

*Г. Ю. МАРТИНЕНКО*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНА СИМУЛЯЦІЯ ЯВИЩ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ВІБРОГАСНОЇ ТА ВІБРОІЗОЛЮЮЧОЇ КОМПЛЕКСНОЇ ПАСИВНО-АКТИВНОЇ МАГНІТНОЇ ОПОРИ З ПОВОРОТНИМ АБО ОБЕРТОВИМ ВЕРТИКАЛЬНИМ ШТОК-ВАЛУМ

У статті розглядається спеціалізоване оригінальне комп'ютерне програмне забезпечення для розрахунку та аналізу параметрів динаміки шток-валу віброгасної та віброізолюючої комплексної повністю магнітної опори пасивно-активного типу з урахуванням різних типів магнітних елементів. Об'єктом дослідження є динаміка шток-валу, на якому віброізолюваний вантаж може розташовуватися зверху або знизу. Основною метою є моделювання та візуалізація нелінійних явищ динаміки цього шток-валу з урахуванням можливості його повороту або обертання, а також взаємопов'язаності електромагнітних та механічних керованих процесів. Представлення результатів у графічному та текстовому вигляді адаптовано для визначення динамічних характеристик та оцінки стійкості руху в нерезонансних, навколорезонансних, резонансних та робочому віброізолюваному або віброгасному режимах. Математичний опис використовує аналітичну модель. Вона базується на диференціальних рівняннях Лагранжа-Максвелла у формі, подібній до рівнянь Рауса в механіці. При цьому реалізовано врахування нелінійних силових та жорсткісних характеристик як радіальних пасивних магнітних елементів опирання, так і осьового керованого електромагнітного елемента опирання в залежності від його параметрів та параметрів системи керування. Реалізація комп'ютерного моделювання та візуалізація нелінійних явищ динаміки шток-валу в магнітному полі була виконана за допомогою системи комп'ютерної математики у вигляді нелінійної імітаційно-обчислювальної моделі динаміки віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори (ІОМ-ДВГВІМО-Н). Ця імітаційна модель має можливість побудови віброграм, спектрограм, траєкторій руху, фазових траєкторій та стробоскопічних перерізів Пуанкаре, а також тривимірних спектрів, амплітудно-частотних характеристик та залежностей амплітуд суб- та супергармонік від швидкості обертання та/або динамічного збудження для вибраних точок шток-валу. Верифікацію ІОМ-ДВГВІМО-Н було проведено шляхом порівняння симуляційних обчислювальних результатів з експериментальними даними для лабораторно-експериментального зразка віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори.

**Ключові слова:** віброгасна та віброізоляційна опора, пасивно-активний магнітний підвіс, динаміка шток-валу, нелінійні процеси та явища, математичне та комп'ютерне моделювання, імітаційно-обчислювальна модель.

*G. YU. MARTYNYENKO*

## MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER SIMULATION OF NONLINEAR DYNAMICS PHENOMENA IN A COMPLEX PASSIVE-ACTIVE VIBRATION-DAMPING AND VIBRATION-ISOLATING MAGNETIC SUPPORT WITH A SWIVELING OR ROTATING VERTICAL ROD-SHAFT

The article discusses specialized original computer software designed for calculating and analyzing the dynamics parameters of the rod-shaft in a vibration-damping and vibration-isolating complex fully magnetic support of the passive-active type, accounting for various types of magnetic elements. The object of the study is the dynamics of the rod-shaft, where a vibration-isolated real weight can be positioned either at the top or bottom. The primary goal is the modeling and visualization of nonlinear dynamics phenomena of this rod-shaft, considering the possibility of its swiveling or rotation, as well as the coupling of electromagnetic and mechanical controlled processes. The presentation of results in graphical and textual formats is adapted for determining dynamic characteristics and evaluating motion stability in non-resonant, near-resonant, resonant, and operational vibration-isolated or vibration-damping modes. The mathematical description utilizes an analytical model based on Lagrange-Maxwell differential equations in a form similar to Routh's equations in mechanics. This approach accounts for the nonlinear force and stiffness characteristics of both radial passive magnetic support elements and the axial controlled electromagnetic support element, depending on its parameters and the control system parameters. The implementation of computer modeling and visualization of the rod-shaft nonlinear dynamics phenomena in a magnetic field was carried out using a computer mathematics system in the form of a nonlinear simulation-computational model of the dynamics of a vibration-damping and vibration-isolating complex passive-active magnetic support (SCM-DVDVIMS-N). This simulation model enables the generation of vibrograms, spectrograms, motion trajectories, phase portraits, and stroboscopic Poincaré sections, as well as three-dimensional spectra, frequency response characteristics, and dependencies of sub- and superharmonic amplitudes on the rotation speed and/or dynamic excitation for selected points of the rod-shaft. Verification of SCM-DVDVIMS-N was performed by comparing simulation results with experimental data obtained from a laboratory prototype of the vibration-damping and vibration-isolating complex passive-active magnetic support.

**Keywords:** vibration-damping and vibration-isolating support, passive-active magnetic suspension, rod-shaft dynamics, nonlinear processes and phenomena, mathematical and computer modeling, simulation-computational model.

**Вступ.** Питання зниження рівня шкідливих вібрацій за рахунок віброгасіння та/або віброізоляції для забезпечення стабільної роботи конструктивних елементів залишається одним із найбільш критичних у сучасному машинобудуванні, аерокосмічній галузі та приладобудуванні [1-3]. Як було показано в попередніх дослідженнях [4], концепція віброгасної та

віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори на основі повного магніто-електромагнітного підвісу ротора [5, 6] відкриває широкі можливості для захисту вразливих вузлів та елементів конструкцій розташованих на пропонуваній опорі від моно- та полігармонічних збуджень різної природи.

© Г. Ю. Мартиненко 2025



**Дослідницька стаття:** Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Така система, поєднуючи в собі властивості безконтактності та керованості, дозволяє ефективно реалізувати принципи енергонезалежної магнітної левітації в радіальних напрямках та активного демпфування в осьовому напрямку із реалізацією ділянок квазінульової жорсткості на силових характеристиках [7]. Тобто, ця опора поєднує в собі можливості пасивної та активної віброізоляції [8-10], а також керованого віброгасіння [11].

Однак, перехід від концептуальної схеми до практичного впровадження вимагає глибокого аналізу динамічної поведінки основного виконавчого елемента – вертикального штоку-валу, з яким з'єднаний віброзахисний вантаж. Цей елемент разом з повним пасивно-активним магнітним підвісом є складною нелінійною мехатронною системою, де механічний рух штоку-валу (вертикальні переміщення разом з обертальним рухом або поворотом) тісно взаємопов'язаний з електромагнітними процесами в підвісі. Врахування нелінійної природи магнітних сил, особливо в умовах значних динамічних збуджень, є критично важливим для оцінки стійкості системи в резонансних та навоколорезонансних режимах.

Традиційні підходи до моделювання подібних систем, що базуються на універсальних чисельних пакетах загального призначення, наприклад, заснованих на застосуванні методу скінченних елементів (МСЕ) [12], часто виявляються недостатньо гнучкими для розв'язання специфічних задач динаміки з активним магнітним керуванням. Це пов'язано з необхідністю одночасного розв'язання зв'язаних задач електромагнетизму та механіки в нелінійній постановці при збереженні високої точності та прийнятної часу розрахунку. На відміну від числових методів, аналітичне моделювання дозволяє не лише отримати кількісні оцінки [13], а й якісно дослідити природу нелінійних процесів: виявити зони біфуркацій, виникнення суб- та супергармонічних коливань та резонансів, а також побудувати фазові портрети руху. Окрім того, відносна швидкість багатоваріантного аналізу дає можливість обґрунтованого вибору раціональних або, навіть, оптимальних параметрів системи, що забезпечують потрібний рівень віброгасіння та віброізоляції.

Дана стаття є розвитком представленої раніше концепції та присвячена розробці математичної моделі та спеціалізованого програмного забезпечення для аналізу нелінійної динаміки штоку-валу віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори. В основу математичного апарату пропонується покласти аналітичну модель, що базується на диференціальних рівняннях Лагранжа-Максвелла у формі Рауса. Це дозволяє компактно, але повно описати взаємодію механічної та електротехнічної підсистем, враховуючи зворотний зв'язок у системі керування. При цьому імітаційно-обчислювальна модель має забезпечувати повний цикл візуалізації динамічних процесів – від побудови віброграм до аналізу перерізів Пуанкаре, що є

необхідним для комплексної оцінки ефективності віброзахисту в широкому діапазоні робочих частот.

**Огляд літературних джерел інформації за тематикою.** Сучасний етап розвитку прецизійного машинобудування і складної техніки характеризується фундаментальним переходом від лінійних концепцій проектування до використання суттєво нелінійних явищ для покращення експлуатаційних характеристик. Роторні системи з безконтактним підвісом, де магнітні опори відіграють одну з ключових ролей при такому переході, є яскравим прикладом. При цьому особливої уваги набувають пасивно-активні магнітні системи підвісу, призначені для вертикальних роторів. Саме на такому принципі заснована пропонується віброгасна та віброізолююча комплексна пасивно-активна магнітна опора, зображена на рис. 1 [4].

