

**В. М. ГРИЩЕНКО**

## ВЕРТИКАЛЬНІ КОЛИВАННЯ НА ВОДІ ПОНТОННОЇ МОСТОВОЇ СПОРУДИ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В статті розглядається чисельне моделювання нестационарної вертикальної динаміки занурення-спливання моделі плавучої понтонної мостової конструкції викликаной рухом по ньому інерційного вантажу. Технології плавучих понтонних платформ є розповсюдженими в багатьох країнах та надійним інженерним рішенням успішного подолання водних перешкод. Переваги та зручність використання наплавних мостів (переправ) особливо проявляються у важких умовах воєнних дій, подій стихійного характеру як засіб швидкого та надійного відновлення руху; створення технічного прикриття транспортних сполучень, резервний засіб логістики при руйнуваннях. В основу чисельних розрахунків покладена розрахункова динамічна схема та математична модель мосту, розроблені в роботі [1]. Вона представляє собою єдину динамічну систему, в якій ланцюгова модель дискретного набору плаваючих понтонів взаємодіє з пружним водним середовищем та підтримує споруду в якості поплавок. Розглядається варіант плоских вертикальних коливань при шарнірному з'єднанні жорстких понтонів. В якості узагальнених координат приймаються величини занурення-спливання точок силового ланцюга мосту, що відповідають точкам з'єднання понтонів. Математична модель зі скінченним числом ступенів свободи, що представляє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь, отримана з використанням рівнянь Лагранжа II роду та відображає характерні особливості структури наплавних мостів. Серед сукупності зовнішніх силових впливів основна увага в роботі приділена фактору інерційного навантаження від рухомого вантажу, який зосереджено прикладений до настилу мосту. Його рух приймається заданим рівноприскореним або рівноуповільненим. Спочатку лінійна частина диференціального оператора задачі приводиться до діагональної форми, а потім всієї задачі до нормальної форми Коші. Чисельні результати поведінки отримані методом Рунге-Кутта на прикладі моделі, в якій обмежились чотирма платформами. Результати наведені у вигляді графіків залежності вертикальних коливань від швидкості руху транспорту, його положенню вздовж мосту, від зупинки руху посеред платформи та дають загальне уявлення про характер поведінки споруди та рівень коливань. До результатів роботи можна віднести розроблені розрахункову та математичну моделі невеликої за числом ступенів свободи схеми споруди, результати моделювання її поведінки при різних режимах проходження вантажу. Відмітимо також можливість розширеного використання моделі в дослідженнях шляхом врахування дії інших факторів та режимів (дію потоків декількох рухомих навантажень, варіювання параметрами моделі мосту та вантажів, зовнішніх силових факторів).

**Ключові слова:** понтонна мостова конструкція, динамічна модель зі скінченним числом ступенів свободи, рухоме навантаження, результати чисельного моделювання

**V. GRISCHENKO**

## VERTICAL VIBRATIONS ON WATER OF A PONTOON BRIDGE STRUCTURE UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD

The article deals with the numerical simulation of the unsteady vertical dynamics of the immersion-surfacing of a floating pontoon bridge structure model caused by the movement of an inertial load along it. Floating pontoon platform technologies are widespread in many countries and are a reliable engineering solution for successfully overcoming water obstacles. The advantages and convenience of using floating bridges (crossings) are especially evident in difficult conditions of military operations, natural disasters as a means of quick and reliable restoration of traffic; creating technical cover for transport connections, a backup means of logistics in case of destruction. The basis of numerical calculations is the calculated dynamic scheme and mathematical model of the bridge, developed in the work [1]. It represents a single dynamic system in which a chain model of a discrete set of floating pontoons interacts with an elastic water medium and supports the structure as floats. The variant of plane vertical oscillations with a hinged connection of rigid pontoons is considered. The values immersion-surfacing of the points of the bridge power chain corresponding to the points of connection of the pontoons are taken as generalized coordinates. A mathematical model with a finite number of degrees of freedom, which is a system of nonlinear differential equations, is obtained using Lagrange equations of the second kind and reflects the characteristic features of the structure of floating bridges. Among the set of external force influences, the main attention in the work is paid to the inertial load factor from the moving load, which is applied at a point on the bridge deck. Its motion is assumed to be uniformly accelerated or uniformly decelerated. First, the linear part of the differential operator of the problem is reduced to a diagonal form, and then the entire problem to the normal Cauchy form. Numerical results of the behavior are obtained by the Runge-Kutta method on the example of a model in which four platforms are limited. The results are presented in the form of graphs of the dependence of vertical vibrations on the speed of transport, its position along the bridge, and on the stop of traffic in the middle of the platform and give a general idea of the nature of the structure's behavior and the level of vibrations. The results of the work include the developed computational and mathematical models of the structure's scheme with a small number of degrees of freedom, the results of modeling its behavior under different modes of cargo passage. We also note the possibility of extended use of the model in research by taking into account the action of other factors and modes (the action of flows of several moving loads, variation of the parameters of the bridge model and loads, external force factors).

