охоплюють сучасну статистику, основним маркером ідентифікації об’єктів у великих наборах даних називають міру дисперсії [11].

Математичне обґрунтування критеріїв ідентифікації Платонових тіл. Дослідження правильних опуклих багатогранників (Платонових тіл) у обчислювальній геометрії вимагає розробки точних алгоритмів для класифікації цих об’єктів. Згідно теорії багатогранників, Платоновим тілом вважається фігура, всі грані якої є однаковими правильними багатокутниками, а в кожній вершині сходиться однакова кількість граней [12]. У тривимірному просторі існує лише 5 таких фігур: тетраедр (4 грані), гексаедр/куб (6 граней), октаедр (8 граней), додекаедр (12 граней), ікосаедр (20 граней) [13]. Усі вони характеризуються винятковою просторовою симетрією. Сучасні великі набори геометричних даних можуть містити тисячі просторових фігур, тому у дослідників існує необхідність виходу за межі базових методів класифікації цих об’єктів. Класично більшість підходів спирається на виділення топологічних інваріантів об’єктів [14]. Зокрема, у багатьох системах комп’ютерного моделювання над об’єктами виконується перевірка за допомогою формули Ейлера (V — вершини, E — ребра, F — грані) [14]:

$$V - E + F = 2 \qquad (1)$$

Обмеження лише формулою Ейлера може давати неточні результати, оскільки вона є універсальною для усіх видів опуклих багатогранників, які не мають наскрізних отворів [15]. Це означає її однаково успішне застосування до багатогранників різних груп: як до куба, так і до піраміди. Таким чином, використання лише характеристики Ейлера не може повною мірою допомогти у виділенні суто Платонових тіл серед інших подібних об’єктів. Для вирішенні цієї задачі необхідним є зміщення фокусу від топологічних характеристик до метричних з їхнім подальшим аналізом. Сучасні набори геометричних даних, такі як Canonical Polyhedra, вимагають розробки чітких правил ідентифікації вміщених в них об’єктів [16]. Існуючі бібліотеки обробки просторових даних Open3D або libigl здебільшого орієнтуються на візуальні, а не текстові, набори даних [17, 18]. Щоб відсіяти зайві об’єкти вибірки у Canonical Polyhedra і лишити виключно необхідні (Платонові тіла), доцільним є застосування методу детермінованого відбору. Для цього підходу у статті виділено 4 основні правила:

1. Однорідність граней. Усі грані об’єкта мають бути конгруентними правильними багатокутниками. Критерій вимагає, щоб поверхня фігури складалася лише з одного типу правильних багатокутників, що забезпечує локальну симетрію. Це найшвидший первинний фільтр задля відсіювання різних видів гібридних форм і зменшення вибірки для подальших обчислень [19]. Без нього у вибірку можуть потрапити багатогранні структури, що, не дивлячись на властивість сферичності, складаються з різних типів граней (наприклад, деякі Архімедові тіла: зрізаний ікосаедр тощо) [20].

2. Рівність довжин ребер. Усі ребра об’єкта мають бути однаковими. Критерій забезпечує метричну однорідність об’єкта, відсіюючи геометричні форми зі схожим типом граней (наприклад, допомагає відрізнити куб від паралелепіпеда, який не є Платоновим тілом, або виключити з пошуку Каталанові тіла).

3. Сферичність вершин. Усі вершини об’єкта мають лежати на поверхні єдиної описаної сфери. Геометрично це ключовий критерій, що відрізняє правильні багатогранники від просто опуклих [21]. Це дає змогу алгоритму відділяти від групи Платонових тіл специфічні випадки симетричних фігур (наприклад, деякі багатогранники Джонсона: трикутна біпіраміда тощо).

4. Еквівалентність площ граней. Площі усіх граней мають бути однаковими. Критерій гарантує, що поверхня шуканого об’єкта розподілена у просторі

рівномірно, що дозволяє алгоритму відсіювати деякі неопуклі форми (наприклад, зірчасті багатогранники Кеплера-Пуансо).