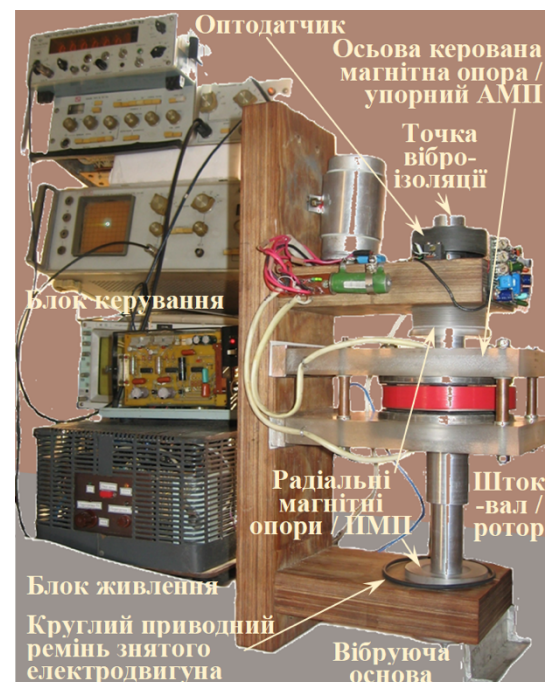


Рис. 1 – Лабораторно-експериментальна установка прототипу віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори

В цьому випадку вертикальна орієнтація штоку-валу вносить специфічні корективи у динаміку системи: необхідність постійної керованої компенсації гравітаційної складової, вплив гіроскопічних моментів на стабільність прецесійного руху при можливому обертанні штоку-валу з корисним вантажем та складність розв'язки радіальних і осьових коливань. Але в той же час поєднання пасивних елементів (постійні магніти для розвантаження ваги або підтримки в певному напрямі) та активних контурів (електромагніти для стабілізації та демпфування) дозволяє створювати енергоефективні гібридні системи. Однак, реалізація в керованих елементах ефекту квазінульової жорсткості для віброізоляції на низьких частотах перетворює такі системи на складні об'єкти з нелінійною динамікою. З огляду на ці особливості розглянутої мехатронної системи можна

дійти висновку, що підходи до симуляції динамічних процесів в ній корелюють з підходами роторної динаміки систем з магнітними підшипниками.

Аналіз сучасного стану проблеми свідчить про стійку тенденцію до інтеграції пасивних та активних методів керування динамікою роторних систем. Як зазначається у новітніх дослідженнях, гібридні магнітні підшипники, що поєднують постійні магніти для створення струму зміщення та електромагніти для активної стабілізації, стають домінуючим рішенням для високошвидкісних застосувань завдяки зменшеному енергоспоживанню та підвищеній надійності. Проте, як справедливо вказується в роботі [15], перехід до модульних та складних конфігурацій підвісу вимагає принципово нових підходів до пусконаладження та ідентифікації параметрів системи, оскільки традиційні лінійні математичні моделі не здатні адекватно описати поведінку ротора в критичних режимах.

Особливу увагу дослідників зараз також привертає концепція квазінульової жорсткості (КНЖ), яка показана на рис. 2 і є ключовим елементом досліджуваної нами опори. У роботах останніх років розглядаються різноманітні механізми реалізації КНЖ, зокрема, з використанням комбінації газових, магнітних та металевих пружин для досягнення наднизьких частот власних коливань. Так, в роботі [16] запропоновано нові біаксіальні структури для віброізоляції, проте їхні моделі здебільшого зосереджені на поступальних рухах і, звісно, не враховують гіроскопічних ефектів, що, наприклад, можуть виникати при обертанні шток-валу як елемента системи. Вагомий внесок у розвиток теорії КНЖ зроблено у роботі [17] дослідженням компактних магнітних ізоляторів з викривленими пружинами для невизначених навантажень та у роботі [18], в якій розроблено методику керування зоною квазінульової жорсткості на основі синтезу нелінійних магнітних сил. Однак, більшість робіт розглядають віброізоляцію як окрему задачу, відірвану від загальної динаміки, наприклад, обертового валу.

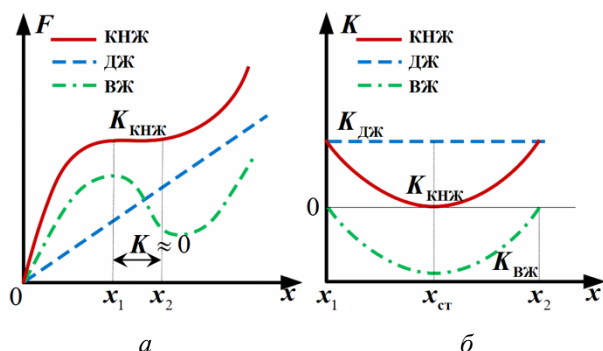


Рис. 2 – Принцип дії віброізолятора КНЖ з елементами додатної та від'ємної жорсткості (ДЖ та ВЖ) – залежності сили  $F$  – а та жорсткості  $K$  – б від переміщення  $x$

Питання математичного моделювання нелінійної динаміки таких систем залишається відкритим. Складні явища, такі як біфуркації та хаотичні рухи в магнітних підшипниках, були предметом дослідження

у багатьох роботах. Зокрема, в [19] проаналізовано вплив руху фундаменту на стабільність активних магнітних підшипників, виявивши зони динамічної нестійкості. В [20] автори розширили розуміння нелінійного керування, врахувавши ефекти позитивної та негативної жорсткості. Тим не менш, з огляду метаматеріалів в [21] для пасивної віброізоляції, можна зробити висновок, що існує дефіцит комплексних моделей складних систем, на кшталт тих, які одночасно описують різні явища, наприклад, електромагнітні керовані процеси та просторовий рух твердого тіла, як у нашому випадку.

Саме тому актуальним залишається питання адекватного вибору математичного апарату. Хоча числовий метод скінчених елементів широко використовується для розрахунку магнітних полів, для задач динаміки він часто є занадто ресурсомістким. В роботі [22] запропоновано універсальну динамічну модель для роторів з великим ексцентриситетом, але вона не враховує специфіку керування струмами в індуктивностях активного підвісу. У роботі [23] розглянуто вплив часових затримок у контурі керування, що є критичним для стійкості, але дослідження обмежене спрощеною геометрією ротора.

Специфічні алгоритми керування для гібридних підшипників, такі як адаптивне несингулярне термінальне ковзне керування, запропоновані в роботі [24], демонструють високу ефективність, але вимагають точних аналітичних моделей об'єкта. В [25] розроблено стратегію керування на основі покращеного активного відкидання збурень, що підтверджує тренд на використання складних нелінійних регуляторів. Окремо можна виділити пласт досліджень, присвячених пасивним і активним віброгасникам та віброізоляторам [26, 27], а також системам з валами, як в роботі [28], де розглянуто податливі ізолятори для крутильних коливань.

Проте, можна зробити висновок, що жодна з розглянутих робіт не пропонує цілісного підходу до моделювання складної віброгасної та віброізолюючої системи, на кшталт «шток-валу в повному магнітному підвісі», як єдиної електромеханічної системи з можливістю повороту та обертання, що підтверджує наукову новизну цього дослідження. Розробка спеціалізованого програмного забезпечення, що ґрунтується на математичній моделі, яка базується на рівняннях Лагранжа-Максвелла, дозволить усунути цей методологічний розрив, забезпечивши інструментарій для проектування високоефективних пасивно-активних опор нового покоління.

**Мета та об'єкт досліджень.** Огляд літератури свідчить про універсальність сучасних програмних систем САЕ. Але їх застосування для досліджуваної системи не допускає адекватного взаємозв'язаного врахування механічних і керованих електромагнітних процесів. Крім того, швидкий розрахунок миттєвих значень магнітних сил в пасивних і активних магнітних елементах опирання стає складним у реалізації та є дуже затратним за ресурсами та часом.

Це практично унеможливило швидке проведення варіантних розрахунків для вибору необхідних параметрів системи, а також розв'язання задач оптимального вибору. У цьому випадку повне врахування затримки струму, спричиненої індуктивністю котушок, а також затухання, пов'язаного з наявністю активних опорів у їх колах, є дуже складною, а в деяких випадках практично нерозв'язною задачею. Крім того, врахування закону керування, який залежить від вектора-стовпця стану системи, тобто узагальнених координат, швидкостей та струмів в обмотках електромагнітів, також є надскладною задачею. Тому метою роботи є розробка аналітичної моделі динаміки шток-валу запропонованої віброгасної та віброізолюючої магнітної опори (рис. 1) з врахуванням взаємопов'язаності електромагнітних і механічних процесів, а також заснованих на ній засобів комп'ютерної симуляції. Це є першим кроком до ретельного вивчення можливостей віброгасіння та віброізоляції для корисних вантажів розміщених на шток-валу цієї комплексної магнітної опори.

Об'єктом досліджень є динаміка вертикального шток-валу віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори з поворотним або обертовим вертикальним валом з урахуванням взаємопов'язаних електромагнітних та механічних керованих процесів. У дослідженні розглядається повне магнітне підвішування шток-валу у двох радіальних пасивних постійних магнітних підшипниках (ППМП1, 2) з двох магнітних кілець зі сплаву NdFeB з осьовим намагніченням та однієї керованої осьової магнітної опори (КОМО), яка являє собою осьовий активний магнітний підшипник (АМП3) з осердями броньового типу. При цьому побудова математичного апарату для опису динамічних процесів у системі виконується для вихідного (рис. 1) та модифікованого (рис. 3) конструктивних варіантів комплексної пасивно-активної магнітної опори з поворотним або обертовим вертикальним шток-валом.