**Keywords:** pontoon bridge structure, dynamic model with a finite number of degrees of freedom, moving load, numerical modeling results

**Вступ.** Понтонно-мостові засоби часто використовуються для переправлення людей, техніки, майна в місцевостях покритих водою. Прикладом можуть бути наплавні мости - плавучі мости через канали, затоки, що слугують важливою ланкою

сполучення для жителів з питань постачання та вантажоперевезень. Особливо відчутна зручність та переваги застосування наплавних мостів (переправ) в складних умовах. Якісне відновлення руху за короткий час, форсування перешкод, створення технічного

© В. М. Грищенко 2025



**Дослідницька стаття:** Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



прикриття транспортних сполучень поряд з відновленням зруйнованих (дублювання мостів). Це також допоміжні засоби логістики, побудовані в стислі терміни на короткий час (рис. 1).



Рис. 1 – Переправа через річку, яка налаштована з майна ПМП [2]

Руйнування, яких зазнала Україна в період воєнних дій масштабні. При відновленні порушених комунікацій, транспортних шляхів надійною ланкою можуть стати наведені понтонні перепади.

Понтонні конструкції різноманітні, поділяються на різні види за призначенням, конструктивними особливостями, такими як типи опор, ширина проїзної частини, довжина прольотів тощо [3,4]. Вони знаходять застосування у нафтовидобуванні в акваторіях, при проведенні розвідувальних геологічних робіт, будівництві річкових та морських споруд. Наплавні мости - це зручне інженерне рішення для подолання водних перешкод, яке використовується давно і в багатьох країнах. Наплавні мости, понтонні мости представляють собою плавучі інженерні конструкції, що призначені для забезпечення переправ на річках, озерах, морських ділянках. Вони складаються з окремих секцій, що тримаються на воді на понтонах, або понтонних опорах. Поеднання всіх секцій в основний транспортний ланцюг може відбуватись по різним схемам. Понтони виготовляють металевими, пластиковими, з бетону, звареними, герметично закритими та водонепроникними. Припускається, що їх занурення на воді пропорційне зовнішньому навантаженню, коли зберігається баланс з гідростатичними силами спливання. Тому розрахункова модель може бути представленою у вигляді системи матеріальних тіл на пружній основі. Сили пружної основи визначаються пропорційними в залежності від площі мокрої основи понтону.

Мостові конструкції, закріплені на понтонах, мають велику вантажопідйомність та можуть сприймати значні силові навантаження в десятки та сотні тонн. Вони працюють в несприятливих природно-кліматичних умовах (вітрове навантаження, течія, стихія, тощо). Статичні методи розрахунку всього кінематичного ланцюга мосту та окремих схем несучої частини конструкції дають основні (базові) оцінки міцності та деформування споруди. Поряд з цим несучі конструкції піддаються також великим динамічним навантаженням [5-10]. Одним з таких факторів впливу є інерційна складова сил від руху вантажу по настилу основного ланцюга мосту. Ці

рухомі навантаження поряд з іншими можуть суттєво впливати на поведінку споруди [11-13]. Характер та рівень реакцій споруди можна визначити по результатам динамічного моделювання [14-18]. Натомість в сучасній вітчизняній літературі досліджень динамічної поведінки плаваючих мостових споруд небагато. В даній роботі розглядається чисельне дослідження поведінки та рівня реагування моделі понтонно-мостової перепади при різних режимах проходження інерційного вантажу по його настилу.