Синергія усіх 4 ознак дозволяє досягти автоматизованого розпізнавання цих об’єктів у вибірках і проводити строгий багатокритеріальний фільтр. Таким чином, пропонується розгляд Платонових тіл не за їхніми візуальними формами, а як статистичну вибірку складових частин.

Статистичні методи пошуку Платонових тіл у наборах даних. Основним статистичним методом, який доцільно застосовувати для розв’язання поставленої задачі, є фільтрація за нульовою дисперсією. Оскільки статистика дозволяє робити висновки щодо ступеня різнорідності елементів вибірки, параметри дисперсії і середньоквадратичного відхилення можуть використовуватися для представлення цих результатів. Сутність методу можна показати на прикладі розподілу об’єктів за критерієм 2 — метрикою середньої довжини ребра.

Математично обчислити середню довжину ребра (a_{avg}) багатогранника можна за формулою, у якій e_i — довжина конкретного ребра, а n — загальна кількість ребер:

$$a_{avg}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i \qquad (2)$$

Дізнатися, наскільки кожне ребро об’єктів вибірки відрізняється від обчисленого показника можна за допомогою середньоквадратичного відхилення σ:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i-a_{avg})^2} \qquad (3)$$

У випадку багатогранників, що не є Платоновими тілами, довжини ребер будуть різними, а отже показник $\sigma > 0$. Проте для Платонових тіл дисперсія буде строго нульовою, оскільки ребра таких фігур є абсолютно рівними ($e_1=e_2=e_3=\ldots=e_n=a_{avg}$). Фактично, з точки зору статистики, Платонові тіла завдяки властивості ідеальної симетрії будуть подаватися як аномалії [22]. Попереднє визначення властивостей об’єктів, що можуть бути аномальними, полегшує їхню ідентифікацію, оскільки на графіках розподілу вони перебуватимуть поза межами основної частини даних.

Алгоритмічна і програмна реалізації багатокритеріального фільтру Платонових тіл. Для реалізації описаного підходу використовувався набір даних Canonical Polyhedra, у якому кожен багатогранник описано набором числових характеристик. Серед доступних форматів набору доцільним є вибір JSON-формату завдяки його можливостям подання даних за принципом вкладеності, що дозволяє комплексно зберігати інформацію про багатогранники [23]. У таблиці 1 представлено характеристики багатогранників, задіяні у програмній частині. Часова складність алгоритму становить O(N), де N — загальна кількість вузлів (елементів) у структурі даних. Блок-схема алгоритму ідентифікації правильних опуклих багатогранників зображена на рисунках 1–2.

Таблиця 1 — Дані, що використані в алгоритмі статистичної ідентифікації Платонових тіл

Позначення змінної	**Зміст і характеристика змінної**
Вхідні дані	
FaceSides	Масив чисел. Містить кількість сторін кожної грані об’єкта.
DistinctEdgeLengths	Ціле число. Показник кількості ребер різної довжини у об’єкта.
VertexNormRatio	Дійсне число. Відношення відстаней від центра до вершин.
FaceAreaRatio	Дійсне число. Відношення площ граней.

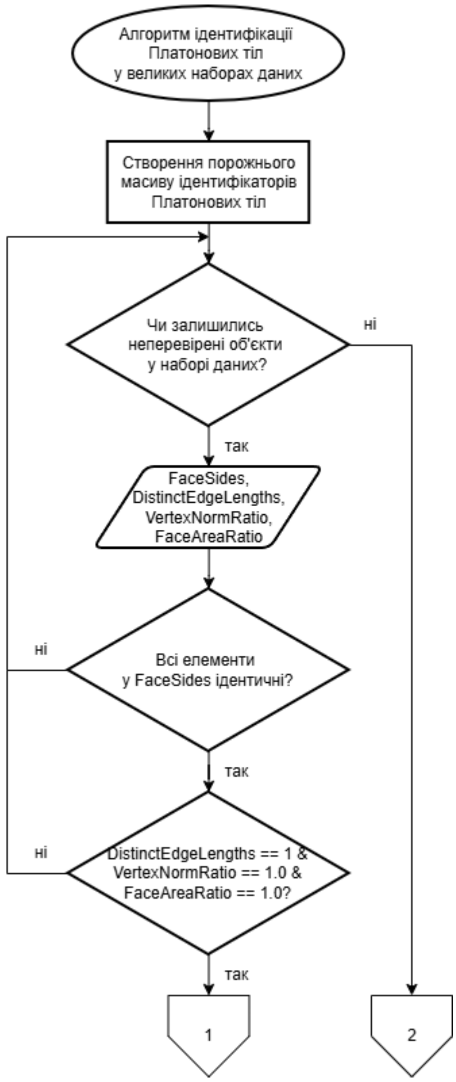

Рис. 1 — Алгоритм ідентифікації Платонових тіл у великих наборах даних (початок)

