

Н. О. ФОМЕНКО, О. О. ЛАРІН

ІНТЕГРАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ ОБМЕЖЕНЬ У ГЛИБОКУ СИМВОЛЬНУ ОПТИМІЗАЦІЮ ДЛЯ ВІДКРИТТЯ В'ЯЗКО-ПРУЖНИХ МОДЕЛЕЙ

У роботі розглядається актуальна проблема математичного моделювання механічної поведінки полімерних матеріалів, виготовлених методом адитивних технологій, зокрема термопластичного поліуретану (TPU). Широке застосування 3D-друку для створення гнучких конструкцій та біомедичних імплантатів вимагає точних конститутивних моделей, здатних описувати складні нелінійні явища, такі як гістерезис, релаксація напружень та залежність від швидкості деформації. Традиційні феноменологічні підходи, що базуються, наприклад, на гіперпружних потенціалах (Муні-Рівліна, Огдена), мають суттєві обмеження: необхідність апіорного вибору структури моделі, наприклад, фіксації кількості гілок релаксації, та складність ідентифікації значної кількості параметрів. Це часто призводить до проблеми неєдності розв'язку та ускладнює прогнозування поведінки матеріалу в умовах складної анізотропії, спричиненої пошаровим друкуванням. З іншого боку, сучасні методи машинного навчання, такі як нейронні мережі, хоча і забезпечують високу точність апроксимації, діють як «чорні скриньки» і не надають фізично інтерпретованих залежностей, придатних для подальшого аналізу. Метою роботи є розробка методу автоматизованого пошуку визначальних рівнянь в'язко-пружності, що поєднує гнучкість data-driven підходів із фізичною змістовністю. Запропоновано використання модифікованого фреймворку глибокої символічної оптимізації (DSO) з інтеграцією «механічного змісту». Алгоритм здійснює пошук аналітичної форми потенціалу пружної деформації та функції релаксації. Застосування методу до експериментальних даних дозволило отримати компактне визначальне рівняння, яке забезпечує високу точність апроксимації та коректно описує релаксаційну поведінку 3D-друкованого матеріалу. Результати свідчать про перспективність символічної регресії для автоматизації створення прозорих («white-box») матеріальних моделей у скінченно-елементному аналізі.

Ключові слова: в'язко-пружність, символічна регресія, конститутивне моделювання, релаксація напружень

N. FOMENKO, O. LARIN

INTEGRATION OF MECHANICAL CONSTRAINTS INTO DEEP SYMBOLIC OPTIMIZATION FOR DISCOVERING VISCOELASTIC MODELS

The current issue of mathematically modelling the mechanical behavior of polymer materials produced using additive technologies, specifically thermoplastic polyurethane (TPU), is addressed in the paper. The widespread use of 3D printing to create flexible structures and biomedical implants necessitates accurate constitutive models that can describe complex nonlinear phenomena, such as hysteresis, stress relaxation, and strain rate dependence. Traditional phenomenological approaches, based, for example, on hyperelastic potentials (Mooney-Rivlin, Ogden), have significant limitations: the need for a priori selection of the model structure, such as fixing the number of relaxation branches, and the complexity of identifying a large number of parameters. This often leads to the problem of solution inconsistency, which complicates the prediction of material behavior under conditions of complex anisotropy caused by layer-by-layer printing. On the other hand, modern machine learning methods, such as neural networks, although providing high approximation accuracy, act as “black boxes” and do not provide physically interpretable dependencies suitable for further analysis. The goal of this work is to develop a method for the automated search for determining equations of viscoelasticity that combines the flexibility of data-driven approaches with physical meaningfulness. We propose the use of a modified deep symbolic optimization (DSO) framework with the integration of “mechanical content.” The algorithm searches for the analytical form of the elastic deformation potential and relaxation function. Applying the method to experimental data has yielded a compact determining equation that provides high approximation accuracy and accurately describes the relaxation behavior of 3D-printed materials. The results indicate the promise of symbolic regression for automating the creation of transparent (“white-box”) material models in finite element analysis.

Keywords: viscoelasticity, symbolic regression, constitutive modeling, stress relaxation

Вступ. Термопластичні еластомери (TPE), зокрема термопластичний поліуретан (TPU), широко застосовуються в інженерії та біомедичних технологіях завдяки поєднанню гнучкості, міцності та здатності витримувати значні пружні деформації. Зростання інтересу до цих матеріалів особливо помітне у контексті адитивних технологій, де TPU є одним із базових матеріалів для виготовлення функціональних елементів. Проте пошаровий характер 3D-друку зумовлює виникнення анізотропії та нелінійних ефектів, що суттєво ускладнює опис механічної поведінки таких виробів.

Традиційні феноменологічні моделі, попри широке застосування, часто виявляються недостатньо

гнучкими для точного відтворення складних в'язко-пружних явищ, характерних для TPU. Їх використання зазвичай вимагає фіксованої структури рівняння та значної кількості параметрів, що призводить до складності калібрування та ризику неєдиного розв'язку при обмежених експериментальних даних. Це створює потребу у методах, здатних автоматично адаптувати математичну форму моделі до реальної поведінки матеріалу.

У цьому контексті дедалі більшої уваги набувають data-driven підходи. Однак нейронні мережі, хоч і демонструють високу точність апроксимації, зазвичай не забезпечують інтерпретованості та аналітичної прозорості. Перспективною альтернативою є

© Н. О. Фоменко, О. О. Ларін 2025



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



символьна регресія, яка дозволяє автоматично виявляти структуру конститутивних рівнянь і водночас зберігати фізичний зміст отриманих формул [1]. У попередніх дослідженнях [2] ми розглядали застосування символьної регресії на еталонних синтетичних даних. У цій же роботі ми застосовуємо модифікований підхід на основі *Deep Symbolic Optimizer* [3] для побудови інтерпретованих моделей в'язко-пружної поведінки 3D-друкованого TPU та досліджуємо його ефективність на експериментальних даних.