**1. Постановка задачі. Динамічна модель понтонно-мостової споруди зі скінченим числом ступенів свободи.** Робота присвячена чисельному аналізу вертикальної динаміки на воді моделі плавучої понтонної споруди, яка викликана рухом екіпажу по настилу прольотів. За основу прийнята динамічна модель та математичні рівняння коливань, розроблені в роботі [1]. Модель зі скінченим числом ступенів свободи достатньо проста та наближено описує взаємодію корпусних частин мосту разом зі встановленим на ньому устаткуванням з навколишнім водним середовищем і іншими факторами впливу.

Сама модель включає інерційні характеристики понтонів при можливих вертикальних переміщеннях та поворотах і параметри пружної основи окремих елементів динамічної системи.

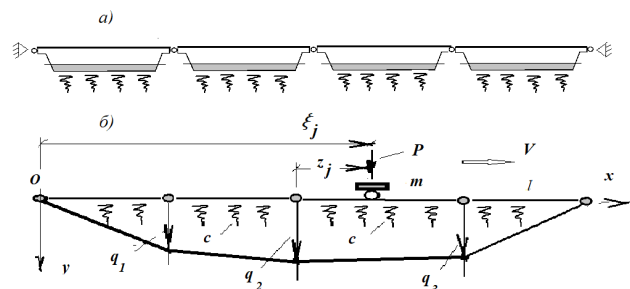


Рис. 2 – Модель плавучого понтонного мосту з рухомих навантаженням: а - схема моделі; б – розрахункова динамічна модель

Моделювання поведінки конструкції проводиться шляхом інтегрування диференціальних залежностей її взаємодії з оточуючим середовищем. При проведенні обчислень обмежились прикладом мосту з чотирма секціями - понтонами (рис.2), які вважаються абсолютно жорсткими. Загальна система координат  $xOy$  встановлена на лівому краї та вибрана в положенні статичної рівноваги між зовнішнім навантаженням та силами спливання гідростатики. В якості узагальнених координат прийняті вертикальні переміщення шарнірних точок з'єднання сусідніх понтонів  $q_1, q_2, q_3$ , які враховують їх повороти та визначають для моделі три ступені свободи.

$M, m$  - маса кожної з секцій та рухомого вантажу;

$l$  - довжина кожної з секцій;

$\mu$  - погонна маса секції;  $\mu \cdot l = M$ ;

$P = m \cdot g$  - вага рухомого екіпажу;

$V$  - величина швидкості руху транспорту по настилу платформи призначається у вигляді (1):

$$V = V_0 + a_0 \cdot t. \quad (1)$$

Тобто вважається можливим здійснення ним прискореного або уповільненого руху. При виконанні переправи екіпаж переміщується з однієї секції на іншу, причому приймається його зосереджене прикладання на платформі.

$j$  – номер активної секції, в межах якої в даний час рухається екіпаж; ( $j = 1, 2, 3, 4, \dots$ ).

$\xi_j$  – відстань від початку системи координат, подолана транспортом при рухові вздовж платформи:

$$\xi_j = \xi_{j0} + V_0 \cdot t + a_0 \cdot t^2/2.$$

$z_j$  – значення пройденої відстані відносно початку свого понтону:

$$z_j = \xi_j - (j - 1) \cdot l.$$

Узагальнені координати фактично визначають величини занурень точок основного ланцюга мосту, які відповідають точкам з'єднань сусідніх секцій. При складанні диференціальних залежностей були визначені кінетична, потенціальна енергії та використані рівняння Лагранжа II роду.

**2. Математичні рівняння вертикальних коливань моделі та побудова алгоритму обчислень.** Основна система диференціальних рівнянь вертикальних коливань на воді моделі наплавного мосту при прийнятих припущеннях побудована в [1] і для чотирьох понтонів має вигляд:

$$\ddot{q}_{s-1} + 4\ddot{q}_s + \ddot{q}_{s+1} + 6 \frac{m}{M} [\ddot{q}_{j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}] * \\ * [\delta_{s,j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}] = \\ = \frac{6}{M} Q_s - k^2 \cdot (q_{s-1} + 4q_s + q_{s+1}) - 6 \frac{m}{M} [-2\dot{q}_{j-1} \frac{\dot{z}_j}{l} - \\ - q_{j-1} \frac{\ddot{z}_j}{l} + 2\dot{q}_j \frac{\dot{z}_j}{l} + q_j \frac{\ddot{z}_j}{l}] \cdot [\delta_{s,j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}];$$

( $s=1,2,3$ ) - номер узагальненої координати;

( $j=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ) - номер поточної секції, на якій може знаходитись навантаження.