Рис. 2 — Алгоритм ідентифікації Платонових тіл у великих наборах даних (кінець)

Результати програмування та статистичні спостереження. Детермінований підхід до ідентифікації Платонових тіл у великих наборах даних дозволяє перейти від класичної задачі геометричного пошуку до задачі аналізу екстремальних значень. Результати дослідження подано у вигляді графіків на рисунку 3. Вони демонструють, що у наборі даних Canonical Polyhedra Платонові тіла складають приблизно 0.1% від загальної частини усіх об'єктів. У процесі обробки масиву даних, який складався з 2907 об'єктів, алгоритмом відфільтровано усі геометричні фігури, в яких дисперсія обраних у математичній моделі параметрів є вищою за нуль.

Представлення специфічних ознак шуканих об'єктів (у випадку статті — Платонових тіл) як аномалій дозволяє швидко ідентифікувати їх у масивах даних великої розмірності. Список Платонових тіл у наборі Canonical Polyhedra наведено у таблиці 2. Усього виявлено 3 Платонових тіла (оскільки у наборі Canonical Polyhedra вміщено багатогранники у діапазоні 4-9 граней, через що відсутні такі Платонові тіла як додекаедр та ікосаедр). Усі ідентифіковані фігури відповідають теорії класичної геометрії.

Таблиця 2 — Список ідентифікованих Платонових тіл у наборі даних

Назва фігури	ID у наборі даних	Кількість граней
Тетраедр	4_1	4
Гексаедр	6_1	6
Октаедр	8_1	8

Отриманий у результаті роботи програми графік є підсумковою діаграмою розсіювання. Горизонтальна вісь є списком усіх 2907 об'єктів з набору даних. Вертикальна вісь показує рівень відхилення від багатокритеріального фільтра. Кожна фігура у наборі показана у вигляді окремої точки певного кольору. Завдяки градієнтному забарвленню від блакитного до темно-синього видно основну хмару багатогранників, які поступово є все менш симетричними за 4 алгоритмічними критеріями. Платонові тіла при цьому є статистичними аномаліями і займають позицію абсолютної відповідності умовам фільтра (нульову позицію), тож автоматично позначаються програмою червоними точками. З візуалізації видно, що алгоритм вирішує задачу фільтрації об'єктів, різко відділяючи ідеально симетричні фігури (Платонові тіла) від основної маси.

