

Ю. М. АНДРЕЄВ, О. О. ГОЛОВНЯ

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНИХ НЕГОЛОНОМНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ У ПСЕВДООКООРДИНАТАХ І КВАТЕРНІОНАХ

Стаття розглядає актуальні питання моделювання динаміки неголономних механічних систем, які широко застосовуються в сучасній робототехніці. Актуальність цієї теми зумовлена швидким розвитком складних робототехнічних пристроїв, таких як сферичні роботи та мобільні роботи на колесах, які зазвичай містять неголономні обмеження типу кочення без ковзання. Традиційні методи на основі узагальнених координат зазвичай призводять до громіздких рівнянь, які ускладнюють автоматизацію обчислень та аналіз керування механічних систем. У статті запропоновано більш ефективний підхід, який полягає у використанні псевдокоординат та псевдошвидкостей та кватерніонів. Даний підхід значно спрощує опис динамічних характеристик систем, зменшує порядок рівнянь і базується на аналітичній комп'ютерній реалізації. Запропоновано двоетапний алгоритм: спочатку будуються рівняння руху для голономної системи на основі векторно-матричної форми принципу д'Аламбера-Лагранжа, а потім виконується їх приведення до псевдокоординат за допомогою спеціальної матриці похідних залежних узагальнених швидкостей за псевдошвидкостями, яка отримується комп'ютерним аналітичним диференціюванням рівнянь неголономних в'язей. Такий спосіб дозволяє автоматично отримати рівняння мінімальної розмірності та привести їх до нормальної форми Коші, яка є зручною для чисельного інтегрування. Для тестування запропонованого алгоритму було використано спеціальну систему комп'ютерної алгебри КиДиМ, яка призначена для кінематичних і динамічних розрахунків складних механічних систем. Було продемонстровано ефективність підходу на класичному прикладі кочення кулі в сферичні поверхні, де неголономні обмеження природно враховуються через псевдошвидкості. Для наочного представлення результатів розрахунків було використано кватерніон орієнтації кулі і на його підставі розраховано кути Крилова за оригінальною методикою. Було обґрунтовано, що застосування псевдокоординат і псевдошвидкостей дозволяє отримати суттєво більш прості динамічні рівняння, а використання кватерніону знімає проблеми вироджуваності обертених кінематичних рівнянь. Це відкриває нові можливості для моделювання та керування сучасними робототехнічними пристроями.

Ключові слова: неголономні системи, псевдокоординати, кватерніони, динаміка твердих тіл, робототехніка, принцип д'Аламбера-Лагранжа, форма Коші

Y. M. ANDRIEIEV, O. O. HOLOVNYA

VECTOR-MATRIX EQUATIONS OF DYNAMICS OF DISCRETE NON-HOLONOMIC MECHANICAL SYSTEMS IN QUASI-COORDINATES AND QUATERNIONS

The article discusses topical issues of modelling the dynamics of non-holonomic mechanical systems, which are widely used in modern robotics. The relevance of the topic is driven by the rapid advancement of complex robotic devices, such as spherical robots and wheeled mobile robots, which typically contain non-holonomic constraints like rolling without slipping. Traditional methods based on generalized coordinates usually result in cumbersome equations that complicate the automation of calculations and the analysis of mechanical system control. The article proposes a more efficient method based on the use of quasi-coordinates, quasi-velocities, and quaternions. This approach significantly simplifies the description of system dynamics, reduces the order of the equations, and is based on analytical and computer implementation. A two-stage algorithm is proposed: first, equations of motion for a holonomic system are derived in vector-matrix form using the d'Alembert-Lagrange principle; and then, these equations are transformed to quasi-coordinates employing a special matrix of partial derivatives of dependent generalized velocities with respect to quasi-velocities, computed via symbolic differentiation of the non-holonomic constraint equations. This method allows one to automatically obtain equations of minimum dimension and reduce them to Cauchy normal form, which is convenient for numerical integration. To test the proposed algorithm, a special computer algebra system, KiDyM, was used, which is designed for kinematic and dynamic calculations of complex mechanical systems. The effectiveness of the method was illustrated through the classical example of a sphere rolling inside a spherical surface, where non-holonomic constraints are naturally taken into account through quasi-velocities. For visual representation of the calculation results, the quaternion orientation of the ball was used, and based on it, the Krylov angles were calculated using the original method. It was shown that the use of quasi-coordinates and quasi-velocities allows for significantly simpler dynamic equations, and the use of quaternions avoids singularities of inverse kinematic equations. This opens up new possibilities for modelling and controlling modern robotic devices.

Key words: non-holonomic systems, quasi-coordinates, quaternions, multibody dynamics, robotics, d'Alembert-Lagrange principle, Cauchy normal form

Вступ. Останні роки характеризуються стрімким розвитком науки у галузі робототехніки, що, в свою чергу, супроводжується зростанням складності механічних систем. Найбільш популярним засобом пересування сучасних роботів залишається і поширюється кочення. Є роботи, що використовують традиційні схеми – велосипедну, з диференціальним приводом на двох, трьох, чотирьох колесах, з'явилися роботи, що котяться на одному колесі (рис. 1а), на одній кулі (рис. 1б), на омні-колесах (рис. 1в). Такі системи

містять неголономні обмеження. Традиційні методи моделювання динаміки таких пристроїв використовують алгоритми складання динамічних рівнянь на підставі ручних технологій, частіше всього побудовані на узагальнених координатах, в якості яких виступають кути Ейлера, Крилова, літакові. Алгоритми і програми розрахунку таких моделей носять унікальний характер, пристосовані до розв'язання задач тільки конкретного типу роботів, погано піддаються автоматизації обчислень.

© Ю. М. Андрєєв, О. О. Головня 2025



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Сучасні дослідження підтверджують цю тенденцію. Систематичний огляд 2024 року [1] свідчить, що більшість моделей сферичних роботів досі створюються вручну за допомогою методів Ньютона-Ейлера або класичного підходу Лагранжа, тоді як універсальні аналітичні алгоритми автоматичного складання рівнянь наразі є малопоширеними. Також робота 2021 року [2] є прикладом, де розроблено динамічну модель гібридного транспортного засобу, що котиться й літає, що вказує на індивідуальний і трудомісткий характер моделювання для інноваційних конструкцій. Огляд використання кутів Ейлера та параметрів Ейлера (кватерніонів) у системах твердих тіл з неголономними обмеженнями [3] підкреслює чисельні труднощі, зокрема виродження обернених кінематичних рівнянь, через що потрібні альтернативні способи задання орієнтації.

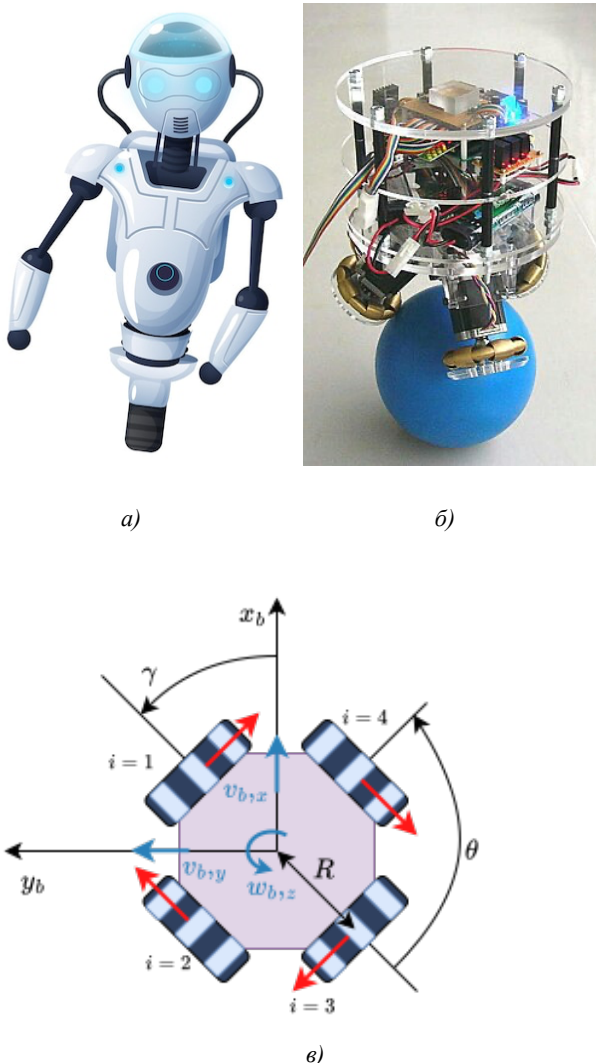


Рис. 1 – Конструкції опор котіння роботів

В статті дається теоретичне обґрунтування аналітичному комп'ютерному засобу складання рівнянь динаміки дискретних моделей механічних систем з урахування неголономних в'язей з