У цих співвідношеннях  $k^2 = cl/M$  і представляє собою квадрат власної частоти вертикальних коливань понтонної системи на воді без екіпажу. Система рівнянь потребує попередніх перетворень та підготовки до зручної форми перед виконанням обчислень. Диференціальний лінійний динамічний оператор в матричній формі, що лежить в основі цих рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & \cdot \\ 1 & 4 & 1 \\ \cdot & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 & \cdot \\ 1 & 4 & 1 \\ \cdot & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Якщо виконати ліве перетворення рівняння з матрицею  $v^T$ , яка має наступний вигляд:

$$v^T = \begin{bmatrix} \frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{15}{56} \end{bmatrix},$$

то рівняння (3) набуде канонічного (діагонального) виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Виконаємо аналогічне ліве перетворення  $v^T$  і для нелінійної системи коливань моделі. Система (2) набуде такого виду:

$$\ddot{q}_p + 6 \frac{m}{M} [\ddot{q}_{j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}] [v_{j-1,p} (1 - \frac{z_j}{l}) + v_{jp} \frac{z_j}{l}] = \\ = -k^2 q_p + \frac{6}{M} \sum_{s=1}^3 v_{s,p} Q_s - 6 \frac{m}{M} [-2\dot{q}_{j-1} \frac{\dot{z}_j}{l} - q_{j-1} \frac{\ddot{z}_j}{l} + \\ + 2\dot{q}_j \frac{\dot{z}_j}{l} + q_j \frac{\ddot{z}_j}{l}] \cdot [v_{j-1,p} (1 - \frac{z_j}{l}) + v_{jp} \frac{z_j}{l}].$$

При цьому:

$$\dot{z}_j = \dot{\xi}_j = V_0 + a_0 t; \quad \ddot{z}_j = \ddot{\xi}_j = a_0.$$

Тепер введемо наступні позначення:

$$V_s = \delta_{s,j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}; \quad (s=1,2,3);$$

$$W_p = \frac{6}{M} [v_{j-1,p} (1 - \frac{z_j}{l}) + v_{jp} \frac{z_j}{l}]; \quad (p=1,2,3);$$

$$b_p = \frac{6}{M} \sum_{s=1}^3 v_{s,p} Q_s - m \cdot (\frac{\dot{z}_j}{l} \dot{q}_{j,j-1} + \frac{\ddot{z}_j}{l} q_{j,j-1}) * \\ * W_p; \quad (p=1,2,3);$$

$$\text{де: } q_{j,j-1} = q_j - q_{j-1}.$$

Після врахування цих позначень система нелінійних рівнянь спрощується:

$$\ddot{q}_p + m \cdot [\ddot{q}_{j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}] \cdot W_p = b_p - k^2 q_p. \quad (4)$$

Позначимо також коефіцієнт, що входить до складу цього рівняння (4), як  $G$ :

$$G = \ddot{q}_{j-1} (1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}.$$

Нарешті система нелінійних диференціальних рівнянь (2) коливань моделі мосту на воді після ряду введених перетворень представляється у формі, яка приймається за основну для формування алгоритму чисельного аналізу задачі:

$$\ddot{q}_p = B_p = (-m \cdot G \cdot W_p + b_p - k^2 q_p); \quad (5) \\ (p=1,2,3).$$

Для чисельного інтегрування використовується стандартна процедура методу Рунге-Кутта четвертого порядку бібліотеки символьного моделювання після приведення рівнянь (5) до нормальної форми Коші першого порядку.

З цією метою вводиться вектор невідомих  $x$ :

$$x = \{q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3\}$$

та система диференціальних рівнянь їх зміни в силу виконання залежностей (5):

$$\dot{x} = Z; \quad (6)$$

або в розвернутому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = Z = \begin{bmatrix} x_2 \\ B_1 \\ x_4 \\ B_2 \\ x_6 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

Система рівнянь (6) надає можливість визначати динаміку вертикальних вібрацій, містить параметри моделі мосту та параметри рухомого екіпажу для проведення аналізу їх впливу на поведінку переправи.