Модифікований варіант включає в себе основу 1 з чотирма стійками 2 і 3 для кріплення нерухомих кілець радіальних ППМП 4 і статорів осьового АМП 5, а також шток-вал з дюралюмінію 6, на якому розміщено диск осьового АМП 7 з феромагнітного матеріалу, кільцеві постійні магніти радіальних ППМП і диск 8 системи реєстрації (вимірювання). Маса шток-валу  $\sim 2,7$  кг. На валу може бути розміщений віброізолюємий вантаж 9, на основі сервоповідня або електродвигун 10 (за функціональної потреби для вантажу поворотного або обертового руху), а на стійках радіальних ППМП – оптичні датчики системи вимірювання осьового положення ротора 11. Статори осьового АМП виконані зі сталі, кожен з двома полюсами – внутрішнім і зовнішнім. Між полюсами статорів АМП в циліндричних пазах розміщені обмотки керування. У центральному положенні ротора центри мас рухомих і нерухомих кільцевих магнітів збігаються, а диск знаходиться посередині між статорами. В порівнянні з

прототипним варіантом (рис. 1) тут внесені зміни щодо місця розташування точки виміру осьового положення шток-валу, яка перенесена з його верхньої в середню частину для забезпечення розміщення корисного вантажу зверху або знизу.

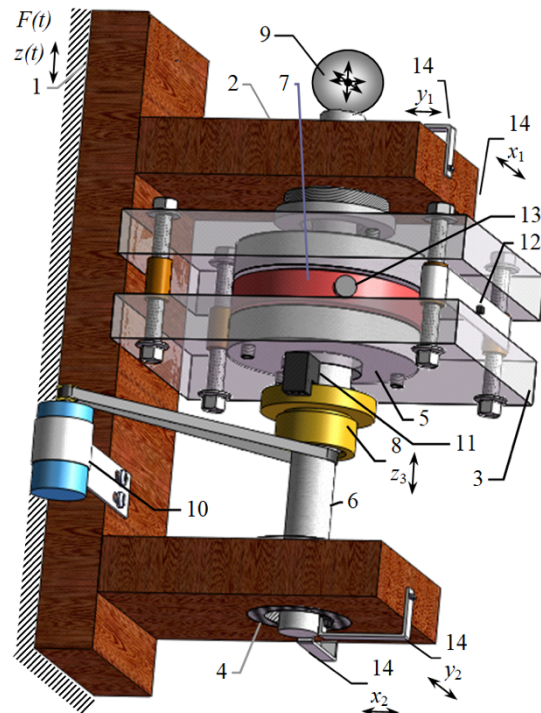


Рис. 3 – Модель модифікованої конструкції віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори з поворотним/обертовим вертикальним шток-валом

Структурна та розрахункова схема шток-валу комплексної магнітної опори в пасивно-активному магнітному підвісі показана на рис. 4. Тут введено просторову фіксовану ортогональну систему координат  $O^*xyz$ . Її вісь  $O^*z$  проходить через центри радіальних ППМП. Точка  $C$  – центр мас,  $m$  – маса валу,  $J_x$ ,  $J_y$ , та  $J_z$  – основні центральні моменти інерції;  $e_x=e_1$  та  $e_y=e_2$  ( $e^2=e_1^2+e_2^2$ ) – лінійні, тоді як  $\gamma_x=\gamma_1$  та  $\gamma_y=\gamma_2$  – параметри кутового дисбалансу. Точки  $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ , та  $O_3$  розташовані на осі жорсткості валу, причому  $O$  знаходиться в одній площині з  $C$  (перпендикулярно до осі);  $O_1$ ,  $O_2$  та  $O_3$  – центри радіальних опорних перерізів ППМП1, 2 та осьового АМП3. Зазори в ППМП1, 2 та АМП3 дорівнюють  $\delta_{r1}$ ,  $\delta_{r2}$ , та  $\delta_a$  відповідно. В залежності від функціонального призначення комплексної магнітної опори, вал може розглядатись як неповоротний (функціонал 1), такий, що може повертатись на обмежений кут в обох напрямках (функціонал 2), і такий, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (функціонал 3). Наприклад, поворотний або обертовий рух може бути функціонально необхідним, якщо в якості корисного віброізолюваного вантажу розглядається поворотна антена або радар.

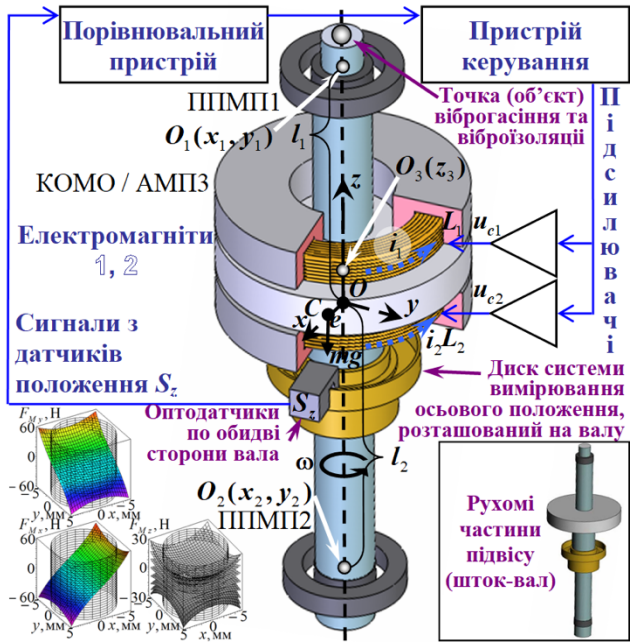


Рис. 4 – Структурна та розрахункова схема комплексної магнітної опори з системою керування осьовим положенням шток-валу в КОО/АМПЗ та силові характеристики ШПМП

Оскільки вал при жодному з функціональних використань не може бути деформівним, то для визначення положення жорсткого шток-валу в дослідженні пропонується використовувати шість узагальнених координат або п'ять та обертання. Таким чином, для опису просторового положення шток-валу вводиться вектор узагальнених механічних координат:  $\mathbf{q}_M = \{x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}$ , де  $x_0, y_0$  – лінійні зміщення центру мас у горизонтальній площині;  $z_0$  – вертикальне зміщення (напрям активного керування);  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  – кутові відхилення (поворот) навколо відповідних осей, зокрема, кут власного обертання шток-валу може відтворювати обертальний рух  $\theta_z = \omega t$ . У випадку, коли розглядається обертання, може використовуватися друга група узагальнених координат  $\mathbf{q}_M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, z_3\}$  – координат точок  $O_1, O_2, O_3$  (див. рис. 4). Електромагнітна підсистема описується вектором узагальнених електричних координат (зарядів)  $\mathbf{q}_E$  або, що зручніше для даного класу задач, струмами в обмотках керування  $i_{1,2} = q_{E,1,2}$  (див. рис. 4).

**Математичне моделювання динаміки шток-валу комплексної магнітної опори.** Враховуючи взаємопов'язаний характер механічних та електромагнітних процесів, математична модель будується на основі рівнянь Лагранжа-Максвелла. Для електромеханічних систем із зосередженими параметрами, де можна виділити енергію магнітного поля, ці рівняння доцільно записати у формі, подібній до рівнянь Рауса.

Для даної електромеханічної системи можуть бути використані такі рівняння Лагранжа-Максвелла:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T+W_C)}{\partial q_j} + \frac{\partial(\Pi+V)}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, (j=1\dots M); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial W_C}{\partial i_k} + \frac{\partial D_E}{\partial i_k} + \frac{\partial V}{\partial \chi_k} = E_k, (k=1\dots N), \end{cases} \quad (1)$$

де  $T$  – кінетична енергія;  $\Pi$  – потенційна енергія;  $q_j$  – узагальнені механічні координати  $q_{M0}$  або  $q_M$ ;  $D$  – дисипативна функція;  $Q_j$  – непотенційні узагальнені сили;  $M$  – число узагальнених механічних координат;  $W_C$  – коенергія магнітного поля;  $D_E$  – електрична дисипативна функція;  $V$  – енергія електричного поля;  $E_k$  – алгебраїчна сума сторонніх електрорушійних сил;  $i_k$  – контурні струми;  $\chi_k$  – заряди конденсаторів;  $N$  – число замкнутих нерозгалужених контурів, причому:

$$W_C = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N i_k i_s \int_{\mu} B_k B_s dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N L_{ks} i_k i_s, \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \chi_k^2 \int_{\Omega_k} \epsilon E_k^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\chi_k^2}{C_k}, \quad (3)$$

$$D_E = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N r_{ks} i_k i_s, \quad (4)$$

де  $B_k$  – магнітні індукції магнітних кіл;  $L_{ks}$  – коефіцієнти індукції електромагнітних ланцюгів;  $\epsilon$  – діелектрична стала;  $C_k$  – ємності конденсаторів;  $r_{ks}$  – активні опори.

У разі, коли струми провідності замкнуті і в електричних гілках відсутні конденсатори, електромеханічні системи, крім рівнянь Лагранжа-Максвелла (1), можуть описуватися рівняннями, аналогічними рівнянням Рауса в механіці:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + Q_j, (j=1,\dots,M); \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^N r_{Cs} \frac{\partial W}{\partial \Psi_s} = E_k, (k=1,\dots,N), \end{cases} \quad (5)$$

де  $W$  – енергія магнітного поля;  $\Psi_k$  – потоки індукції (потокозчеплення);  $r_{Cs}$  – активні опори електричних контурів;  $E_k = u_k(t, q_M, \dot{q}_M, i)$  – напруга на обмотках електромагнітів (згідно закону керування), причому:

$$\begin{aligned} W &= W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M); \quad \Psi_k = \frac{\partial W}{\partial i_k} = \sum_{s=1}^N L_{ks} i_s; \\ i_s &= \frac{\partial W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M)}{\partial \Psi_s} = \sum_{k=1}^N L_{ks}^{-1} \Psi_k \quad (s=1, \dots, N), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $L_{ks} = L_{ks}(q_1, \dots, q_M)$  – коефіцієнти само- і взаємодукції контурів;  $L_{ks}^{-1}$  – елементи матриці зворотної до матриці з коефіцієнтами  $L_{ks}$ .