використанням узагальнених координат з незалежними і залежними швидкостями. Останні аналітично виражаються через обрані псевдошвидкості, що дозволяє аналітично визначити спеціальну матрицю, яка приводить отримані для відповідної голономної системи рівняння динаміки до псевдокоординат. При цьому використовується звісний алгоритм взяття похідних від функцій узагальнених координат за псевдокоординатами. Крім того, так як в таких системах може бути проблема з виродженням обернених кінематичних рівнянь, то пропонується користуватися кватерніонами для задання орієнтації тіл, що котяться.

Застосування псевдокоординат і псевдошвидкостей дозволяє значно спростити вираз динамічних характеристик. Це також сприяє зменшенню порядку рівнянь завдяки врахуванню неголономних в'язів. Такий підхід є особливо ефективним для дискретних систем твердих тіл із просторовим рухом, де псевдошвидкості зазвичай представлені через проєкції кутових швидкостей на осі, пов'язані з тілами.

Класичним прикладом служать рівняння Ейлера для твердих тіл. У випадку неголономних систем, колісні мобільні роботи чи сферичні роботи [4, 1], цей метод вдало поєднується з принципом д'Аламбера-Лагранжа. Це дає змогу виключати залежні варіації, формуючи векторно-матричні рівняння мінімальної розмірності [5].

У межах цієї роботи для автоматизації побудови рівнянь і реалізації запропонованих алгоритмів використовується спеціальна система комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ). Вона призначена для розв'язання кінематичних та динамічних розрахунків складних механічних систем. Ця система постійно розвивається та успішно використовується для розв'язання як прямих, так і обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв довільної структури [6, 7]. Що в свою чергу обумовлює доречність її використання в даній роботі.

Незважаючи на наявність теоретичних напрацювань щодо псевдошвидкостей [5] та кватерніонів [8], у літературі досі бракує прикладів універсального аналітичного комп'ютерного методу, який би автоматично формував рівняння для голономної системи, а потім аналітично приводив їх до незалежних псевдошвидкостей за допомогою спеціальної матриці та інтегрував кватерніони для усунення сингулярностей обертання в дискретних системах твердих тіл з неголономними обмеженнями.

Головною метою роботи є розробка та теоретичне обґрунтування такого універсального двоетапного аналітичного алгоритму в середовищі системи КіДиМ. Наукова новизна запропонованого підходу полягає в тому, що розроблено і реалізовано аналітичний алгоритм, який за вихідним описом механічної моделі автоматично будує рівняння голономної системи, а потім за рівняннями неголономних в'язей формує матрицю, що приводить рівняння до незалежних псевдошвидкостей, а також інтегрує кінематичні

рівняння в кватерніонах як узагальнених координатах безпосередньо в автоматизований процес побудови динамічних рівнянь.

Практичні переваги методу полягають у зменшенні порядку системи рівнянь на кількість залежних узагальнених координат в рівняннях неголономностей, повній автоматизації та уніфікації моделювання для різних типів неголономних роботів (колісних, сферичних, гібридних), усуненні сингулярностей оберненої кінематики та значному спрощенні подальшого синтезу законів керування й чисельного аналізу.

Таким чином, запропонований підхід дозволяє перейти від ручного індивідуального моделювання до універсального аналітичного комп'ютерного розрахунку.

Сучасній робототехніці притаманне широке використання для пересування механізмів процесу котіння. Причому – котіння неплоского. Динамічний аналіз і синтез таких механізмів суттєво ускладнюється тим, що відповідна механічна модель повинна включати неголономність в'язей. Складання динамічних рівнянь вручну приводить до неможливості узагальнити такі алгоритми з урахуванням можливостей сучасних комп'ютерів. Річ у тому, що процес отримання рівнянь динаміки таких систем потребує досить складної аналітичної роботи дослідника. Така робота потребує високої кваліфікації дослідника і пов'язана з високим ризиком помилок. Тому нам вбачається перспективним напрямом створення і реалізація комп'ютерних аналітичних алгоритмів на базі комп'ютерної алгебри. Основна ідея тут полягає в розробці компактного аналітичного опису механічних моделей динамічних процесів з урахуванням кінематичних неголономних в'язей. При цьому процес отримання математичної моделі і подальші розрахунки пропонується здійснювати автоматично комп'ютерними методами. Таким чином, актуальність роботи зумовлена широким використанням механізмів у робототехніці, коректна механічна модель яких визначається з урахуванням неголономності в'язей, і необхідністю розробки аналітичних комп'ютерних технологій для вдосконалення моделювання та їх розрахунків. Новим є аналітичний алгоритм, що пропонується в роботі і реалізується на сучасних комп'ютерах, який за аналітичною інформацією, представленою у вихідному файлі, будує також в аналітичному вигляді динамічні рівняння неголономних систем. Спочатку отримуються рівняння голономної системи без урахування неголономних в'язей, потім за рівняннями таких в'язей будується спеціальна матриця, множення якої на отримані рівняння призводить до рівнянь динаміки вже неголономної системи. Показано також, як можна в якості узагальнених координат використовувати кватерніони, що знімає проблему виведення обернених рівнянь кінематики.

Постановка задачі. У статті ставиться завдання розробки алгоритму автоматичного комп'ютерного

формування в аналітичній формі рівнянь динаміки неголономних механічних систем за спеціальним аналітичним описом механічної моделі з метою подальшого розв'язання задач динаміки.

Основою алгоритму є векторно-матрична форма загального рівняння динаміки (рівняння Д'Аламбера-Лагранжа), яке записується у формі рівняння з виключеними варіаціями залежних узагальнених координат.

Формульний опис механічної системи для цього включає силову і геометричну (кінематичну) складову. Силова складова подається списками інерційних і силових елементів, які містять найменування, характеристики та координати [9]. Геометрична складова задається формулами залежності локальних координат точок і кутів повороту тіл від узагальнених координат (геометричні структури) і (або) – формулами вираження швидкостей точок і кутових швидкостей тіл через узагальнені швидкості та узагальнені координати (диференціальні структури).

Новим є використання у даній статті кватерніонів для автоматичного формування диференціальних структур кутових швидкостей, які можуть входити в рівняння неголономних в'язей.

Для опису неголономних систем окремо записуються рівняння кінематичних в'язей, що не інтегруються, або надається відповідна інформація для програмного формування таких рівнянь на початковому (препроцесорному) етапі.

При заданні списку псевдошвидкостей із розміщених у вихідних даних їх виразів через узагальнені швидкості такі швидкості призначаються програмою незалежними і з вказаних виразів вже узагальнені швидкості повинні бути розв'язані через псевдошвидкості. В цьому випадку динамічні рівняння повинні бути «рівняннями у псевдокоординатах».

У статті розглядаються лінійні неголономні обмеження, зокрема обмеження типу кочення без ковзання [10]. Особливу увагу в цій роботі приділено використанню псевдокоординат та псевдошвидкостей для спрощення запису рівнянь, зниження їх порядку та оптимізації процесу обчислень.

Для формування аналітичних рівнянь була використана спеціальна система комп'ютерної алгебри КіДиМ, яка призначена для кінематичних і динамічних розрахунків складних механічних систем.