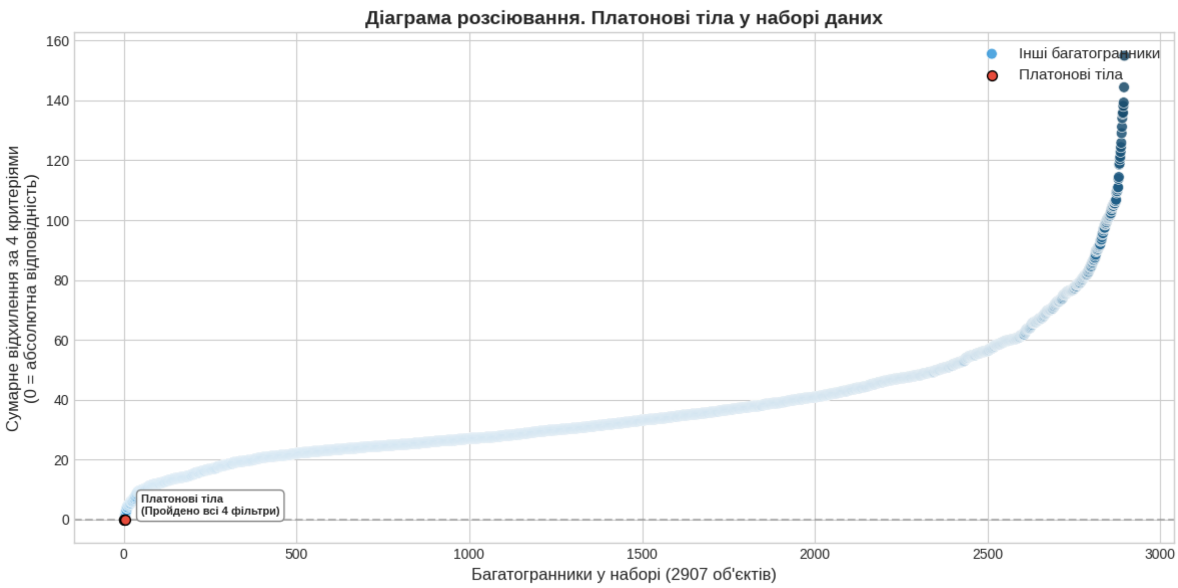

Рис. 3 — Результат візуалізації роботи алгоритма

Висновки. У статті вирішується науково-прикладне завдання, що полягає у теоретичній розробці, математичному обґрунтуванні та програмній реалізації детермінованого алгоритму для автоматизованої ідентифікації правильних опуклих багатогранників (Платонових тіл) у великих наборах даних. На основі поставленої мети доведено ефективність статистичних підходів у задачах обчислювальної геометрії. Встановлено, що при правильному виборі метричних характеристик для фільтрації, Платонові тіла формують у масивах ізольовані екстремальні кластери, що дозволяє їхню швидку ідентифікацію з-поміж інших об'єктів, в тому числі багатогранників різних видів. Наведений алгоритм може виступати інструментом швидкої генерації еталонних вибірок для нейронних мереж, які потребують безпомилкових даних для тренувань. Подальші дослідження полягають у: розширенні методології, порівняльному аналізі алгоритму з альтернативними методами класифікації і його програмній реалізації для більшої кількості класів багатогранних фігур, наприклад Архімедових або Каталанових тіл.

Інформація щодо наборів даних. Набори даних, використані у цьому дослідженні, є загальнодоступними. Дані розміщені за адресою: https://datarepository.wolframcloud.com/resources/Canonical-Polyhedra/.

Заява щодо фінансування та подяки. Це дослідження не отримувало зовнішнього фінансування.

Заява щодо конфлікту інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Заява щодо використання інструментів штучного інтелекту. Інструменти штучного інтелекту не використовувалися.

Список літератури

[1] A. Smith and V. Zavala, "The Euler characteristic: A general topological descriptor for complex data," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 154, art. no. 107463, 2021, doi: https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107463.

[2] P. Dłotko and D. Gurnari, "Euler characteristic curves and profiles: A stable shape invariant for big data problems," *GigaScience*, vol. 12, art. no. giad094, 2023, doi: https://doi.org/10.1093/gigascience/giad094.

[3] R.-W. Li *et al.*, "E3Sym: Leveraging E(3) invariance for unsupervised 3D planar reflective symmetry detection," in *Proc. IEEE/CVF Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV)*, Paris, France, Oct. 2023, pp. 14497–14507, doi: https://doi.org/10.1109/ICCV51070.2023.01337.

[4] M. A. Uy *et al.*, "Joint learning of 3D shape retrieval and deformation," in *Proc. IEEE/CVF Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, Nashville, TN, USA, Jun. 2021, pp. 11708–11717, doi: https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01154.

[5] N. Caytuiro and I. Sipiran, "Symmetrization of 3D generative models," *arXiv preprint arXiv:2512.18953*, 2025, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.18953.

[6] F. Teich, T. Lüddecke, and F. Wörgötter, "3D object classification via part graphs," in *Proc. 16th Int. Joint Conf. Comput. Vis., Imag. Comput. Graph. Theory Appl. (VISIGRAPP)*, Vienna, Austria, Feb. 2021, vol. 5, pp. 417–426, doi: https://doi.org/10.5220/0010232604170426.