В якості електричних узагальнених координат можуть використовуватись як потокозчеплення  $\Psi_k$ , так і пов'язані з ними струми в контурах  $i_k$ . Тому можна використовувати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_{m_j} + Q_j, (j=1, \dots, M); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{i}_k} + r_{Ck} i_k = u_k(t, \mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M \mathbf{i}), (k=1, \dots, N), \end{cases} \quad (7)$$

Якщо розглянути практичне застосування цих рівнянь для опису динаміки шток-валу комплексної магнітної опори (рис. 4), то потрібно враховувати всі особливості її функціонального застосування та місця розміщення вантажу. Наприклад, для формування системи рівнянь у найскладнішому функціональному варіанті 3, тобто для обертового шток-валу [14], потрібно записати вирази проєкцій кутової швидкості тіла  $\omega$  на пов'язані з тілом осі і вирази проєкцій на ці ж осі проєкцій вектору швидкості  $v_0$  полюса  $O$ , потім врахувати проєкції радіус-вектору  $OC$  центру інерції валу в системі рухомих осей, що мають початок в полюсі  $O$  на ті ж осі, і після цього виконати перехід до нерухомої системи координат  $Oxuz$ , а для спрощення можна зберегти нелінійності в записах, замінивши тригонометричні функції степеневими рядами із збереженням членів, наприклад, до третього порядку. Запис виразів  $T$ ,  $\Pi$ ,  $W$  через узагальнені координати  $q_m$  та врахування збуджувальних сил, обумовлених власною незрівноваженістю жорсткого шток-валу приводить до системи семи диференціальних рівнянь з огляду на наступні міркування.

Якщо енергія магнітного поля КОМО/АМПЗ є  $W=W(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3, \Psi_{c1}, \Psi_{c2})$ , то струми в обмотках його котушок  $i_{c1}$ ,  $i_{c2}$  зв'язані з повними магнітними потоками через контури котушок  $\Psi_{c1}$ ,  $\Psi_{c2}$  (потокозчепленнями обмоток) наступними виразами:

$$i_{c1,2} = \frac{\partial W(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3, \Psi_{c1}, \Psi_{c2})}{\partial \Psi_{c1,2}}. \quad (8)$$

Введемо деякі позначення для інерційних і гіроскопічних коефіцієнтів:

$$\begin{cases} m_{11} = (ml_2^2 + J_1)/l^2; m_{12} = (ml_1 l_2 - J_1)/l^2; \\ m_{22} = (ml_1^2 + J_1)/l^2; j = \omega J_3 / l^2. \end{cases} \quad (9)$$

де  $m$ ,  $J_1$ ,  $J_3$  – маса, екваторіальний і полярний моменти інерції шток-валу (можливо з корисним вантажем) відповідно.

Прийmemo також, що всі узагальнені координати, а саме переміщення  $x_1, \dots, z_3$ , а також параметри незрівноваженості  $e_1$ ,  $e_2$  і  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , зазор в КОМО/АМПЗ  $\delta_a$  мають однаковий порядок малості. Тоді, з огляду на це припущення про малість узагальнених координат і їх похідних, нелінійні доданки рівнянь руху можна вважати малими в порівнянні з лінійними членами.

Виключаючи з розгляду доданки рівнянь руху, порядок малості яких вище третього, приходимо до повністю зв'язаної системи семи нелінійних диференціальних рівнянь відносно семи невідомих  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3, \Psi_{c1}, \Psi_{c2}$ , які описують динаміку цієї електромагнітомеханічної системи (без врахування динамічного збудження основи 1, рис. 3):

$$\begin{cases} m\ddot{z}_3 + f''_{z3} + f'''_{z3} + b_{z3}\dot{z}_3 = F_{Mz3}(x_1, y_1, z_1) + \\ + F_{Mz3}(x_2, y_2, z_2) - \frac{\partial W}{\partial z_3} + Q_{z3} + H_{z3}(t); \\ \dot{\Psi}_{c1} + r_{c1} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c1}} = u_{c1}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_3); \\ \Psi_{c2} + r_{c2} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c2}} = u_{c2}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_3); \\ m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f''_{x1} + f'''_{x1} + b_{x1}\dot{x}_1 = \\ = F_{Mx1}(x_1, y_1) - \frac{\partial W}{\partial x_1} + Q_{x1} + H_{x1}(t); \\ m_{22}\ddot{x}_2 + m_{12}\ddot{x}_1 - j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f''_{x2} + f'''_{x2} + b_{x2}\dot{x}_2 = \\ = F_{My1}(x_1, y_1) - \frac{\partial W}{\partial x_2} + Q_{x2} + H_{x2}(t); \\ m_{11}\ddot{y}_1 + m_{12}\ddot{y}_2 - j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f''_{y1} + f'''_{y1} + b_{y1}\dot{y}_1 = \\ = F_{Mx2}(x_2, y_2) - \frac{\partial W}{\partial y_1} + Q_{y1} + H_{y1}(t); \\ m_{22}\ddot{y}_2 + m_{12}\ddot{y}_1 + j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f''_{y2} + f'''_{y2} + b_{y2}\dot{y}_2 = \\ = F_{My2}(x_2, y_2) - \frac{\partial W}{\partial y_2} + Q_{y2} + H_{y2}(t), \end{cases} \quad (10)$$

де  $f''_{qj}(x_1, \dots, z_3)$ ,  $f'''_{qj}(x_1, \dots, z_3)$  – нелінійні члени рівнянь руху, зумовлені силами інерції і потенційного поля другого і третього порядку;  $b_{x1, \dots, z3}$  – коефіцієнти в'язкого тертя;  $r_{c1,2}$  – активні опори в колах обмоток;  $u_{c1,2}$  – керуючі напруги, що подаються на обмотки АМП згідно закону керування в залежності від стану.

Сили  $Q_{qj}$  – це інші узагальнені сили, зокрема, сила тяжіння, а  $H_{qj}(t)$  – зовнішні збуджуючі сили і моменти, які залежать від часу, зокрема, викликані незрівноваженістю обертового шток-валу:

$$\begin{cases} H_{x1}(t) = M_{11}E_x + J\Gamma_x; H_{x2}(t) = M_{22}E_x - J\Gamma_x; \\ H_{y1}(t) = M_{11}E_y - J\Gamma_y; H_{y2}(t) = M_{22}E_y + J\Gamma_y; \\ \text{де } M_{11} = ml_2\omega^2/l; M_{22} = ml_1\omega^2/l; J = \omega^2(J_1 - J_3)/l; \\ E_x = e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t); E_y = e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t); \\ \Gamma_x = \gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t); \Gamma_y = \gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t). \end{cases} \quad (11)$$

Доданки  $F_{Mqj}$  є потенційними силами, які залежать тільки від узагальнених координат. В даному випадку – це магнітні сили в ППМП1,2 (рис. 4). Члени  $-\partial W/\partial q_j$  – це пондеромоторні сили, тобто електромагнітні реакції КОМО/АМПЗ. Їх залежності від узагальнених координат і струмів в обмотках можуть бути отримані на основі розгляду магнітних кіл з використанням схем заміщення і застосуванням методу контурних потоків з використанням схематизації шляхів магнітних потоків для визначення магнітних опорів ділянок магнітопроводів [14].

Вираз магнітної енергії  $W$ , що використовується в системі рівнянь (10) у всіх рівняннях визначає сили, що діють на шток-вал. Доданок  $-\partial W/\partial z_3$  в першому рівнянні описує осьову вертикальну силу, яка визначається законом керування  $u_{c1,2}$ , що врахований в другому та третьому рівняннях, де доданки  $-\partial W/\partial \Psi_{c1,2}$  згідно (8) є струмами в колах обмоток електромагнітів КОМО, а доданки  $-\partial W/\partial x_1$ ,  $-\partial W/\partial x_2$ ,  $-\partial W/\partial y_1$ ,  $-\partial W/\partial y_2$  в

останніх чотирьох рівняннях описують радіальні сили, створювані осьовим КОМО/АМПЗ при знаходженні шток-валу в деякому довільному положенні.

Система диференціальних рівнянь (СДР) (10) є повністю зв'язаною, оскільки в кожне з семи рівнянь входять доданки, які як лінійно, так і нелінійно залежать і від усіх потокозчеплень  $\Psi = \{\Psi_{c1}, \Psi_{c2}\}$ , і від узагальнених координат  $q = \{x_1, y_1, x_2, y_2, z_3\}$ .

Демпфувальні властивості в осьовому напрямі (вертикального підвісу), як і в радіальних напрямках визначаються коефіцієнтами в'язкого тертя  $b_{x1, \dots, z3}$ , але у вертикальному напрямі ще є можливість керування демпфуванням зміною активних опорів в колах  $r_{c1,2}$ . Окрім того, реалізація ділянок квазінульової жорсткості на силових характеристиках в осьовому вертикальному напрямі може бути забезпечена підбором параметрів закону керування [4], звідси що з врахуванням осьових сил в радіальних ППМП (рис. 4).

Для інших функціоналів математична модель динаміки шток-валу формується за аналогічними принципами. Наприклад, для функціоналу 1, де кут повороту навколо осі валу взагалі виключений, можна прийняти тотожність  $\theta_2 = 0$ , що взагалі виключає цю узагальнену координату з розгляду. Тоді вирази  $T, \Pi, W$  і самі рівняння формуються з урахуванням цього і майже співпадають з (10). У випадку функціоналу 2 беруться до уваги всі шість узагальнених координат, що призводить до восьми диференціальних рівнянь.