Пропоновані алгоритми реалізовано в ССКА КіДиМ для практичного тестування. Ефективність запропонованого двоетапного алгоритму (побудова рівнянь для голономної системи з подальшою проекцією на псевдошвидкості) демонструється на класичному прикладі кочення кулі на увігнутій сферичній поверхні. Неголономні обмеження вводяться в вихідні дані як аналітичні вирази узагальнених швидкостей через псевдошвидкості. Прямі кінематичні рівняння автоматично будуються за кватерніоном, що задається аналітичним описом послідовності елементарних поворотів тіла. Потім вони автоматично перетворюються на обернені кінематичні рівняння через псевдошвидкості – проекції

кутових швидкостей на осі пов'язаної з тілом системи головних центральних осей. Також автоматично отримуються формули для розрахунку кутів Ейлера, Крилова, літакових і т. і., в залежності від заданих користувачем, через компоненти кватерніона орієнтації.

Переваги використання псевдокоординат та псевдошвидкостей

Механічний стан систем прийнято описувати за допомогою набору незалежних координат і швидкостей. Однак практика показує, що застосування узагальнених координат у поєднанні з псевдошвидкостями виявляється більш ефективним, навіть для голономних систем. Використання псевдошвидкостей спрощує запис таких динамічних характеристик, як кінетична енергія, кінетичний момент, узагальнені імпульси, а також перші інтеграли диференціальних рівнянь [11, 12]. Завдяки цьому рівняння руху часто мають простішу форму, що робить їх зручнішими для аналізу. Прикладом може бути класичне представлення динамічних рівнянь Ейлера для опису руху твердого тіла, де як псевдошвидкості виступають проекції кутової швидкості тіла на його центральні головні осі інерції.

Псевдокоординати самі по собі не беруть участі ні в рівняннях зв'язків, ні в кінематичних, ні в диференціальних рівняннях руху. Замість цього в рівняннях присутні їхні похідні першого і другого порядку (псевдошвидкості і псевдоприскорення), а також узагальнені координати. Такі рівняння прийнято називати рівняннями в псевдокоординатах.

Хоча аналітичні вирази для узагальнених через псевдокоординати відсутні, операція диференціювання за псевдокоординатами визначена однозначно. Припустимо, що узагальнені швидкості ($\{\dot{q}_k\}$, $k = 1, 2, \dots, s$) виражаються через псевдошвидкості ($\{\dot{\pi}_j\}$, $j = 1, 2, \dots, p$) за допомогою лінійних кінематичних рівнянь, де коефіцієнти можуть залежати від узагальнених координат і часу

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} (q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{\pi}_j + \beta_k (q_1, q_2, \dots, q_s, t). \quad (1)$$

Згідно з правилом Лопітала, $\frac{\partial q_k}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\pi}_j}$, тому

$$\frac{\partial q_k}{\partial \pi_j} = \alpha_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad p \leq s.$$

Таким чином, для будь-якої функції від узагальнених координат $f(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ можна вивести правило диференціювання за псевдокоординатами у формі

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\pi}_j} = \sum_{k=1}^s \alpha_{kj} \frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (2)$$

Варіації узагальнених координат можна легко виразити через варіації псевдокоординат. Маємо з (1)

$$dq_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} (q_1, q_2, \dots, q_s, t) d\pi_j + \beta_k (q_1, q_2, \dots, q_s, t) dt.$$

Враховуючи, що при варіюванні параметри часу залишаються незмінними ($\delta t = 0$), тому

$$\delta q_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} \delta \pi_j. \quad (3)$$

Слід зазначити, що для голономних систем за незалежні змінні можна обирати узагальнені координати, а незалежні швидкості подати як комбінацію частини узагальнених швидкостей і частини псевдошвидкостей. При цьому сума кількостей незалежних узагальнених швидкостей і псевдошвидкостей повинна дорівнювати числу ступенів вільності, тобто кількості узагальнених координат. Можливі випадки, коли:

– всі узагальнені швидкості є незалежними, а псевдошвидкості відсутні.

– всі узагальнені швидкості залежать від псевдошвидкостей.

– серед незалежних швидкостей присутні як незалежні узагальнені швидкості, так і псевдошвидкості, через які виражаються залежні узагальнені швидкості. Як і у рівнянні (1), цей варіант також є узагальненням двох попередніх випадків.

Виходячи з цього висновку, розглянемо саме цей випадок. Припустимо, що механічний стан системи визначається s узагальненими координатами і s незалежними швидкостями, що включають r незалежних узагальнених швидкостей і p псевдошвидкостей, причому $r + p = s$. Для ясності викладу будемо розрізняти індекси узагальнених координат з незалежними швидкостями ($k = 1, 2, \dots, r$) від індексів узагальнених координат, швидкості яких залежать від псевдошвидкостей ($l = 1, 2, \dots, p$). Тоді ми маємо функції радіус-векторів центрів мас та кутових швидкостей тіл

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Cj} &= \vec{r}_{Cj} \left(\{q_k\}_{k=1,r}, \{q_l\}_{l=1,p}, t \right), \\ \vec{\omega}_j &= \vec{\omega}_j \left(\{q_k\}_{k=1,r}, \{q_l\}_{l=1,p}, \{\dot{q}_k\}_{k=1,r}, \{\dot{\pi}_l\}_{l=1,p}, t \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В нашому випадку отримаємо

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_{Cj} &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l, \\ \delta \vec{\omega}_j &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l. \end{aligned} \quad (5)$$

Далі запишемо суму віртуальних робіт

$$\begin{aligned} \delta A^u + \delta A^a &= \sum_{j=1}^n (\bar{F}_j - m_j \ddot{r}_{Cj}) \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k + \\ &\sum_{j=1}^n (\bar{F}_j - m_j \ddot{r}_{Cj}) \sum_{l=1}^p \frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \pi_l} \delta \pi_l + \\ &\sum_{j=1}^n \left\{ \bar{M}_{Cj} - \left([\bar{J}_j] \bar{\varepsilon}_j + \right. \right. \\ &\left. \left. \bar{\omega}_j \times [\bar{J}_j] \bar{\omega}_j \right) \right\} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \quad (6) \\ &\sum_{j=1}^n \left\{ \bar{M}_{Cj} - \left([\bar{J}_j] \bar{\varepsilon}_j + \right. \right. \\ &\left. \left. \bar{\omega}_j \times [\bar{J}_j] \bar{\omega}_j \right) \right\} \sum_{l=1}^p \frac{\partial \bar{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \pi_l} \delta \pi_l = 0. \end{aligned}$$

Перестановка порядку підсумовування в наведених формулах і об'єднання членів, що містять варіації узагальнених координат і псевдокоординат, дає дві групи рівнянь

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n (\bar{F}_j - m_j \ddot{r}_{Cj}) \frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial q_k} + \\ &\sum_{j=1}^n \left\{ \bar{M}_{Cj} - \left([\bar{J}_j] \bar{\varepsilon}_j + \bar{\omega}_j \times [\bar{J}_j] \bar{\omega}_j \right) \right\} \frac{\partial \bar{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} = 0 \\ &\sum_{j=1}^n (\bar{F}_j - m_j \ddot{r}_{Cj}) \frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \pi_l} + \quad (7) \\ &\sum_{j=1}^n \left\{ \bar{M}_{Cj} - \left([\bar{J}_j] \bar{\varepsilon}_j + \bar{\omega}_j \times [\bar{J}_j] \bar{\omega}_j \right) \right\} \frac{\partial \bar{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \pi_l} = 0 \\ &k = 1, 2, \dots, r \quad l = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Систему рівнянь (7) можна також записати у векторно-матричному вигляді за допомогою структурних матриць