[7] M. M. Bronstein *et al.*, "Geometric deep learning: Going beyond Euclidean data," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 34, no. 4, pp. 18–42, 2017, doi: https://doi.org/10.1109/MSP.2017.2693418.

[8] M.-C. Brandenburg, M. L. Grillo, and C. Hertrich, "Decomposition polyhedra of piecewise linear functions," in *Proc. Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR)*, Singapore, Apr. 2025.

[9] E. D. Demaine *et al.*, "Any Platonic solid can transform to another by O(1) refoldings," *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 113, art. no. 101995, 2023, doi: https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2023.101995.

[10] M. Zhu *et al.*, "E2PN: Efficient SE(3)-equivariant point network," in *Proc. IEEE/CVF Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, Vancouver, BC, Canada, Jun. 2023, pp. 1223–1232, doi: https://doi.org/10.1109/CVPR52729.2023.00124.

[11] S. Sullivant, *Algebraic Statistics*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2018.

[12] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York, NY, USA: Dover Publications, 1973.

[13] P. R. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1997.

[14] H. Edelsbrunner and J. L. Harer, *Computational Topology: An Introduction*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2010.

[15] S. L. Devadoss and J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2011.

[16] E. Pegg Jr., "Canonical Polyhedra," Wolfram Research. Available: https://datarepository.wolframcloud.com/resources/Canonical-Polyhedra/.

[17] Q.-Y. Zhou, J. Park, and V. Koltun, "Open3D: A modern library for 3D data processing," *arXiv preprint arXiv:1801.09847*, 2018, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.09847.

[18] A. Jacobson, D. Panozzo, et al. libigl: a simple C++ geometry processing library, https://libigl.github.io/.

[19] H. Zenil, N. A. Kiani, and J. Tegnér, "Symmetry and algorithmic complexity of polyominoes and polyhedral graphs," *arXiv preprint arXiv:1803.02186*, 2018, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.02186.

[20] Ö. Gelişgen and T. Ermiş, "Isometry group of truncated truncated cube and truncated truncated octahedron space," *Hagia Sophia J. Geom.*, vol. 7, no. 2, pp. 16–28, 2025.

[21] J. A. Diaz-Severiano *et al.*, "Symmetry in regular polyhedra seen as 2D Möbius transformations: Geodesic and panel domes arising from 2D diagrams," *Symmetry*, vol. 10, no. 9, art. no. 356, 2018, doi: https://doi.org/10.3390/sym10090356.

[22] W. McKinney, *Python for Data Analysis: Data Wrangling with pandas, NumPy, and Jupyter*, 3rd ed. Sebastopol, CA, USA: O'Reilly Media, 2022.

[23] P. Bourhis *et al.*, "JSON: Data model, query languages and schema specification," in *Proc. 36th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI Symp. Principles Database Syst. (PODS)*, Chicago, IL, USA, May 2017, pp. 123–135, doi: https://doi.org/10.1145/3034786.3056120.

References (transliterated)

[1] A. Smith and V. Zavala, "The Euler characteristic: A general topological descriptor for complex data," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 154, art. no. 107463, 2021, doi: https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107463.

[2] P. Dłotko and D. Gurnari, "Euler characteristic curves and profiles: A stable shape invariant for big data problems," *GigaScience*, vol. 12, art. no. giad094, 2023, doi: https://doi.org/10.1093/gigascience/giad094.

[3] R.-W. Li *et al.*, "E3Sym: Leveraging E(3) invariance for unsupervised 3D planar reflective symmetry detection," in *Proc. IEEE/CVF Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV)*, Paris, France, Oct. 2023, pp. 14497–14507, doi: https://doi.org/10.1109/ICCV51070.2023.01337.

[4] M. A. Uy *et al.*, "Joint learning of 3D shape retrieval and deformation," in *Proc. IEEE/CVF Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, Nashville, TN, USA, Jun. 2021, pp. 11708–11717, doi: https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01154.

[5] N. Caytuiro and I. Sipiran, "Symmetrization of 3D generative models," *arXiv preprint arXiv:2512.18953*, 2025, doi:

https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.18953.