**3. Результати динамічної поведінки моделі понтонного мосту при дії рухомого вантажу.** На основі розробленого алгоритму проведені розрахунки динамічної реакції моделі понтонного мосту при рухові екіпажу по настилу платформи в різних режимах, з різними швидкостями. Для чисельних розрахунків були прийняті такі параметри моделі:

$$\begin{aligned} n &= 4; & l &= 4 \text{ м}; & b_0 &= 6 \text{ м}; \\ M &= 4000 \text{ кг}; & m &= 500 \text{ кг}; & c &= 58.86 \text{ кН/м}^2; \\ k &= 7.67 \text{ 1/с}. \end{aligned}$$

При розрахунках варіювалась швидкість подолання транспортом всього мосту з виходом на прибережну ділянку. При цьому розглядався випадок наближення швидкості руху до кратної частоти власних вертикальних коливань моделі. Розглянутий також випадок гальмування та зупинки рухомої маси на одній з платформ (без виїзду на протилежну сторону).

**3.1. Рух екіпажу зі швидкістю  $V = 10 \frac{\text{км}}{\text{г}}$  з виходом на другий берег.** Перший результат відповідає пересуванню екіпажу зі швидкістю 10 км/г або 2.78 м/с. Зауважимо, що на розрахунковій моделі (рис. 2) за додатній напрямок для узагальнених координат  $q_1, q_2, q_3$  вибраний вертикальний вниз. Тому для зручності сприйняття на графіках показані їх від'ємні значення, які відповідають фізичному зануренню точок. Для орієнтовного визначення на графіках точок місцезнаходження рухомого вантажу, відповідних моментам часу  $t$ , введена величина відносного до довжини мосту просування екіпажу  $\frac{\xi_j}{4l}$ .

На рис 3 наведені графіки переміщень узагальнених координат  $-q_1, -q_2, -q_3$ . А на рис 4 по осі ординат відкладене відносно до довжини мосту просування екіпажу в залежності від  $t$ . Наприклад, видно, що на 5.76 с екіпаж подолав міст (точка 4l,  $\frac{\xi_j}{4l}=1$ ) і далі рухається по узбережжю. Результати показують, що найбільших значень занурення точок з'єднань понтонів набувають в ті моменти, коли повз них рухається екіпаж (біля 0.04 м). А форма деформованого мосту наближено нагадує одну з форм власних коливань. Після проходження екіпажу спостерігається синхронізація вільних коливань узагальнених координат. Безумовно, при врахуванні поглинання енергії ці коливання згаснуть.

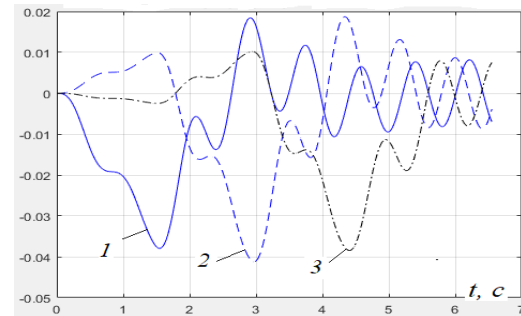


Рис. 3 – Величини  $-q_1, -q_2, -q_3$  показані на графіку зі знаком мінус, що відповідає фізичному зануренню точок. Швидкість руху в 10 км/г

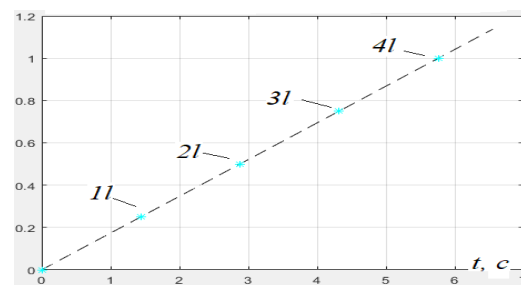


Рис. 4 – Відносно до довжини мосту просування екіпажу в залежності від  $t$  при швидкості руху в 10 км/г

**3.2. Швидкість  $V = 25 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ . Екіпаж проходить весь міст.** Наступною вибрана швидкість руху у 25 км/г або 6.95 м/с. Цікаво було подивитись на реагування механічної моделі на величину швидкості, яка наближається до її власної частоти коливань 7.67 1/с. Результати демонструють інтенсифікацію коливального процесу, коли найбільші значення занурень досягають величин 0.05 м. Але весь процес переїзду екіпажу не циклічний та триває надто короткий час, щоб викликати ефекти, пов'язані зі збігом значень швидкостей.