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{aligned} &\tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^{uT} m_j \bar{a}_{Cj} + \\ &\tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^{uT} \left([\bar{J}_j] \bar{\varepsilon}_j^{(j)} + \right. \\ &\left. \bar{\omega}_j^{(j)} \times [\bar{J}_j] \bar{\omega}_j^{(j)} \right) \end{aligned} \right\} - \tilde{\mathbf{W}}_P^T \mathbf{P} = 0, \quad (8)$$

в якому відповідні матриці відрізняються від матриць вихідної системи лише способом формування часткових похідних за псевдокоординатами (2), що описаний вище. Це можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u &= \left[\frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial q_k} \dots \frac{\partial \bar{r}_{Cj}}{\partial \pi_l} \right], \quad \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u = \left[\frac{\partial \bar{\omega}_j^{(j)}}{\partial \dot{q}_k} \dots \frac{\partial \bar{\omega}_j^{(j)}}{\partial \pi_l} \right], \\ \tilde{\mathbf{W}}_P &= \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_k} \dots \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \pi_l} \right], \end{aligned}$$

де крім позначень, що приведені раніше, \mathbf{p} – вектор координат силових елементів моделі

Для отримання рівнянь розглянемо оригінальний метод, який важко реалізувати вручну, проте він ефективно виконується з використанням системи комп'ютерної алгебри, що дозволяє сформулювати рівняння виду (8) в аналітичному вигляді.

Розглянемо складові у рівняннях (8), які не містять (\mathbf{U}_0) і містять (\mathbf{U}_1) псевдоприскорення. Ці складові можна визначити шляхом підстановки нульових значень для псевдоприскорень в рівняння (8) ($\ddot{\boldsymbol{\pi}} = 0$) і подальшого віднімання з вихідних рівнянь отриманих складових

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}|_{\ddot{\boldsymbol{\pi}}=0}, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0.$$

Матриця інерції в цьому випадку визначається шляхом безпосереднього диференціювання

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \ddot{\boldsymbol{\pi}}} = \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \ddot{\boldsymbol{\pi}}}.$$

У такому випадку рівняння у формі Коші матимуть такий вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}\mathbf{w} + \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{U}_0, \quad (9)$$

де \mathbf{q} – множина узагальнених координат з незалежними швидкостями, \mathbf{v} – множина незалежних узагальнених швидкостей, \mathbf{p} – множина узагальнених координат з залежними швидкостями, що визначаються формулами (1), \mathbf{w} – множина псевдошвидкостей.

Динаміка неголономних механічних систем.

Однією з основних характеристик неголономних механічних систем у порівнянні з голономними системами є наявність додаткових кінематичних обмежень, які, у свою чергу, призводять до зменшення кількості незалежних узагальнених швидкостей у порівнянні з кількістю незалежних узагальнених координат. В результаті кількість незалежних узагальнених швидкостей виявляється меншою, ніж кількість незалежних координат (узагальнених координат). Для складання рівнянь динаміки неголономних систем існує безліч різних підходів. Серед них найпопулярнішими є методи, що ґрунтуються на рівняннях Лагранжа з невизначеними множниками, рівняннях Аппеля та рівняннях з виключеними залежними варіаціями [13, 14, 15].

У межах програмного комплексу КіДиМ було обрано реалізацію останнього із зазначених підходів. Цей вибір зумовлений кількома вагомими причинами. По-перше, дані рівняння ґрунтуються на основному варіаційному рівнянні механіки, з чого також отримуються рівняння для голономних систем в узагальнених і псевдокоординатах. По-друге, при їх використанні ми мінімізуємо число динамічних рівнянь, зводячи його до числа ступенів свободи. Також ці підходи дозволяють уникнути складання енергії прискорень, кінетичної та потенційної енергії, а також застосування складних математичних об'єктів, таких як триіндексні символи. Таким чином, алгоритм побудови динамічних рівнянь практично ідентичний алгоритму для голономних систем. Однак, у випадку наявності неголономних в'язей вихідні дані потрібно доповнити рівняннями, що описують неголономні в'язі. Ці рівняння записуються у вигляді диференціальних

виразів, які відображають залежності між швидкостями точок і тіл та незалежними узагальненими швидкостями (або псевдошвидкостями).

Отримаємо ці рівняння. У сучасній механіці розглядаються лише лінійні рівняння неголономних в'язей. Тому, нехай лінійні неголономні в'язі задані l однорідними рівняннями

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (10)$$

де \mathbf{A} – матриця розміру $l \times s$ – вона залежить від s узагальнених координат (зібраних у вектор $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$). Нехай ранг матриці \mathbf{A} буде l , тоді з рівнянь (10) можна виразити l узагальнених швидкостей $\dot{\mathbf{q}}_1 = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l\}$ через $s-l$ інших $\dot{\mathbf{q}}_2 = \{\dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, \dots, \dot{q}_s\}$. Тепер запишемо це в матричному вигляді

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{A}_2(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_2. \quad (11)$$

Як псевдошвидкості візьмемо незалежні узагальнені швидкості $\dot{\boldsymbol{\pi}} \equiv \dot{\mathbf{q}}_2$ або введемо спеціально псевдошвидкості, через які виразимо залежні узагальнені швидкості, тоді отримаємо

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{A}_2(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\pi}}. \quad (12)$$

Цей вираз, зазвичай, формується відразу на основі умов задачі. Таким чином, ми отримуємо зручний для подальшого аналізу і розрахунків вираз всіх узагальнених швидкостей через псевдошвидкості:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2\dot{\boldsymbol{\pi}} \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3]\dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\pi}} \quad (13)$$

Для неголономних систем (за аналогією із залежністю узагальнених швидкостей для голономної системи через псевдошвидкості (1)), загальна кількість незалежних швидкостей $\dot{\mathbf{q}}_2$ (псевдошвидкостей $\dot{\boldsymbol{\pi}}$) буде меншою за число узагальнених координат, а матриця \mathbf{V} буде прямокутною розміром $s \times (s-l)$. У формулі (13) матриця \mathbf{A}_3 у разі, якщо $\dot{\boldsymbol{\pi}} \equiv \dot{\mathbf{q}}_2$, буде одиничною. В інших випадках вона буде визначатися виразом, який пов'яже умовно незалежні узагальнені швидкості $\dot{\mathbf{q}}_2$ з відповідними псевдошвидкостями $\dot{\boldsymbol{\pi}}$.

У такому випадку, для стаціонарної системи

$$\dot{r}_{Cj} = \frac{\partial \tilde{r}_{Cj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_{R_j}^u \mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (14)$$

$$\ddot{r}_{Ci} = \frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}} \right) = \tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u \ddot{\boldsymbol{\pi}} + \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_{R_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}}$$

$$\dot{\omega}_j^{(j)} = \mathbf{W}_{M_j}^u \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_{M_j}^u \mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon}_j^{(j)} = \frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}} \right) = \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u \ddot{\boldsymbol{\pi}} + \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_{M_j}^u \dot{\boldsymbol{\pi}}$$

Тут $\mathbf{W}_{R_j}^u$, $\mathbf{W}_{M_j}^u$ – представляють структурні матриці координат центру мас j -го тіла, а також його кутової швидкості за узагальненими координатами. $\tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u$, $\tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u$ – аналогічно, але вже за псевдокоординатами.

За допомогою формул (14) і (15) ми можемо отримати вирази для «енергії прискорень». Що, в свою чергу, дозволить нам з їх допомогою в повній мірі описати інерційні властивості неголономної механічної системи.