**Комп'ютерна симуляція динаміки шток валу комплексної магнітної опори.** Блок-схема нелінійної імітаційно-обчислювальної моделі динаміки віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори (ІОМ-ДВГВІМО-Н) представлена на рис. 5. Програмна реалізація була виконана з використанням C, Java та інтерпретованої мови програмування. Структура імітаційної моделі включає три програмні блоки (рис. 5), зв'язок між якими здійснюється через базу даних. Розглянемо їх на прикладі аналізу функціоналу 3, тобто в разі наявності обертового руху шток-валу. Перший блок виконує такі дії: 1. Формування аналітичних виразів для висоти ззору під елементом площі полюсів КОМО/АМПЗ, магнітного опору ділянок кола, магнітної енергії КОМО/АМПЗ; 2. Реалізація методу аналізу ППМП, знаходження дискретних значень магнітних сил, апроксимація силових характеристик ППМП; 3. Виведення диференціальних рівнянь руху шток-валу з урахуванням потокозчеплень  $\Psi_{ck}$  в узагальнених координатах  $q_m$ , формування повної нелінійної СДР мехатронної системи, приведення СДР до канонічної форми та запис у базу даних (БД1).

Другий блок програми реалізує: 1. Зчитування аналітичних виразів повної СДР з БД1, приведення СДР до спеціального вигляду для розв'язання початкової задачі, зчитування з БД2 (вхідні дані) – параметрів ППМП1,2, КОМО/АМПЗ та системи керування КОМО/АМПЗ, зчитування вихідних параметрів для розрахунку динаміки системи з БД2; 2. Лінеаризацію СДР та приведення до вигляду задачі

на власні значення, пошук власних частот (ВЧ) необертового шток-валу (при  $\omega = 0$ ), побудову власних форм необертового валу (при нульовій частоті), розрахунок ВЧ з урахуванням гіроскопічного моменту, що залежить від  $\omega$ , побудову частотної діаграми Кемпбелла та визначення значень критичних швидкостей обертання; 3. Врахування іншого збудження (якщо є) відмінних від збуджувальних сил, обумовлених власною незрівноваженістю жорсткого шток-валу; 4. Поділ діапазону частот, що аналізується, на кроки ( $\omega_i$ ), формування циклу на основі кроків кутової частоти  $\omega_i$ , призначення початкових умов для  $\omega_i$ , розв'язання нелінійної СДР методом Рунге-Кутти, запис залежностей узагальнених координат  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3$  від часу, визначення часу початку усталеного руху, визначення параметрів усталеного руху для  $\omega_i$ , перевірка єдиності розв'язку СДР для  $\omega_i$ , запис результатів розрахунку для  $\omega_i$  в БД3; 5. Відображення віброграм узагальнених координат для  $\omega_i$ , відображення траєкторій руху опорних точок валу, знаходження спектрів  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3$  методом швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), відображення спектрограм узагальнених координат для  $\omega_i$ , відображення фазових траєкторій  $\dot{q}(q_i)$  при  $q = \{x_1, y_1, x_2, y_2, z_3\}$  для  $\omega_i$ , відображення перерізів Пуанкаре для  $\omega_i$ , а також тривимірних спектрів, амплітудно-частотних характеристик та залежностей амплітуд суб- та супергармонік від швидкості обертання (та/або частот іншого збудження) для вибраних точок валу (рис. 5). Третій блок відповідає за візуалізацію результатів.

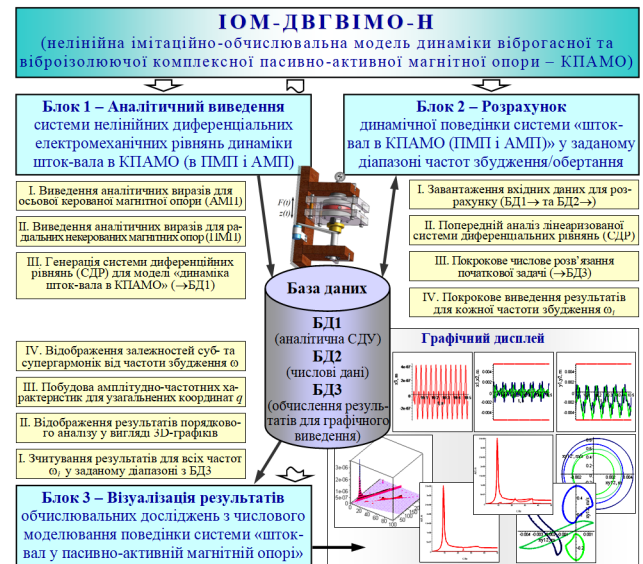


Рис. 5 – Блок-схема ІОМ-ДВГВІМО-Н

Переваги ІОМ-ДВГВІМО-Н включають: аналітичне виведення повної розв'язувальної системи диференціальних магнітомеханічних рівнянь, яка описує динамічну поведінку шток-валу (при наявності з вантажем) в ППМП і КОМО/АМП, що дозволяє виключити похибку обчислень на даному етапі; можливість числового розв'язання початкової задачі із заданим ступенем точності; можливість виконання багатоваріантних проектних розрахунків; можливість зміни алгоритму керування; можливість введення

похибки вимірювання компонентів вектору стану (дозволяє оцінити допуски на точність вимірювального обладнання); зручність графічного представлення поведінки системи «шток-вал у пасивно-активному магнітному підвісі» протягом розрахункового інтервалу часу та в заданому діапазоні частот.

**Числова симуляція динаміки шток валу комплексної магнітної опори.** Для порівняльного розрахунково-експериментального аналізу динаміки при дії тільки збудження, обумовленого власною незрівноваженістю жорсткого обертового шток-валу, приймається вихідний варіант мехатронної системи.

Конструкцію комплексної магнітної опори з поворотним або обертовим вертикальним шток-валом наведено на рис. 2, а її деякі параметри мають наступні значення: маса, довжина, моменти інерції та незрівноваженості шток-валу –  $m=2,5$  кг,  $l_1=0,106$  м,  $l_2=0,176$  м,  $J_1=0,0107$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_3=0,0034$  кг·м<sup>2</sup>,  $e=6 \cdot 10^{-5}$  м,  $\gamma=0,003$  рад відповідно; демфувальні властивості радіальних ППМП –  $Q_{Rqj}=b_{qj}\partial q_j/\partial t$ ,  $b_{qj}=2,325$  кг/с; закон керування КОМО/АМПЗ  $u_{c1,2}=(u_{\max}-2u_{\min})z_3^2/(2\delta_a^2) \pm \pm u_{\max}z_3/(2\delta_a)+u_{\min}$ , при  $r_{c1}=r_{c2}=5$  Ом,  $\delta_a=3 \cdot 10^{-3}$  м,  $U_0=24$  В,  $k_i=2/5$ ,  $u_{\max}=k_i u_{\min}$  та частоті керування 300-400 Гц; діапазон робочих швидкостей обертання шток-валу 0-3000 об/хв.

На рис. 6а зображено зміну струмів керування в залежності від зміщення валу в осьовому вертикальному напрямі, що відповідають вказаному закону керування по напругам на обмотках електромагнітів (при параметрі закону  $k_i=2$ ):

$$i_{c1,2} = (i_{\max} - 2i_{\min})z_3^2 / (2\delta_a^2) \mp i_{\max}z_3 / (2\delta_a) + i_{\min},$$

$$\text{при } u_{c1,2} = r_{c1,2} i_{c1,2},$$

$$\text{де } i_{\max} = k_i i_{\min}, i_{\max} = U_0 / r_{c1,2}, r_{c1} = r_{c2}.$$
(12)

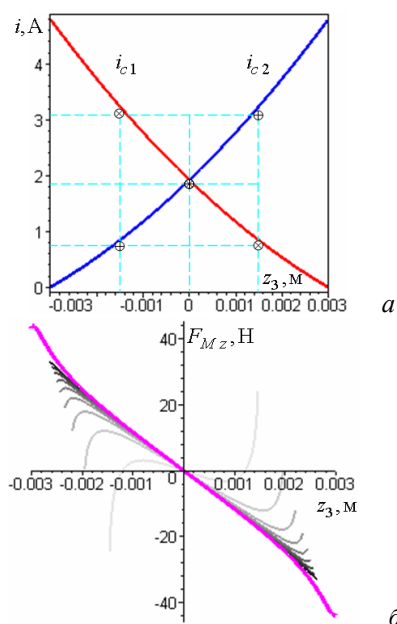


Рис. 6 – Залежність характеристик осьової активної магнітної опори від переміщення диска в межах зазору: а – токи керування; б – магнітна сила

Зазначений закон керування є апробованим експериментально для горизонтального ротора в цьому підвісі [5, 14]. Він забезпечує втримання диску в центральному положенні між полюсами двох електромагнітів та переднатяг, який створює бажану жорсткість опираючого. Але в цьому законі не враховано власну вагу шток-валу, яка є постійно діючою силою в вертикальному напрямі. Для врахування цього та визначення постійної складової струмів, яка буде забезпечувати центральне нестійке положення рівноваги, можна скористатися співвідношенням, спрощеним для визначення сумарної сили в напрямі  $z$ , що утворюється дією обидвох електромагнітів:

$$F_{Mz}(z_3) = \frac{\mu_0 w_1^2 (S_{p1} + S_{p2}) i_{c1}^2}{4(\delta_a + z_3)^2} - \frac{\mu_0 w_2^2 (S_{p3} + S_{p4}) i_{c2}^2}{4(\delta_a - z_3)^2}, \quad (13)$$

де  $S_{p1}, \dots, S_{p4}$  – площі полюсів;  $w_1, w_2$  – кількість витків обмоток;  $\mu_0$  – магнітна постійна.