[6] F. Teich, T. Lüddecke, and F. Wörgötter, “3D object classification via part graphs,” in *Proc. 16th Int. Joint Conf. Comput. Vis., Imag. Comput. Graph. Theory Appl. (VISIGRAPP)*, Vienna, Austria, Feb. 2021, vol. 5, pp. 417–426, doi: https://doi.org/10.5220/0010232604170426

[7] M. M. Bronstein *et al.*, “Geometric deep learning: Going beyond Euclidean data,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 34, no. 4, pp. 18–42, 2017, doi: https://doi.org/10.1109/MSP.2017.2693418.

[8] M.-C. Brandenburg, M. L. Grillo, and C. Hertrich, “Decomposition polyhedra of piecewise linear functions,” in *Proc. Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR)*, Singapore, Apr. 2025.

[9] E. D. Demaine *et al*., “Any Platonic solid can transform to another by O(1) refoldings,” *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 113, art. no. 101995, 2023, doi: https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2023.101995.

[10] M. Zhu *et al*., “E2PN: Efficient SE(3)-equivariant point network,” in *Proc. IEEE/CVF Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, Vancouver, BC, Canada, Jun. 2023, pp. 1223–1232, doi: https://doi.org/10.1109/CVPR52729.2023.00124.

[11] S. Sullivant, *Algebraic Statistics*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2018.

[12] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York, NY, USA: Dover Publications, 1973.

[13] P. R. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1997.

[14] H. Edelsbrunner and J. L. Harer, *Computational Topology: An Introduction*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2010.

[15] S. L. Devadoss and J. O’Rourke, *Discrete and Computational Geometry*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2011.

[16] E. Pegg Jr., “Canonical Polyhedra,” Wolfram Research. Available: https://datarepository.wolframcloud.com/resources/Canonical-Polyhedra/

[17] Q.-Y. Zhou, J. Park, and V. Koltun, “Open3D: A modern library for 3D data processing,” *arXiv preprint arXiv:1801.09847*, 2018, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.09847.

[18] A. Jacobson, D. Panozzo, et al. libigl: a simple C++ geometry processing library. https://libigl.github.io/

[19] H. Zenil, N. A. Kiani, and J. Tegnér, “Symmetry and algorithmic complexity of polyominoes and polyhedral graphs,” *arXiv preprint arXiv:1803.02186*, 2018, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.02186.

[20] Ö. Gelişgen and T. Ermiş, “Isometry group of truncated truncated cube and truncated truncated octahedron space,” *Hagia Sophia J. Geom.*, vol. 7, no. 2, pp. 16–28, 2025.

[21] J. A. Diaz-Severiano *et al*., “Symmetry in regular polyhedra seen as 2D Möbius transformations: Geodesic and panel domes arising from 2D diagrams,” *Symmetry*, vol. 10, no. 9, art. no. 356, 2018, doi: https://doi.org/10.3390/sym10090356.

[22] W. McKinney, *Python for Data Analysis: Data Wrangling with pandas, NumPy, and Jupyter*, 3rd ed. Sebastopol, CA, USA: O’Reilly Media, 2022.

[23] P. Bourhis *et al*., “JSON: Data model, query languages and schema specification,” in *Proc. 36th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI Symp. Principles Database Syst. (PODS)*, Chicago, IL, USA, May 2017, pp. 123–135, doi: https://doi.org/10.1145/3034786.3056120.

Надійшла (received) 14.04.2026
Прийнята до друку (accepted) 28.05.2026
Опублікована (published) 29.05.2026

Відомості про авторів та їх внесок / About The Authors And Their Contributions

***Марина Морозова** (Maryna Morozova)* — Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірантка кафедри геометричного моделювання та комп’ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057)-707-64-31; ORCID: https://orcid.org/0009-0004-2795-9315; e-mail: Maryna.Morozova@infiz.khpi.edu.ua (концептуалізація, методологія, збір та обробка даних, написання тексту)

***Олена Сидоренко** (Olena Sydorenko)* — кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри геометричного моделювання та комп’ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057)-707-64-31; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5506-498X; e-mail: Olena.Sydorenko@khpi.edu.ua (перевірка результатів, рецензування та редагування)

Усі автори ознайомилися з остаточною версією рукопису та погодилися з її публікацією.