Діючі в системі активні сили, як було показано раніше, характеризуються силовими елементами. Ці елементи включають в себе два компоненти: значення (проекції сили або моменту) і структурну складову (залежності від узагальнених координат декартових координат точок прикладання для сил, а також кутів повороту тіла для пар сил). Крім цього, вони можуть ще бути представлені через кінематичну структуру, яка визначається як залежність від узагальнених швидкостей (псевдошвидкостей) швидкостей точок прикладання сил і кутових швидкостей тіл для пар сил. Використовуючи кінематичні структури (13), стає можливим привести сили до псевдокоординат шляхом диференціювання структур силових елементів за псевдокоординатами за правилом (2). Це дозволяє виразити узагальнені сили через псевдокоординати, і тим самим отримати «псевдосили».

$$\mathbf{\Pi}_\pi = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} \right]^T \mathbf{Q}_q^a = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^T \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{W}_p^T \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{W}}_p^T \mathbf{P} \quad (16)$$

Тут $\mathbf{\Pi}_\pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{s-l}\}$ – вектор «псевдосил» розміру $s-l$, що відповідають псевдокоординатам, \mathbf{Q}_q^a – відображає вектор узагальнених активних сил, що відповідають узагальненим координатам, \mathbf{P}, \mathbf{p} – є векторами характеристик і структур силових елементів механічної моделі.

На основі наведених даних можна побудувати рівняння Аппеля для неголономної системи. Однак реалізація такого підходу пов'язана з досить громіздкими і складними перетвореннями.

Векторно-матричні рівняння для неголономних систем в псевдокоординатах

Більш раціональним способом отримання шуканих рівнянь є пряма підстановка узагальнених сил інерції тіл системи в принцип д'Аламбера-Лагранжа. Одночасно з цим, варіації узагальнених координат виражаються через залежності швидкостей, що визначаються псевдошвидкостями, через варіації псевдокоординат, як це виконано у формулах (6). В результаті були отримані рівняння (7) у векторній формі та рівняння (8) у матричній. Беручи до уваги вираз всього вектора узагальнених швидкостей через псевдошвидкості, наведений у формулі (13), отримуємо, що всі структурні матриці матимуть такий

вигляд (відповідно до правила диференціювання за псевдокоординатами)

$$\tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u = \left[\frac{\partial \tilde{r}_{C_j}}{\partial \mathbf{q}} \right] \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u = \left[\frac{\partial \tilde{\omega}_j^{(j)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_P = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{B}.$$

А, отже, матричне рівняння ((17) – див. [9]) ми можемо представити у формі, яка буде корисна в подальшому

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}^T \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{R_j}^{uT} m_j \tilde{a}_{C_j} + \\ \mathbf{W}_{M_j}^{uT} \left(\begin{array}{l} [\tilde{J}_j] \tilde{\varepsilon}_j^{(j)} \\ + \tilde{\omega}_j^{(j)} \times [\tilde{J}_j] \tilde{\omega}_j^{(j)} \end{array} \right) \right\} - \right. \\ \left. \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} \right] = 0. \quad (17)$$

Цей підхід дозволяє подати алгоритм побудови рівнянь динаміки неголономних систем у вигляді двох послідовних етапів. Спочатку формулюються рівняння системи без урахування неголономних в'язів в узагальнених координатах виду (8), а потім ці рівняння множаться зліва на транспоновану матрицю $\mathbf{B} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}$

з виразу (13). З цього стає очевидним, що рівняння для неголономної системи можна отримати з рівнянь для голономної системи шляхом їх комбінування з використанням коефіцієнтів, які визначаються через подання узагальнених швидкостей через псевдошвидкості (13).

З цього випливає, що рівняння, які відповідають незалежним узагальненим швидкостям, збігаються як для голономної системи, так і для неголономної. Для неголономної системи число рівнянь виду (17) виявляється меншим, ніж для голономної системи на різницю між числом узагальнених координат і числом залежних узагальнених швидкостей, тобто дорівнює числу незалежних швидкостей. Недостатні рівняння, необхідні для визначення всіх узагальнених координат, подаються у вигляді рівнянь (13). Незаважко помітити, що рівняння для неголономної системи типу (17) або для голономної системи типу (8) – це звичайні диференціальні рівняння другого порядку, тоді як рівняння (13) є рівняннями першого порядку. Таким чином, наявність додаткових неголономних в'язів знижує загальний порядок рівнянь для неголономної системи, порівняно з голономною. Це особливо наочно при розгляді форми Коші, що визначається через поєднання рівнянь (17) або (8) і (13). Для приведення рівнянь до форми Коші можна використовувати той самий метод, який був описаний вище (формули (9) і вище). Цей підхід досить просто реалізується в системі комп'ютерної алгебри, де рівняння виду (17) або (8) подані аналітично.

Розглянемо складові в рівняннях (17), які або включають, або не включають псевдоприскорення. Очевидно, це буде

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} \Big|_{\ddot{\boldsymbol{\pi}}=0}, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0.$$

У такому випадку форма Коші рівнянь (17) матиме такий вигляд

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}, \end{cases} \quad (18)$$

де $\mathbf{w} = \dot{\boldsymbol{\pi}}$ – вектор псевдошвидкостей,

$\mathbf{F} = -\mathbf{U}_0$ – вектор правих частин,

$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}$ – матриця інерції.

Для неголономних систем характерна наявність просторових рухів. У цьому випадку в ролі псевдошвидкостей виступають проекції кутових швидкостей тіл на осі систем координат, пов'язаних з самими тілами. Відповідно, для опису орієнтації таких тіл зручно застосовувати кватерніони, які в цьому контексті виконують функцію узагальнених координат [16]. Для їх обчислення використовуються обернені кінематичні рівняння в кватерніонах виду

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (19)$$

Такі рівняння входять до першої частини рівнянь (18).

Перевірка інтегрованості рівнянь неголономності (12) полягає в аналітичному обчисленні похідних коефіцієнтів цих рівнянь (12) за узагальненими координатами, а також їх попарному порівнянню за правилом «*i*-те рівняння – коефіцієнт при *j*-й узагальненій швидкості»; *j*-те рівняння – коефіцієнт при *i*-й узагальненій швидкості». Якщо всі порівнювані значення збігаються, система вважається голономною, в іншому випадку – неголономною.

Приклад використання пропозованих алгоритмів до розрахунку динаміки неголономної системи. Цей приклад наводиться тут не для демонстрації отриманих результатів розрахунків, а для демонстрації переваг використання пропозованого підходу до моделювання динаміки неголономних систем. Тут демонструється склад вихідних даних у аналітичній компактній формі, а також їх обробка та отримання рівнянь динаміки неголономної системи виключно в аналітичній формі. Для конкретизації наводяться і результати числових розрахунків.

Розглянемо рух важкої кулі радіусом *r* і масою *m*, що знаходиться на увігнутій сферичній виїмці радіусом *R* з центром у точці *A*, що показано на рис. 2.

Це приклад задачі неголономної механіки, до якої і в сучасних умовах приділяється достатньо уваги (див., наприклад, [17]). Вона відносно проста, однак розв'язати її традиційними «ручними» технологіями доволі складно.

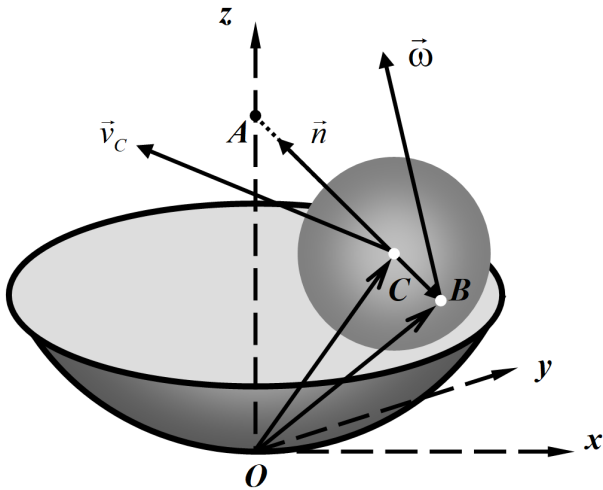


Рис. 2 – Куля в сферичній виймці

Становище кулі з центром у точці C визначимо узагальненими координатами – декартовими координатами центру мас кулі x_C, y_C у зв'язаній з виймкою системі координат $Oxyz$ (апліката z_C виражається через ці координати (див. нижче) і тому не є узагальненою координатою) та псевдокоординатами – кутами $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ повороту кулі щодо власних головних центральних осей координат, якими в цій задачі для однорідної кулі можна вважати осі, що паралельні осям Ox, Oy, Oz . Проекції кутової швидкості кулі на ці осі (псевдошвидкості) позначимо $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Геометрична в'язь виражається рівнянням

$$z_C = R - \sqrt{(R-r)^2 - x_C^2 - y_C^2} \quad (20)$$

Кінематична в'язь полягає в рівності абсолютних швидкостей точок торкання кулі та виймки – т. B (див. рис. 2). Для нерухомої виймки отримуємо