При  $F_{Mz}(0)=mg$  зі співвідношення (13) випливає:

$$i_{c1m}(0) = \sqrt{\frac{4\delta_a^2 mg + \mu_0 w_2^2 (S_{p3} + S_{p4}) i_{c2}^2(0)}{\mu_0 w_1^2 (S_{p1} + S_{p2})}}. \quad (14)$$

Тоді постійний доданок в законі керування до струму у верхній обмотці  $i_{c1}$  для нівелювання сили тяжіння (власної ваги шток-валу) дорівнює:

$$\Delta i_{c1} = i_{c1m}(0) - i_{c2}(0). \quad (15)$$

Оскільки власна незрівноваженість шток-валу в радіальному напрямі збуджує коливання і в осьовому [14], то результати від цього збудження у вказаному діапазоні кутових швидкостей обертання, які отримані за допомогою сформульованої математичної моделі (10) та ІОМ-ДВГВІМО-Н (рис. 5), використовуються для перевірки і демонстрації можливостей, а також для верифікації і валідації цих засобів.

Так, на рис. 7 представлено серію результатів розрахункових досліджень вимушених коливань, а саме розв'язки на стаціонарних відрізках для узагальненої координати  $z_3$  в діапазоні кутової швидкості 0-100л рад/с. Вони являють собою графіки залежностей узагальненої координати від часу (залежності  $y_{1,2}$  і  $x_{1,2}$  від  $t$  також розраховуються, але тут не наводяться). На рис. 7 ці графіки наведені для різних частот збудження (обертання), а саме частоти резонансних коливань в осьовому напрямі (9,5 Гц), частот першого резонансного режиму в радіальному напрямі, при якому шток-вал здійснює рух типу циліндричної прецесії (10,5-12,0 Гц), частот другого резонансного режиму в радіальному напрямі, при якому шток-вал здійснює рух типу конічної прецесії (10,5-12,0 Гц) та нерезонансних частот. Хоча вказані прецесійні рухи більш доречно характеризують коливальний рух шток-валу в радіальних напрямках, як можна бачити з графіків, вони впливають і на динамічні процеси в осьовому напрямі.

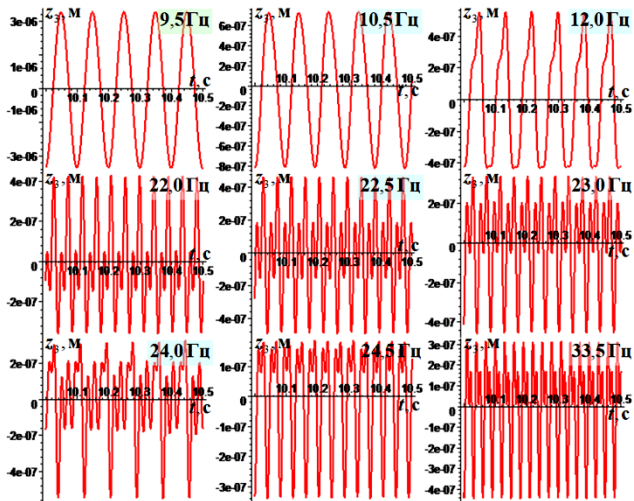


Рис. 7 – Віброграми осьового руху шток-валу при різних частотах збудження (обертання)

Аналіз сигналів за допомогою ШПФ спочатку дозволяє отримати спектри переміщень, відповідні кожній з частот, на яких виконувалося розв'язання СДР, а потім виконати графічне відображення результатів порядкового аналізу шляхом зчленування цих двовимірних спектрів в тривимірні. Тобто, послідовний набір спектрограм, відповідних дискретним значенням кутової швидкості, дозволяє побудувати тривимірний спектр. Для осьового напрямку такий спектр зображено на рис. 8, де:  $f$  – частота спектра,  $\omega$  – кутова швидкість (частота збудження, тобто обертання),  $A_{z3}$  – амплітуда.

На рис. 9 представлено проекцію тривимірного спектру (рис. 8) на координатну площину  $O\omega A$ , де прийнято позначення:  $\omega_0$  – частота збудження, яка співвідноситься з кутовою швидкістю ротора як  $\omega_0 = \omega$ ,  $A_{(1)}$  – амплітуди першої (основної) гармоніки,  $A_{(1/n)}$  – суб- (рис. 9б),  $A_{(n)}$  – супергармонік (рис. 9а), де число в дужках – кратність частоти гармоніки основній частоті  $\omega_0$ . Ці характеристики є залежностями амплітуд основної, суб- і супергармонік від частоти збудження і дозволяють якісніше і докладніше проаналізувати динамічну поведінку ротора в досліджуваному діапазоні. Так, аналіз поведінки шток-валу за всіма узагальненими координатами дозволяє виявити на спектрах присутність як супергармонік, так і субгармонік, що узгоджується з результатами експериментальних досліджень, оскільки жорсткісні характеристики радіальних опор нелінійні (рис. 4). За розрахунковими даними визначено значення резонансних частот:  $\omega_{1z} = 9,5$  Гц;  $\omega_{1xy} = 10,5-12$  Гц;  $\omega_{2xy} = 22,5-36$  Гц, які практично співпадають з експериментальними даними. Таким чином, перша резонансна частота відповідає поздовжнім осьовим коливанням шток-валу у вертикальному напрямі  $z_3$ . Оскільки залежності сил від переміщень і в КОМО/АМПЗ є суттєво нелінійними [4], в осьовому напрямі  $z_3$  наявними є також як субгармонічні, так і супергармонічні коливання (рис. 9а та 9б відповідно).

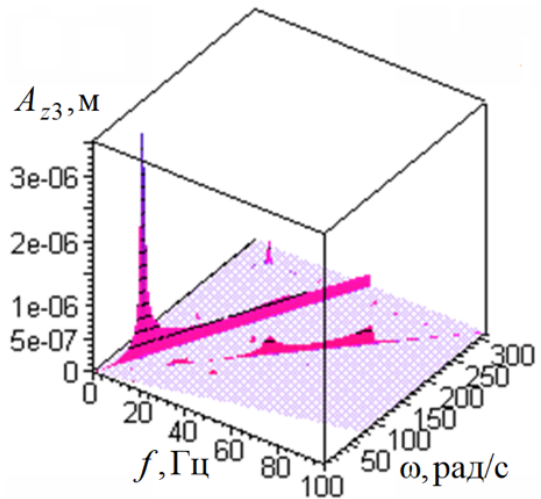


Рис. 8 – Результати порядкового аналізу віброграми руху шток-валу в напрямі  $z_3$  в діапазоні частоти збудження (обертання) 0-50 Гц (0-100π рад/с) з розкладанням на гармоніки за допомогою ШПФ

Окрім того, виявлено, що основні і супергармонічні резонансні коливання в осьовому напрямі збуджуються навантаженням, що діє в радіальному напрямі (власною незрівноваженістю шток-валу), причому піки суперрезонансних осьових коливань збігаються з піками основних радіальних коливань, що є наслідком врахування взаємозв'язку між радіальними і осьовою узагальненими координатами за допомогою нелінійних членів рівнянь руху (10). З метою валідації на рис. 10 наведено експериментально отримані залежності амплітуд гармонік осьових коливань.

Аналіз результатів показує, що числово отримані резонансні режими і явища були виявлені в системі і при проведенні експериментальних досліджень (рис. 10), а про адекватність математичної та імітаційно-обчислювальної моделей, що базуються на системі нелінійних повністю зв'язаних між собою за допомогою узагальнених механічних координат  $x_1, \dots, z_3$  і потокозчеплень  $\Psi_{c1}, \Psi_{c2}$  рівнянь (з урахуванням закону керування напругами  $u_{1,2}$ , які також залежать від  $x_1, \dots, z_3$ ), можна судити за результатами порівняння розрахункових даних (рис. 9) з експериментальними залежностями (рис. 10) від частоти збуджувальної сили амплітуд першої та інших кратних гармонік. Так, порівняльний аналіз результатів дозволив встановити тотожність як за якісним відображенням процесів, що відбуваються в системі, так і за кількісними значеннями їх параметрів, а саме за амплітудами.

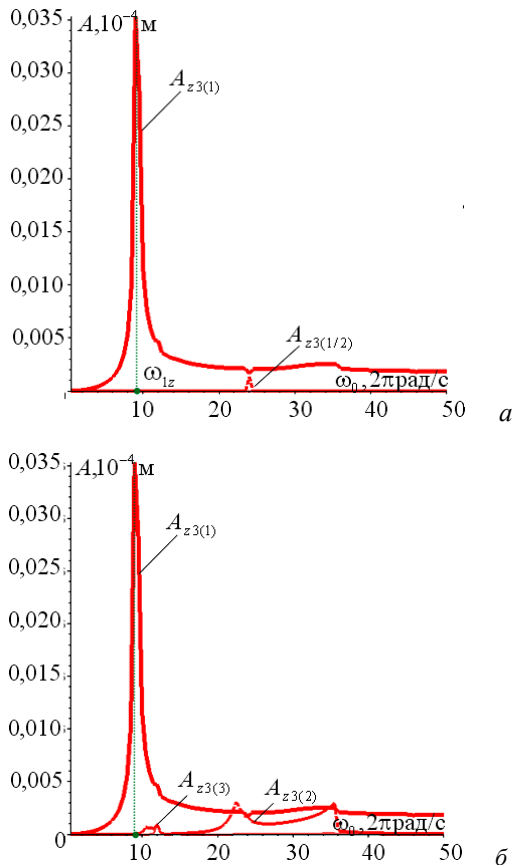


Рис. 9 Залежності амплітуд коливань в напрямі  $z_3$  основної, суб-і супергармонік від частоти збуджувальної сили:  $a$  – основна та субгармоніки;  $b$  – основна та супергармоніки