На рис. 5 наведені графіки переміщень узагальнених координат  $-q_1, -q_2, -q_3$ , а на рис. 6 показане відносно до довжини мосту просування екіпажу в залежності від  $t$  для цієї швидкості. Характер коливального процесу залишається таким же, екіпаж долає переправу тепер за 2.30 с., в кінці після проходження екіпажу зберігається синхронізація вільних коливань понтонів більшої інтенсивності.

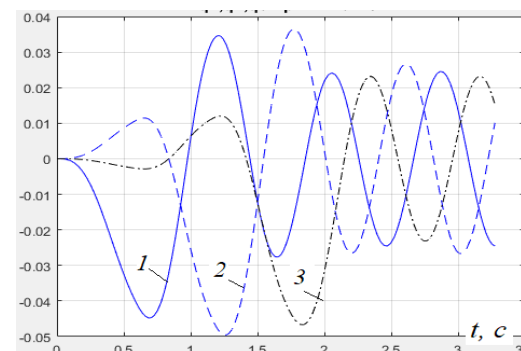


Рис. 5 – Величини  $-q_1, -q_2, -q_3$  показані на графіку зі знаком мінус. Швидкість руху в 25 км/г

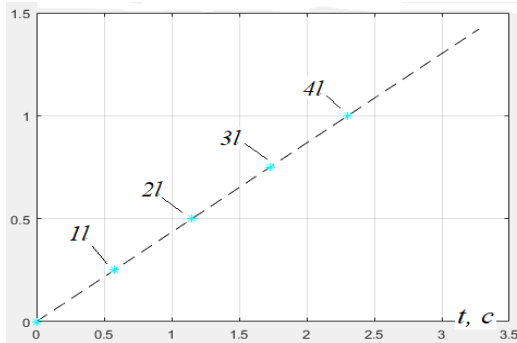


Рис. 6 – Відносно до довжини мосту просування екіпажу в залежності від  $t$  при швидкості руху в 25 км/г.

**3.3. Швидкість  $V = 10 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ . Екіпаж проходить частину мосту та миттєво зупиняється.** Розглядається попередній варіант руху транспорту зі швидкістю 10 км/г (2.78 м/с.), але на відміну від нього миттєво зупиняється на середині третьої секції. В характері реагування основного ланцюга мосту з'являються невеликі відмінності поведінки.

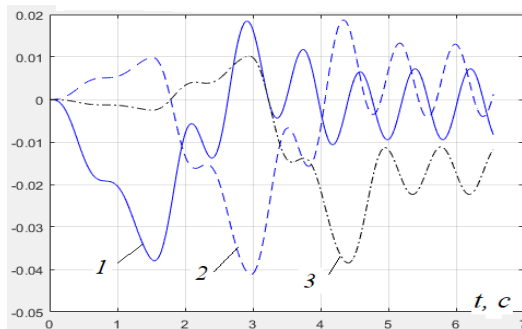


Рис. 7 – Величини  $-q_1, -q_2, -q_3$  показані на графіку зі знаком мінус. Рух транспорту зі швидкістю 10 км/г та зупинкою на середині третьої секції.

Для цього випадку графіки переміщень узагальнених координат  $-q_1, -q_2, -q_3$  в залежності від  $t$  наведені на рис 7. Характер коливального процесу приблизно до 5 с залишається таким же, як і на рис. 3. Далі сили інерції екіпажу, що зупинився, починають дещо змінювати динамічну поведінку четвертої платформи. Але суттєвого підсилення вертикального рівня вібрацій через зупинку руху в поздовжньому напрямку не спостерігається.

Алгоритм та модель допускають розгляд інших режимів роботи мосту, але загальне уявлення про характер та рівень вібрацій моделі понтонної мостової переправи можна отримати з наведених результатів.

**4. Висновки.** На підставі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

- В даній роботі розглянуто приклад характерної динамічної та математичної моделі плаваючого понтонного мосту як системи зі скінченним числом ступенів свободи з врахуванням руху по ньому інерційного екіпажу.
- В роботі наведені результати чисельних розрахунків вертикальної вібрації модельного мосту при рухові екіпажу в різних режимах, з різними швидкостями.

- Отримані результати дають загальне уявлення про поведінку та рівень коливань мосту при дії рухомих інерційних сил; моделювання здатне прогнозувати динамічну поведінку платформ також при дії інших факторів.