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overline{CB} = \vec{0}, \quad (21)$$

де всі вектори повинні бути задані у нерухомій системі координат, тобто

$$\vec{v}_C = \begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \dot{z}_C \end{bmatrix}, \quad \overline{CB} = a \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C - R \end{bmatrix}, \quad a = \frac{r}{R-r}.$$

Визначимо \dot{z}_C з виразу (20), отримаємо замість (21)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R-z_C} \end{bmatrix} + a \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C - R \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_C - a(\omega_y(R-z_C) + \omega_z y_C) \\ \dot{y}_C + a(\omega_x(R-z_C) + \omega_z x_C) \\ \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{(R-z_C)} + a(\omega_x y_C - \omega_y x_C) \end{bmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що вираз у 3-му рядку дорівнює нулю при рівності нулю перших двох, отримаємо умову (21) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= a[\omega_y(R-z_C) + \omega_z y_C], \\ \dot{y}_C &= -a[\omega_x(R-z_C) + \omega_z x_C]. \end{aligned} \quad (22)$$

Скориставшись критерієм неголономності [18], легко дійти висновку, що система, що розглядається, є

неголономною. Дійсно, наприклад $\frac{\partial^2 \dot{x}_C}{\partial \omega_y \partial z_C} = -a$, а

$$\frac{\partial^2 \dot{x}_C}{\partial z_C \partial \varphi_y} = 0, \quad \text{отже,} \quad \frac{\partial^2 \dot{x}_C}{\partial \omega_y \partial z_C} \neq \frac{\partial^2 \dot{x}_C}{\partial z_C \partial \varphi_y}.$$

Геометрію, кінематику та інерційні властивості кулі задамо у вихідних даних ССКА КіДиМ наступним записом, у середній секції якого записано закон перетворення від абсолютної системи координат до системи координат, пов'язаної з кулею

$$\text{Куля} | \mathbf{Sx}(x_C), \mathbf{Sy}(y_C), \mathbf{Sz}(z_C), \mathbf{Q}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) | m, J, J, J;$$

Тут $\mathbf{Sx}, \mathbf{Sy}, \mathbf{Sz}$ задають зсув системи координат на величину координат центру мас кулі; \mathbf{Q} вказує, що орієнтація кулі буде визначатися кватерніоном з компонентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; m, J, J, J – позначення маси і головних центральних моментів інерції кулі. Кватерніон $\mathbf{Q}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ формується трьома поворотами на кути Крилова і задається інструкцією **КВАТЕРНІОН**: $\mathbf{Q}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \mathbf{Ry}(\psi), \mathbf{Rx}(\theta), \mathbf{Rz}(\varphi)$.

Тут вказується, що кватерніон $\mathbf{Q}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ формується послідовними поворотами системи координат $Oxyz$ (див. рис. 2) на кути Крилова ψ, θ, φ навколо осей Oy, Ox (нового її положення), Oz (нового її положення).

Ця інформація дає змогу сформувати ССКА КіДиМ шість інерційних елементів з «характеристиками» і «координатами»

$$\mathbf{J} = \{m, m, m, J, J, J\},$$

$$\mathbf{a} = \{x_C, y_C, z_C, \omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}.$$

За формулою $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \circ \Lambda$, яка аналогічна формулі (19) і відрізняється від неї тим, що в даній задачі використовуються компоненти кутової швидкості в зовнішній відносно пов'язаній з кулею системі координат, формуються обернені кінематичні кватерніонні рівняння через згенеровані проєкції кутової швидкості кулі $\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}$

$$\begin{aligned} \lambda_0 't &= -0.5 \left(\lambda_1 \omega_{ХКуля} + \lambda_2 \omega_{УКуля} + \lambda_3 \omega_{ZКуля} \right); \\ \lambda_1 't &= 0.5 \left(\lambda_0 \omega_{ХКуля} + \lambda_3 \omega_{УКуля} - \lambda_2 \omega_{ZКуля} \right); \\ \lambda_2 't &= 0.5 \left(-\lambda_3 \omega_{ХКуля} + \lambda_0 \omega_{УКуля} + \lambda_1 \omega_{ZКуля} \right); \\ \lambda_3 't &= 0.5 \left(\lambda_2 \omega_{ХКуля} - \lambda_1 \omega_{УКуля} + \lambda_0 \omega_{ZКуля} \right); \end{aligned} \quad (23)$$

Також формується матриця повороту системи координат *Oxyz* до пов'язаної з кулею через параметри кватерніона – позначимо її $S_{Куля}$ з елементами $S_{ijКуля}$.

В початкових даних задається інструкція **ПСЕВДОШВИДКОСТІ**: $= \omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}$; і отримані рівняння неголономностей (22)

$$\begin{aligned} xC't &= a^*(\omega_{УКуля}*(R-zC) + \omega_{ZКуля}*yC); \\ yC't &= -a^*(\omega_{ХКуля}*(R-zC) + \omega_{ZКуля}*xC); \end{aligned}$$

За інформацією в інструкції **КВАТЕРНІОН** КіДиМ формує компоненти кватерніону через кути Крилова

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Але оскільки кватерніон $Q(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ задає орієнтацію кулі інструкцією **Куля**, то ці формули треба використати для виразу кутів Крилова через компоненти кватерніона. Це робиться за спеціальним аналітичним алгоритмом, який полягає в формуванні за інструкцією **КВАТЕРНІОН** з послідовності поворотів (в цьому випадку – на кути Крилова) такої ж матриці повороту, що і $S_{ijКуля}$, але через кути ψ, θ, φ , що записані в інструкції **КВАТЕРНІОН**. Шляхом порівняння елементів таких матриць в даному випадку отримуються шукані формули

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin(-S23_{Куля}); \\ \varphi &= \begin{cases} \operatorname{atan2}(-S21_{Куля}, -S22_{Куля}), \cos \theta < 0 \\ \operatorname{atan2}(S21_{Куля}, S22_{Куля}) \end{cases} \\ \psi &= \begin{cases} \operatorname{atan2}(-S13_{Куля}, -S33_{Куля}), \cos \theta < 0 \\ \operatorname{atan2}(-S13_{Куля}, -S33_{Куля}) \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Використовуючи структурні матриці за псевдошвидкістю $\vec{\omega} = \{\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}$, отримаємо рівняння руху кулі у формі (8)

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \{\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C\}}{\partial \{\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}} \right]^T \begin{bmatrix} m(\ddot{x}_C) \\ m(\ddot{y}_C) \\ m(\ddot{z}_C) \end{bmatrix} + \\ &\left[\frac{\partial \{\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}}{\partial \{\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}} \right]^T \left\{ \begin{bmatrix} J\dot{\omega}_{ХКуля} \\ J\dot{\omega}_{УКуля} \\ J\dot{\omega}_{ZКуля} \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} \right\} - \\ &- \left[\frac{\partial \dot{z}_C}{\partial \{\omega_{ХКуля}, \omega_{УКуля}, \omega_{ZКуля}\}} \right]^T (-mg) = \\ &= am \begin{bmatrix} 0 & -(R-zC) & -yC \\ (R-zC) & 0 & xC \\ yC & -xC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\ddot{x}_C) \\ (\ddot{y}_C) \\ (\ddot{z}_C) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J\dot{\omega}_{ХКуля} \\ J\dot{\omega}_{УКуля} \\ J\dot{\omega}_{ZКуля} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -yC \\ xC \\ 0 \end{bmatrix} (-mg) = 0. \end{aligned}$$

Остаточнo ,

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_{ХКуля} - am \{ (R-zC)\ddot{y}_C + yC(\ddot{z}_C + g) \} &= 0; \\ J\dot{\omega}_{УКуля} + am \{ (R-zC)\ddot{x}_C + xC(\ddot{z}_C + g) \} &= 0; \\ J\dot{\omega}_{ZКуля} + am \{ yC\ddot{x}_C - xC\ddot{y}_C \} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Саме такі рівняння формує ССКА КіДиМ для цієї системи. Це динамічні рівняння першого порядку відносно псевдошвидкостей (після підстановки сюди рівнянь неголономної (22) та геометричної (20) в'язі). Для отримання всієї системи диференціальних рівнянь сюди додаються рівняння (22) і (23) теж першого порядку. В результаті інтегрування таких рівнянь отримуються закони зміни узагальнених координат x_C, y_C центру кулі, параметрів Родрига-Гамільтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компонентів кватерніона орієнтації кулі. За формулами (24) можна отримати закони зміни кутів Крилова кулі, які більш наочно відображають її орієнтацію порівняно з компонентами кватерніона.