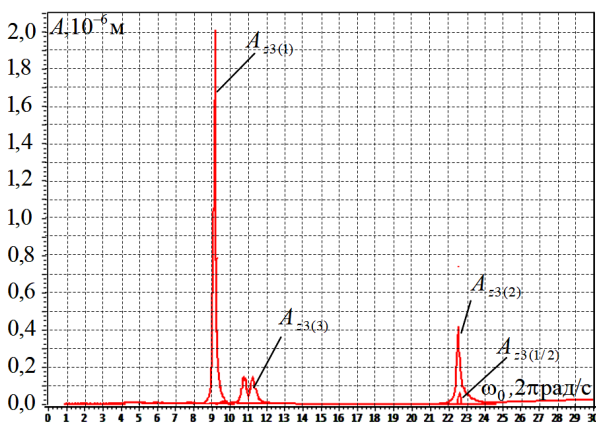


Рис. 10 – Експериментальні залежності амплітуд коливань шток-валу в напрямі  $z_3$  основної, суб-і супергармонік від частоти збуджувальної сили в діапазоні 0-30 Гц

**Висновки.** У статті запропоновано підхід до формування уточнених нелінійних аналітичних та імітаційно-обчислювальної моделей, що описують динамічну поведінку шток-валу віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори. Ці моделі є верифікованими та експериментально валідованими і можуть бути використані для уточненого аналізу динамічних характеристик шток-валу (разом з доданим корисним вантажем), розташованого в магнітних елементах опираючого, з урахуванням великого набору

нелінійностей, властивих такій системі. Вони надають універсальну можливість побудови віброграм, спектрограм, траєкторій руху, фазових траєкторій, стробоскопічних перерізів Пуанкаре, а також тривимірних спектрів і амплітудно-частотних характеристик. Це дозволяє виконувати всеосяжну оцінку вібраційного стану і стійкості руху в заданому діапазоні частот збудження та дає можливість варіантних досліджень при різних параметрах системи та алгоритму керування КОМО/АМПЗ.

Так, за допомогою цього апарату можливим є подальше селекційне параметричне вивчення варіантів опори, з урахуванням можливостей віброгасіння, що забезпечується контрольованим і керованим активним опором в ланцюгах обмоток електромагнітів або реалізується з використанням спеціальних алгоритмів у системі керування КОМО/АМПЗ, а також віброізоляції вантажу на опорі, яка може забезпечуватись ділянками квазінульової жорсткості на силових характеристиках, що також реалізується прийнятим законом керування КОМО/АМПЗ. При цьому різноманітно можуть враховуватись силові характеристики з КНЖ, додаткова маса корисного вантажу, неповоротний, поворотний та обертальний функціональні варіанти комплексної магнітної опори, кінематичне збудження основи тощо. Звісно, що деякі варіанти потребують модифікації математичного опису (10). Але використання ІОМ-ДВГВІМО-Н у порівнянні з іншими існуючими інструментами дає таку модифікаційну можливість, загалом підвищуючи надійність числового розрахункового визначення параметрів шток-валу, магнітних опор та системи керування для забезпечення потрібного функціоналу.

**Фінансування.** Автор хотів би подякувати Національному фонду досліджень України (грант №2023.03/0255) за підтримку і часткове фінансування.

#### Список літератури

1. *De Silva C. W.* Vibration Damping, Control, and Design / *C. W. de Silva, ed.* – CRC Press, 2007. – 634 p. – <https://doi.org/10.1201/9781420053227>
2. *Mei C.* Mechanical Wave Vibrations: Analysis and Control / *C. Mei.* – John Wiley and Sons Ltd., 2023. – 432 p. – <https://doi.org/10.1002/9781119135074>
3. *Weber F.* Efficient Damping and Isolation Systems for Civil Structures / *F. Weber.* – MDPI, 2023. – 194 p. – <https://doi.org/10.3390/books978-3-0365-6560-6>
4. *Мартиненко Г. Ю.* Концепція віброгасної та віброізолюючої комплексної пасивно-активної магнітної опори на основі повного магнітно-електромагнітного підвісу вертикального шток-валу / *Г. Мартиненко* // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2025. – №1. – С. 89-95. – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.331820>
5. *Martynenko G.* Combined rotor suspension in passive and active magnetic bearings as a prototype of bearing systems of energy rotary turbomachines / *G. Martynenko, Y. Uliyanov* // Proceedings of the IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems. – 2019. – Pp. 90-93. <https://doi.org/10.1109/MEES.2019.8896571>
6. *Martynenko G.* Stability testing of control algorithms for active magnetic bearings to measurement errors occurrence on scale model of turbocompressor / *G. Martynenko, L. Rozova* // Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy

- Systems. – 2021. – Pp. 1-6. <https://doi.org/10.1109/MEES52427.2021.9598798>
7. Ma Z. Recent advances in quasi-zero stiffness vibration isolation systems: An overview and future possibilities / Z. Ma, R. Zhou, Q. Yang // *Machines*. – 2022. – Vol. 10(9), 813. – <https://doi.org/10.3390/machines10090813>
  8. Kaul S. Modeling and Analysis of Passive Vibration Isolation Systems / S. Kaul, ed. – Elsevier, 2021. – 221 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819420-1.00010-8>
  9. Baz A. M. Active and Passive Vibration Damping / A. M. Baz. – Wiley, 2019. – <https://doi.org/10.1002/9781118537619>
  10. Zhang Q. Experimental study on the active control and dynamic characteristics of electromagnetic active-passive hybrid vibration isolation system / Q. Zhang, L. Zhu, Q. Dong, J. Sui, M. Sun, J. Wang, X. Yu // *Applied Sciences (Switzerland)*. – 2023. – Vol. 13(19). – 10565. <https://doi.org/10.3390/app131910565>
  11. Yusoff M. F. M. Development of empirical model for electromagnetic damping coefficient damper / M. F. M. Yusoff, A. Zaidi, S. Ishak, M. Awang, M. Md Din, A. Mukhtaruddin, M. Jefri, T. Sheng, A. Mukhtaruddin // *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. – 2023. – Vol. 20. – Pp. 10536-10546. <https://doi.org/10.15282/ijame.20.2.2023.15.0813>
  12. Hutterer M. Modeling and mu-synthesis control of a flexible rotor stabilized by active magnetic bearings including current free control / M. Hutterer, M. Schrödl // *Journal of Sound and Vibration*. – 2023. – Vol. 546. 117439. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117439>
  13. Martynenko G. Rotor dynamics modeling for compressor and generator of the energy gas turbine unit with active magnetic bearings in operating modes / G. Martynenko, V. Martynenko // *Proceedings of the 25th IEEE International Conference on Problems of Automated Electric Drive. Theory and Practice*. – 2020. Pp. 1-6. – <https://doi.org/10.1109/PAEP49887.2020.9240781>
  14. Martynenko G. Stability analysis of rotor motion in nonlinear systems with passive and active magnetic bearings / G. Martynenko // *Advanced Structured Materials*. – 2021. – Vol. 157, Ch. 19. – Pp. 333-351. Springer, Cham. [Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Y.V. (Eds.) *Nonlinear Mechanics of Complex Structures*] – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_19)
  15. Putkonen A. Commissioning of a modular active-magnetic-bearing-suspended rotor system / A. Putkonen, J. Narsakka, G. Ranjan, T. Lindh, J. Sopanen, N. Nevaranta // *IEEE Open Journal of Industry Applications*. – 2025. – Vol. 6. – P. 619-629. – <https://doi.org/10.1109/OJIA.2025.3596973>
  16. Liu Y. A novel quasi-zero stiffness vibration isolator via biaxial slider-connector-spring structure / Y. Liu, X. Zhu, W. Liu, W. Xu // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. – 2025. – Vol. 13. – P. 377. – <https://doi.org/10.1007/s42417-025-01911-9>
  17. Jiao G. A compact magnetic-curved-spring QZS isolator for supporting uncertain loads / G. Jiao, J. Zeng, S. Wang // *Nonlinear Dynamics*. – 2024. – Vol. 113. – P. 9217-9238. – <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10595-x>
  18. Lian X. A Vibration isolator with a controllable quasi-zero stiffness region based on nonlinear force design / X. Lian, B. Liu, H. Deng, X. Gong // *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. – 2024. – Vol. 45(8). – P. 1279-1294. – <https://doi.org/10.1007/s10483-024-3137-8>
  19. Wu H. Dynamic analysis and vibration control of a rotor-active magnetic bearings system with base motion / H. Wu, L. Zhang, J. Zhou, Y. Hu // *Journal of Vibration and Control*. – 2023. – Vol. 30(11-12). – P. 2697-2708. – <https://doi.org/10.1177/10775463231183190>
  20. Wang C. Nonlinear vibration control of magnetic bearing system considering positive and negative stiffness / C. Wang, C. Liu, S. Cao, L. Sun // *Journal of Vibration and Control*. – 2024. – OnlineFirst. – <https://doi.org/10.1177/10775463241233616>
  21. Hamzehei R. Mastering the art of designing mechanical metamaterials with quasi-zero stiffness for passive vibration isolation: a review / R. Hamzehei, M. Bodaghi, N. Wu // *Smart Materials and Structures*. – 2024. – Vol. 33. – 083001 – <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ad5bec>
  22. Xu X. A universal dynamic model and solution scheme for the electrical rotor system with wide range of eccentricity / X. Xu, Y. Liu, Q. Han // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2023. – Vol. 152. – 104402. – <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104402>
  23. Zhang G. Vibration control of a time-delayed rotor-active magnetic bearing system by time-varying stiffness / G. Zhang, G. Xi // *International Journal of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 14(04). – 2250007. – <https://doi.org/10.1142/S1758825122500077>
  24. Ju J. The adaptive nonsingular terminal sliding mode control of six-pole radial-axial hybrid magnetic bearing considering varying current stiffness / J. Ju, X. Li, J. Huang, R. Yan, R. Zhou // *Electronics*. – 2025. – Vol. 14(24). – 4807. – <https://doi.org/10.3390/electronics14244807>
  25. Shan K. Control strategy for hybrid magnetic bearing based on improved cascaded reduced-order active disturbance rejection controller / K. Shan, K. Wang, W. Zhang et al. // *CES Transactions on Electrical Machines and Systems*. – 2025. – Vol. 9(3). – P. 340–351. – <https://doi.org/10.30941/CESTEMS.2025.00024>
  26. Diez-Jimenez E. Review of passive electromagnetic devices for vibration damping and isolation / E. Diez-Jimenez, R. Rizzo, M. J. Gómez-García, E. Corral-Abad // *Shock and Vibration*. – 2019. – Vol. 2019. – Pp. 1-16 – <https://doi.org/10.1155/2019/1250707>
  27. Mohd Yusoff M. F. Simulation studies of vibration isolation using electromagnetic damper / M. F. Mohd Yusoff, A. M. Ahmad Zaidi, S. A. F. Ishak, M. K. Awang, M. F. Md Din // *Jurnal Kejuruteraan SI*. – 2021. – Vol. 4(2). – Pp. 119-126. – [https://doi.org/10.17576/jukum-2021-si4\(2\)-18](https://doi.org/10.17576/jukum-2021-si4(2)-18)
  28. Zhang C. Compliant quasi-zero-stiffness isolator for low-frequency torsional vibration isolation / C. Zhang, J. He, G. Zhou et al. // *Mechanism and Machine Theory*. – 2023. – Vol. 181. – 105213. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2022.105213>