- Модель плаваючої понтонної переправи дозволяє вносити доповнення та розширення, такі як врахування поглинання енергії, двохосне навантаження, врахування транспортних потоків з 2-3 екіпажів та інші.

#### Список літератури

1. Грищенко В. М. Побудова динамічної моделі плаваючої понтонної мостової переправи при дії рухомого навантаження // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ "ХПІ", 2025. – №2(2025), – С. 72-78 – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.2.345652>
2. Перепелиця К. М., Ключник, С. В. Використання наплавних (понтонних) мостів для технічного прикриття транспортних об'єктів. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, №26, 2024 63–70
3. Kristine Senderud. Modeling and Analysis of Floating Bridge Concepts Exposed to Environmental Loads and Ship Collision. Norwegian University of Science and Technology. 2018. 210 p
4. Lwin M. M. Floating Bridges. CRC Press, 2014
5. Ibrahim Osamo. Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridges. Ontario, Canada, 2011.332p.
6. Fenerci, A., Kvåle, K. A., Xiang, X., & Øiseth, O. (2022). Hydrodynamic interaction of floating bridge pontoons and its effect on the bridge dynamic responses. *Marine Structures*, 83, 103174. – <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2022.103174>
7. Seif M. S., Inoue Y. Dynamic analysis of floating bridges, *Marine structures*, 1998, 29-46 pp – [https://doi.org/10.1016/S0951-8339\(97\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8339(97)00012-9)
8. Raftoyiannis I. G., Avraam T, Michaltsos G. Analytical models of floating bridges under moving loads. *Engineering, Materials Science*, 2014. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.002>
9. Yuji Miao, Xu-jun Chen, Yong-lin Ye, Jun Ding, Heng Huang. Numerical modeling and dynamic analysis of a floating bridge subjected to wave, current and moving loads. *Ocean Engineering*, Volume 225, 2021 – <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108810>
10. Ben C. Gerwick, Jr. Construction of Marine and Offshore Structures. CRC Press, Taylor&FrancisGroup, 2007 – <https://doi.org/10.1201/9780849330520>
11. Смірнов В. Н., Дяченко Л. К. Спеціальний курс проектування і будівництва мостів:учб посібник/ В.Н.Смірнов, Л.К.Дяченко.- М.:Вологда:Инфра Інженерія,2025.-152с.
12. Бугаєвський С. О., Ненастїна Т. О., Бугаєвський В. О., Бугаєвська Ю. В. Сучасний стан розвитку постійних наплавних мостів та перспективи їх будівництва в Україні. *Опір матеріалів і теорія споруд/ Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. №113.
13. Гернич М. В, Ключник С. В. Використання майна наплавного мосту НЖМ-56 зважаючи на виклики військового сьогодення. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, 2022, № 22, с27-32.
14. Chao Wang, Minghao Cui, Zhenghun Cheng, Torgeir Moan. A review on design and analysis of floating bridges: Numerical simulations, model tests and field measurements. 2024. *Ocean Engineering* 306(6) 118065 – <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118065>
15. Yanyan Sha, Jorgen Amdahl, Aleksander Aalberg, Zhaolong Yu. Numerical investigations of the dynamic response of a floating bridge under environmental loadings. Volume 13, 2018, *Ships and Offshore Structures* – <https://doi.org/10.1080/17445302.2018.1426818>
16. Солдато К. І, Горбатюк Ю. М, Курильченко Д. О. До питання динамічної роботи наплавних мостів // К. І. Солдатов, Ю. М. Горбатюк, Д. О. Курильченко // *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*. - 2012. - Вип. 2. - С. 83-91.
17. Wang C. M, Wang B. T. Large Floating Structures. Technological Advanced. Springer. Singapore, 2015, 327p – <https://doi.org/10.1007/978-981-287-137-4>
18. *Dynamic Analysis of Floating Bridges: Doctoral Dissertation*. Mitja

Papinutti / Ole Øiseth, Nils Erik Anders Rønquist, Stojan Kravanja, Dušan Žagar, M. Papinutti, 2021, 103p