Як приклад розрахунку для параметрів $R=3\text{ м}; r=0.2\text{ м}; m=1\text{ кг}; a=r/(R-r); J=0.4mr^2; \Delta t=20\text{ с}$ та початкових умов $t(0), x_C(1.5), y_C(0), \lambda_0(1), \lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0), \omega_{ХКуля}(3), \omega_{УКуля}(2), \omega_{ZКуля}(0)$ на рис. 3. наведено траєкторію центру кулі в проєкції на вертикальну площину *Oyz*.

Висновки. Відповідно до постановки задачі, у статті розроблено алгоритм автоматичного комп'ютерного формування в аналітичній формі рівнянь динаміки неголономних механічних систем за спеціальним аналітичним описом механічної моделі для можливості подальших розрахунків задач динаміки.

Викладено аналітичне формування векторно-матричної форми загального рівняння динаміки

(рівняння Д'Аламбера-Лагранжа) у формі рівняння з виключеними варіаціями залежних узагальнених координат.

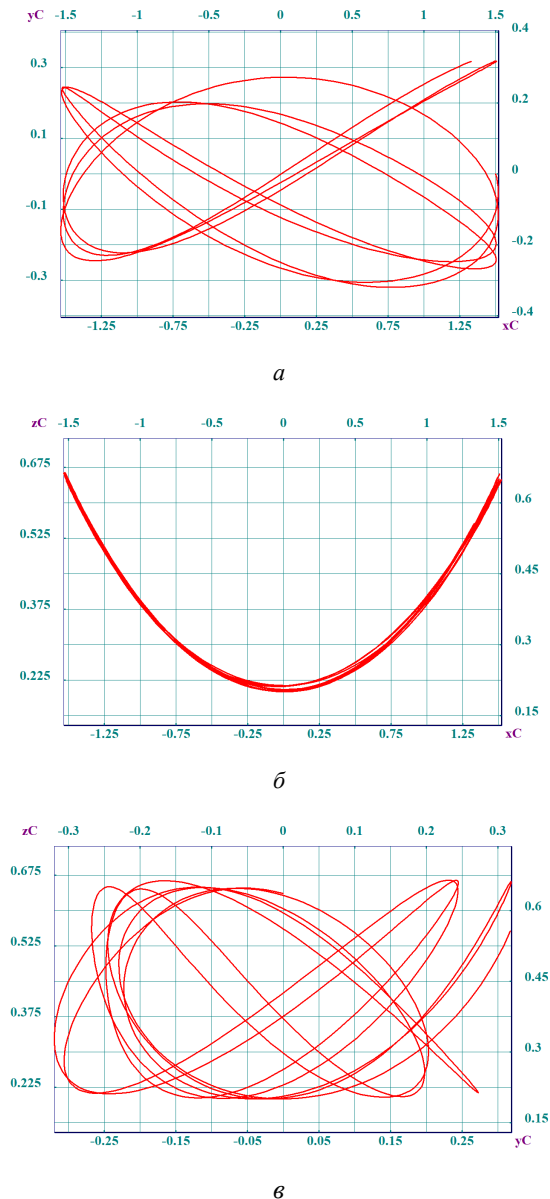


Рис. 3 – Траєкторія центру мас кулі в проєкції на площини: горизонтальну – а, сагітальну – б, фронтальну – в

Така форма має переваги перед рівняннями Апеля та рівняннями з невизначеними множниками Лагранжа. Порівняно з рівняннями Апеля тут не потрібно будувати вираз енергії прискорень і диференціювати його за узагальненими або псевдоприскореннями. Порівняно з рівняннями з невизначеними множниками тут зменшується загальна кількість динамічних рівнянь на кількість залежних узагальнених швидкостей, оскільки виключення залежних варіацій узагальнених координат додає відповідні їм динамічні рівняння до рівнянь, що відповідають незалежним варіаціям.

Підкреслимо, що для формування рівнянь динаміки за пропонуваним алгоритмом не потрібні ні кінетична, ні потенційна енергія, ні дисипативна функція Релея, ні, як уже сказано, енергія прискорень, оскільки необхідна інформація вводиться через силові та інерційні елементи з урахуванням геометричних і кінематичних в'язей.

Для задання таких в'язей показано можливість використання кватерніонів, які записуються або явно, або формуються за вказаними користувачем послідовностями поворотів тіл на кути Ейлера, Крилова, літакові тощо. В останньому випадку програмно будуються обернені формули розрахунку таких кутів через кватерніони.

У вихідних даних можна задавати рівняння кінематичних в'язей, що не інтегруються, або записати відповідну інформацію для програмного формування таких рівнянь на початковому (препроцесорному) етапі роботи програми. Якщо вказати в даних список псевдошвидкостей, то автоматично вони приймуться за незалежні, а узагальнені швидкості, які входили до їх формул, виражаються відносно призначених псевдошвидкостей як незалежних. Побудовані динамічні рівняння називаються у механіці «рівняннями в псевдокоординатах».

На класичному прикладі котіння кулі в сферичній виймці продемонстровано працездатність алгоритму. Використання отриманого алгоритму для розрахунків робототехнічних пристроїв в подальшому дасть можливість ефективно отримувати їх механічні і математичні моделі та розраховувати їх в процесах синтезу й аналізу.

Окреме питання має вибір псевдокоординат (псевдошвидкостей). Поки що це залишається користувачеві. Практика використання пропонуваного в роботі алгоритму і його програмної реалізації може дати можливість автоматизувати цей процес.

Цим питанням буде присвячено наступні дослідження.

Список літератури

1. Diouf A., Belzile B., Saad M., St-Onge D. Spherical rolling robots — Design, modeling, and control: A systematic literature review. *Robotics and Autonomous Systems*. 2024. 175. 104657. – <https://doi.org/10.1016/j.robot.2024.104657>
2. Atay S., Bryant M., Buckner G. The Spherical Rolling-Flying Vehicle: Dynamic Modeling and Control System. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2021. Vol. 13, no. 5. 050901. – <https://doi.org/10.1115/1.4050831>
3. Schröder K., Garcia G., Chacón R., Montenegro G., Marroquín A., Farias G., Dormido-Canto S., Fabregas E. Development and Control of a Real Spherical Robot. *Sensors*. 2023. Vol. 23, no. 8. 3895. – <https://doi.org/10.3390/s23083895>
4. He B., Xu F., Zhang P. Kinematics approach to energy efficiency for non-holonomic underactuated robotics in sustainable manufacturing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2022. 119. pp. 1123–1138. – <https://doi.org/10.1007/s00170-021-08305-7>
5. Mirtaheer S. M., Zohoor H. Quasi-velocities definition in Lagrangian multibody dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. 235(20). pp. 4679–4691. – <https://doi.org/10.1177/0954406221995852>
6. Андреев Ю. М., Дзюба В. Л. Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних

- пристроїв у ССКА КіДиМ. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. 2023. № 2. С. 34–40. – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293010>
7. Andrieiev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom. Applied Sciences. 2025. 15(5). 2840. – <https://doi.org/10.3390/app15052840>.
 8. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватерніонів у кінематиці твердого тіла. Препринт ІПМ ім. М. В. Келдиша. 2013. № 39. 23 с.
 9. Андреев Ю. М., Лавінський Д. В., Дружинін Є. І. Теоретичне обґрунтування для практичної реалізації аналітичного комп'ютерного побудування динамічних рівнянь в псевдокоординатах керованого польоту БПЛА. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. Харків : НТУ «ХПІ», 2025. № 1. С. 12–20. – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.332027>
 10. Chitour Y., Godoy Molina M., Kokkonen P. The rolling problem: overview and challenges. In: Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry. Springer INdAM Series. Cham : Springer, 2014. Vol. 5. pp. 103–122. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-02132-4_7.
 11. Bloch A., Marsden J., Zenkov D. Quasivelocities and symmetries in non-holonomic systems. Dynamical Systems. 2009. Vol. 24, no. 2. pp. 187–222 – <https://doi.org/10.1080/14689360802609344>
 12. Balseiro P., Sansonetto N. First integrals and symmetries of nonholonomic systems. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2022. Vol. 244. pp. 343–389 – <https://doi.org/10.1007/s00205-022-01753-9>
 13. Jarzębowska E. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2009. Vol. 71. pp. 118–131 – <https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.049>
 14. Phillips J. R., Amirouche F. Kane's equations for nonholonomic systems in bond-graph-compatible velocity and momentum forms. Proceedings of the 10th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics. 2021. pp. 1–12 – <https://doi.org/10.3311/ECCOMASMBD2021-171>
 15. Colombo L., León M., López-Gordón A. Contact Lagrangian systems subject to impulsive constraints. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2022. Vol. 55, no. 42. 425001 – <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac96de>.
 16. Bai Q.-S., Shehata M., Nada A. Review study of using Euler angles and Euler parameters in multibody modeling of spatial holonomic and non-holonomic systems. International Journal of Dynamics and Control. 2022. Vol. 10. pp. 1707–1725 – <https://doi.org/10.1007/s40435-022-00913-9>
 17. Борисов А. В., Кілін А. А., Мамасєв І. С. Качення однорідної кулі за динамічно несиметричною сферою. Нелінійна динаміка. 2010. Т. 6, № 4. С. 869–889.
 18. Неймарк Ю. І., Фуфаєв Н. А. Динаміка неголономних систем. Москва: Наука. Гол. ред. фізмат. літ., 1967. 520 с.
 5. Mirtaheri S. M., Zohoor H. Quasi-velocities definition in Lagrangian multibody dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 235, no. 20, pp. 4679–4691 – <https://doi.org/10.1177/0954406221995852>.
 6. Andrieiev Yu. M., Dziuba V. L. Udoskonaleniya alhorytm rozv'iazannia oberenykh zadach dynamiky robototekhnichnykh prystroiv u SSKA KiDiM [Improved algorithm for solving inverse problems of dynamics of robotic devices in SCAS KiDiM]. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika ta mitsnist mashyn, 2023, no. 2, pp. 34–40 – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293010>
 7. Andrieiev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom. Applied Sciences, vol. 15, no. 5, 2840. – <https://doi.org/10.3390/app15052840>
 8. Golubev Yu. F. Algebra kvaternionov v kinematike tverdogo tela [Algebra of quaternions in rigid body kinematics]. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, no. 39, 23 p.
 9. Andrieiev Yu. M., Lavinsky D. V., Druzhynin Ye. I. Teoretychne obgruntuvannya dlia praktychnoi realizatsii analitychnogo komp'yuternogo pobuduvannya dynamichnykh rivnyan' v psevdokoordinatakh kерованого pol'otu BPLA [Theoretical justification for the practical implementation of analytical computer construction of dynamic equations in pseudocoordinates of controlled UAV flight]. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika ta mitsnist mashyn. Kharkiv: NTU «KhPI», 2025, no. 1, pp. 12–20. – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.332027>
 10. Chitour Y., Godoy Molina M., Kokkonen P. The rolling problem: overview and challenges. In: Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry. Springer INdAM Series, vol. 5. Cham: Springer, pp. 103–122 – https://doi.org/10.1007/978-3-319-02132-4_7
 11. Bloch A., Marsden J., Zenkov D. Quasivelocities and symmetries in non-holonomic systems. Dynamical Systems, vol. 24, no. 2, pp. 187–222 – <https://doi.org/10.1080/14689360802609344>
 12. Balseiro P., Sansonetto N. First integrals and symmetries of nonholonomic systems. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 244, pp. 343–389 – <https://doi.org/10.1007/s00205-022-01753-9>
 13. Jarzębowska E. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 71, pp. 118–131. 131 – <https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.049>
 14. Phillips J. R., Amirouche F. Kane's equations for nonholonomic systems in bond-graph-compatible velocity and momentum forms. Proceedings of the 10th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics, pp. 1–12 – <https://doi.org/10.3311/ECCOMASMBD2021-171>
 15. Colombo L., León M., López-Gordón A. Contact Lagrangian systems subject to impulsive constraints. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 55, no. 42, 425001425001 – <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac96de>.
 16. Bai Q.-S., Shehata M., Nada A. Review study of using Euler angles and Euler parameters in multibody modeling of spatial holonomic and non-holonomic systems. International Journal of Dynamics and Control, vol. 10, pp. 1707–1725 – <https://doi.org/10.1007/s40435-022-00913-9>
 17. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Качення однорідного шара по динамічеськи несиметричній сфері [Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere]. Nelineinaya dinamika, vol. 6, no. 4, pp. 869–889.
 18. Neimark Yu. I., Fufaev N. A. Dinamika negolonomnykh sistem [Dynamics of nonholonomic systems]. Moscow: Nauka, Gl. red. fizmat. lit., 1967. 520 p.

References (transliterated):

1. Diouf A., Belzile B., Saad M., St-Onge D. Spherical rolling robots — Design, modeling, and control: A systematic literature review. Robotics and Autonomous Systems, vol. 175, 104657. – <https://doi.org/10.1016/j.robot.2024.104657>.
2. Atay S., Bryant M., Buckner G. The Spherical Rolling-Flying Vehicle: Dynamic Modeling and Control System. Journal of Mechanisms and Robotics, vol. 13, no. 5, 050901. – <https://doi.org/10.1115/1.4050831>.
3. Schröder K., García G., Chacón R., Montenegro G., Marroquín A., Farias G., Dormido-Canto S., Fabregas E. Development and Control of a Real Spherical Robot. Sensors, vol. 23, no. 8, 3895 – <https://doi.org/10.3390/s23083895>
4. He B., Xu F., Zhang P. Kinematics approach to energy efficiency for non-holonomic underactuated robotics in sustainable manufacturing. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 119, pp. 1123–1138. – <https://doi.org/10.1007/s00170-021-08305-7>.

Надійшла (received) 22.12.2025

Прийнята до друку (accepted) 26.12.2025

Опублікована (published) 29.12.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Андрєєв Юрій Михайлович (Andriev Yuriy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків; Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjejev@gmail.com

Головня Олексій Олександрович (Holovnia Oleksii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; тел.: +380 (95) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksiygolovnya@gmail.com

Бібліографічні описи / Bibliographic descriptions

Андрєєв Ю. М. Векторно-матричні рівняння динаміки дискретних неголономних механічних систем у псевдокоординатах та кватерніонах / Ю. М. Андрєєв, О. О. Головня // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 2 (2025). – С. 115 – 126. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2078-9130.

Andriev Yu. M. Vector-matrix equations of dynamics for discrete nonholonomic mechanical systems in quasi-coordinates and quaternions / Yu. M. Andriev, O. O. Holovnia // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2025. – No. 2 (2025). – pp. 115 – 126. Bibliography: 18 titles. – ISSN 2078-9130.