## References (transliterated)

1. De Silva C. W., ed. *Vibration Damping, Control, and Design*. CRC Press, 2007. 634 p. – <https://doi.org/10.1201/9781420053227>
2. Mei C. *Mechanical Wave Vibrations: Analysis and Control*. John Wiley and Sons Ltd., 2023. 432 p. – <https://doi.org/10.1002/9781119135074>
3. Weber F. *Efficient Damping and Isolation Systems for Civil Structures*. MDPI, 2023. 194 p. – <https://doi.org/10.3390/books978-3-0365-6560-6>
4. Martynenko G. Yu. Kontseptsiya vibrohasnovo ta vibrozolyuyuchoyi kompleksnoyi pasyвно-aktyvnoyi mahnitnoyi opory na osnovi povnoho mahnitno-elektromahitnoho pidvisu vertykal'noho shtok-valu [The concept of vibration-damping and vibration-isolation complex passive-active magnetic support based on a complete magnetic-electromagnetic suspension of a vertical rod-shaft]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn [Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, 2025, no. 1, pp. 89-95. – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.331820>
5. Martynenko G., Ulianov Y. Combined rotor suspension in passive and active magnetic bearings as a prototype of bearing systems of energy rotary turbomachines. *Proceedings of the IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems*. Kremenchuk, 2019, pp. 90-93. – <https://doi.org/10.1109/MEES.2019.8896571>
6. Martynenko G., Rozova L. Stability testing of control algorithms for active magnetic bearings to measurement errors occurrence on scale model of turbocompressor. *Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems*. Kharkiv, 2021, pp. 1-6. – <https://doi.org/10.1109/MEES52427.2021.9598798>
7. Ma Z., Zhou R., Yang Q. Recent advances in quasi-zero stiffness vibration isolation systems: An overview and future possibilities. *Machines*. 2022, vol. 10(9), 813. – <https://doi.org/10.3390/machines10090813>
8. Kaul S., ed. *Modeling and Analysis of Passive Vibration Isolation Systems*. Elsevier, 2021. 221 p. – <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819420-1.00010-8>
9. Baz A. M. *Active and Passive Vibration Damping*. Wiley, 2019. – <https://doi.org/10.1002/9781118537619>
10. Zhang Q., Zhu L., Dong Q., Sui J., Sun M., Wang J., Yu X. Experimental study on the active control and dynamic characteristics of electromagnetic active-passive hybrid vibration isolation system. *Applied Sciences (Switzerland)*. 2023, vol. 13(19), 10565. – <https://doi.org/10.3390/app131910565>

11. Yusoff M. F. M., Zaidi A., Ishak S., Awang M., Md Din M., Mukhtaruddin A., Jefri M., Sheng T., Mukhtaruddin A. Development of empirical model for electromagnetic damping coefficient damper. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 2023, vol. 20, pp. 10536-10546 – <https://doi.org/10.15282/ijame.20.2.2023.15.0813>
12. Hutterer M., Schrödl M. Modeling and mu-synthesis control of a flexible rotor stabilized by active magnetic bearings including current free control. *Journal of Sound and Vibration*, 2023, vol. 546, 117439. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117439>
13. Martynenko G., Martynenko V. Rotor dynamics modeling for compressor and generator of the energy gas turbine unit with active magnetic bearings in operating modes. *Proceedings of the 25th IEEE International Conference on Problems of Automated Electric Drive. Theory and Practice*. Kremenchuk, 2020, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1109/PAEP49887.2020.9240781>
14. Martynenko G. Stability analysis of rotor motion in nonlinear systems with passive and active magnetic bearings. *Advanced Structured Materials*. 2021, vol. 157, ch. 19, pp. 333-351. Springer, Cham. [Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Y. V. (Eds.) *Nonlinear Mechanics of Complex Structures*]. – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_19)
15. Pukkonen A., Narsakka J., Ranjan G., Lindh T., Sopanen J., Nevaranta N. Commissioning of a modular active-magnetic-bearing-suspended rotor system. *IEEE Open Journal of Industry Applications*, 2025, vol. 6, pp. 619-629. – <https://doi.org/10.1109/OJIA.2025.3596973>
16. Liu Y., Zhu X., Liu W., Xu W. A novel quasi-zero stiffness vibration isolator via biaxial slider-connector-spring structure. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2025, vol. 13, pp. 377. – <https://doi.org/10.1007/s42417-025-01911-9>
17. Jiao G., Zeng J., Wang S. A compact magnetic-curved-spring QZS isolator for supporting uncertain loads. *Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 113, pp. 9217-9238. – <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10595-x>
18. Lian X., Liu B., Deng H., Gong X. A Vibration isolator with a controllable quasi-zero stiffness region based on nonlinear force design. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2024, vol. 45(8), pp. 1279-1294. – <https://doi.org/10.1007/s10483-024-3137-8>
19. Wu H., Zhang L., Zhou J., Hu Y. Dynamic analysis and vibration control of a rotor-active magnetic bearings system with base motion. *Journal of Vibration and Control*, 2023, vol. 30(11-12), pp. 2697-2708. – <https://doi.org/10.1177/10775463231183190>
20. Wang C., Liu C., Cao S., Sun L. Nonlinear vibration control of magnetic bearing system considering positive and negative stiffness. *Journal of Vibration and Control*, 2024, OnlineFirst. – <https://doi.org/10.1177/10775463241233616>
21. Hamzehei R., Bodaghi M., Wu N. Mastering the art of designing mechanical metamaterials with quasi-zero stiffness for passive vibration isolation: a review. *Smart Materials and Structures*, 2024, vol. 33, 083001. – <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ad5bcc>
22. Xu X., Liu Y., Han Q. A universal dynamic model and solution scheme for the electrical rotor system with wide range of eccentricity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2023, vol. 152, 104402. – <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104402>
23. Zhang G., Xi G. Vibration control of a time-delayed rotor-active magnetic bearing system by time-varying stiffness. *International Journal of Applied Mechanics*, 2022, vol. 14(04), 2250007. – <https://doi.org/10.1142/S1758825122500077>
24. Ju J., Li X., Huang J., Yan R., Zhou R. The adaptive nonsingular terminal sliding mode control of six-pole radial-axial hybrid magnetic bearing considering varying current stiffness. *Electronics*, 2025, vol. 14(24), 4807. – <https://doi.org/10.3390/electronics14244807>
25. Shan K., Wang K., Zhang W. et al. Control strategy for hybrid magnetic bearing based on improved cascaded reduced-order active disturbance rejection controller. *CES Transactions on Electrical Machines and Systems*, 2025, vol. 9(3), pp. 340-351. – <https://doi.org/10.30941/CESTEMS.2025.00024>
26. Diez-Jimenez E., Rizzo R., Gómez-García M. J., Corral-Abad E. Review of passive electromagnetic devices for vibration damping and isolation. *Shock and Vibration*. 2019, vol. 2019, pp. 1-16. – <https://doi.org/10.1155/2019/1250707>
27. Mohd Yusoff M. F., Ahmad Zaidi A. M., Ishak S. A. F., Awang M. K., Md Din M. F. Simulation studies of vibration isolation using electromagnetic damper. *Jurnal Kejuruteraan SI*. 2021, vol. 4(2), pp. 119-126, – [https://doi.org/10.17576/jkukm-2021-si4\(2\)-18](https://doi.org/10.17576/jkukm-2021-si4(2)-18)
28. Zhang C., He J., Zhou G. et al. Compliant quasi-zero-stiffness isolator for low-frequency torsional vibration isolation. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, vol. 181, 105213. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2022.105213>

Надійшла (received) 20.12.2025

Прийнята до друку (accepted) 26.10.2025

Опублікована (published) 29.12.2025

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Мартиненко Геннадій Юрійович (Martynenko Gennadii)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5309-3608>; e-mail: [Gennadii.Martynenko@khp.edu.ua](mailto:Gennadii.Martynenko@khp.edu.ua)