#### References (transliterated)

1. *Grischenko V. M.* Pobudova dynamichnoi modeli plavuchoi pontonnoi mostovoi perepravy pry dii rukhomoho navantazhennia//Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn. – Kh.: NTU "KhPI", 2025. – №2(2025), –s72-78 – <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.2.345652>
2. *Perepelytsia K. M., Kliuchnyk, S. V.* Vykorystannia naplavnykh (pontonnykh) mostiv dlia tekhnichnogo prykryttia transportnykh ob'ektiv. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*, №26,2024 63–70
3. *Kristine Senderud.* Modeling and Analysis of Floating Bridge Concepts Exposed to Environmental Loads and Ship Collision. Norwegian University of Science and Technology. 2018. 210 p
4. *Lwin M. M.* Floating Bridges. CRC Press, 2014
5. *Ibrahim Osamo.* Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridges. Ontario, Canada, 2011.332p.
6. *Fenerci, A., Kvåle, K. A., Xiang, X., & Øiseth, O.* (2022). Hydrodynamic interaction of floating bridge pontoons and its effect on the bridge dynamic responses. *Marine Structures*, 83, 103174 – <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2022.103174>
7. *Seif M. S., Inoue Y.* Dynamic analysis of floating bridges, *Marine structures*, 1998, 29-46 pp – [https://doi.org/10.1016/S0951-8339\(97\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8339(97)00012-9)
8. *Raftoyiannis I. G., Avraam T., Michaltsos G.* Analytical models of floating bridges under moving loads. *Engineering, Materials Science*,2014 – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.002>
9. *Yuji Miao, Xu-jun Chen, Yong-lin Ye, Jun Ding, Heng Huang.* Numerical modeling and dynamic analysis of a floating bridge subjected to wave, current and moving loads. *Ocean Engineering*, Volume 225, 2021 – <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108810>
10. *Ben C. Gerwick, Jr.* Construction of Marine and Offshore Structures. CRC Press, Taylor&FrancisGroup, 2007 – <https://doi.org/10.1201/9780849330520>
11. *Smirnov V.N., Diachenko L. K.* Spetsialnyi kurs proektuvannia i budivnytstva mostiv:uchb posibnyk/ V. N. Smirnov, L. K. Diachenko.-M. :Volohda:Infra Inzheneriia,2025.-152s.
12. *Buhaievsky S. O., Nenastina T. O., Buhaievskiy V. O., Buhaievskya Yu. V.* Suchasnyi stan rozvytku postiinykh naplavnykh mostiv ta perspektyvy yikh budivnytstva v Ukraini. *Opir materialiv i teoriia sporud/ Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. №113.
13. *Hernych M. V., Kliuchnyk S. V.* Vykorystannia maina naplavnoho mostu NZhM-56 zvazhaiuchy na vyklyky viiskovoho sohodennia. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*, 2022, № 22, s27-32.
14. *Chao Wang, Minghao Cui, Zhenghun Cheng, Torgeir Moan.* A review on design and analysis of floating bridges:Numerical simulations, model tests and field measurements. 2024.*Ocean Engineering* 306(6) 118065 – <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118065>
15. *Yanyan Sha, Jorgen Amdahl, Aleksander Aalberg, Zhaolong Yu.* Numerical investigations of the dynamic response of a floating bridge under environmental loadings. Volume 13, 2018, *Ships and Offshore Structures* – <https://doi.org/10.1080/17445302.2018.1426818>
16. *Soldatov K. I., Horbatiuk Yu. M., Kurylchenko D. O.* Do pytannia dynamichnoi roboty naplavnykh mostiv // K. I. Soldatov, Yu. M. Horbatiuk, D. O. Kurylchenko // *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*. - 2012. - Vyp. 2. - S. 83-91.
17. *Wang C. M., Wang B. T.* Large Floating Structures. *Technological Advanced*. Springer. Singapore,2015, 327p – <https://doi.org/10.1007/978-981-287-137-4>
18. *Dynamic Analysis of Floating Bridges:Doctoral Dissertation.*Mitja Papinutti/Ole Øiseth, Nils Erik Anders Rønquist, Stojan Kravanja, Dušan Žagar, M. Papinutti, 2021, 103p

Надійшла (received) 16.12.2025

Прийнята до друку (accepted) 22.12.2025

Опублікована (published) 29.12.2025

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Грищенко Володимир Миколайович (Grischenko Volodimir)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>; e-mail: [grivn\\_dmm@ukr.net](mailto:grivn_dmm@ukr.net).