Підходи до конститутивного моделювання полімерів та композитів. Традиційне моделювання поведінки полімерів базується на феноменологічних підходах, таких як моделі Муні-Рівліна чи Огдена. Для врахування в'язко-пружних ефектів ці моделі часто модифікують в'язко-пластичними членами або розширюють до узагальнених моделей Максвелла (ряди Проні). Проте такі підходи мають суттєві обмеження: вони вимагають ручного вибору структури моделі та ідентифікації значної кількості параметрів (іноді понад 12 для однієї кривої), що ускладнює процес калібрування. [4-6]

Задача стає ще складнішою при спробі врахувати нелінійні явища, такі як ефект Маллінза, гістерезис та залишкові деформації [7]. Сучасні дослідження пропонують використовувати складні паралельні реологічні фреймворки [8] або термодинамічно узгоджені анізотропні моделі для врахування специфіки 3D-друку [9, 10]. Хоча ці методи забезпечують високу точність, вони призводять до громіздких систем рівнянь, які важко імплементувати в інженерну практику.

З появою методів машинного навчання (ML) виник новий клас моделей — конститутивні штучні нейронні мережі (CANNs). У роботі [11] був представлений фреймворк для моделювання анізотропної нелінійної в'язко-пружності, де параметри релаксації визначаються нейромережами, а не фіксованими константами. Також у [12] було розроблено підхід автоматичного відкриття моделей, що дозволяє вибирати оптимальну структуру рівняння з тисяч можливих комбінацій для гіперпружних матеріалів.

Таким чином, хоча існуючі феноменологічні та фізично-обґрунтовані моделі дозволяють досягти високої точності, вони часто стають математично перевантаженими. Необхідність апріорного вибору структури (кількість елементів Максвелла, тип гіперпружного потенціалу) та ідентифікація десятків параметрів створюють проблему неєдиності рішення, що стимулює пошук альтернативних методів, керованих даними, таких як символьна регресія.

Символьна регресія демонструє значний потенціал у механіці суцільного середовища, дозволяючи автоматично знаходити аналітичні вирази для функцій енергії деформації. Як показали у роботі [13], показали, що алгоритми символьної регресії здатні самостійно генерувати конститутивні рівняння,

які за точністю не поступаються класичним феноменологічним моделям.

Критичним аспектом застосування символьної регресії, наприклад, для складних біоматеріалів, є інтеграція фізичних обмежень. Так, у [14] представлено дослідження, зосереджене на автоматизованому відкритті інтерпретованих гіпереластичних конститутивних моделей для м'яких тканин, зокрема кори головного мозку людини, з використанням символьної регресії. Автори розробили три підходи, що базуються на інваріантах, головних розтягах та деформаціях, які інтегрують фізичні обмеження, такі як поліопуклість/еліптичність, для забезпечення фізичної достовірності. Результати показують, що символьна регресія може відкривати точні та лаконічні математичні моделі, причому модель, заснована на деформації, демонструє найвищу точність у фітінгу експериментальних даних, включаючи нелінійність та асиметрію напруження-стиснення.

Сучасний етап розвитку методу пов'язаний із переходом до **глибокої символьної регресії**, реалізованої, зокрема, у бібліотеці *Deep Symbolic Optimization (DSO)* [3]. Цей підхід використовує рекурентну нейронну мережу для генерації розподілу ймовірностей над математичними виразами, застосовуючи алгоритм навчання з підкріпленням. Ключовою інновацією методу є використання «ризикового» градієнта політики, що фокусується на максимізації результату найкращих знайдених моделей, а не на оптимізації середнього значення, що забезпечує високу точність відновлення аналітичних залежностей навіть в умовах зашумлених даних.

Зважаючи на все вищевикладене, метою роботи є розробка методу автоматизованого пошуку визначальних рівнянь в'язко-пружності для 3D-друкованих еластомерів, який забезпечує фізичну інтерпретованість та високу точність апроксимації експериментальних даних.

Обчислювальний фреймворк. В основу обчислювального підходу покладено фреймворк *Deep Symbolic Optimizer (DSO)*. На відміну від стандартного використання, ми модифікували ядро алгоритму, інтегрувавши в нього «механічний зміст». Це дозволяє шукати не довільну математичну функцію, а вираз, що задовольняє фізичній природі матеріалу.

Процес пошуку визначального рівняння реалізовано ітеративно (Рис. 1). Алгоритм спрямований на відновлення форми потенціалу пружної деформації $W(\epsilon)$, який дозволить визначити напруження (σ), як функцію деформацій (ϵ) та часу (t). Тут і далі використовується напівжирний шрифт для позначення тензорної величини, а звичайний — скалярної.

Опис алгоритму пошуку визначального рівняння. Запропонований алгоритм реалізує ітеративний процес символьної регресії з інтегрованими фізичними обмеженнями (Рис. 1). Алгоритм буде опрацьовувати набір даних (*Dataset*), який містить дискретні значення деформацій та

напружень в різні моменти часу. Процес розпочинається з ініціалізації вхідних даних: часових міток $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_n\}^T$ з *Dataset* та значень деформації $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}^T$ з допоміжного набору (*Aux. data*).

Ключовим елементом схеми є блок *Model SR*, який генерує популяцію кандидатів аналітичних виразів для потенціалу пружної енергії $W = W(\varepsilon)$. На відміну від класичної регресії, згенерований вираз не порівнюється з даними напряму.

Натомість він проходить ланцюжок фізичних перетворень:

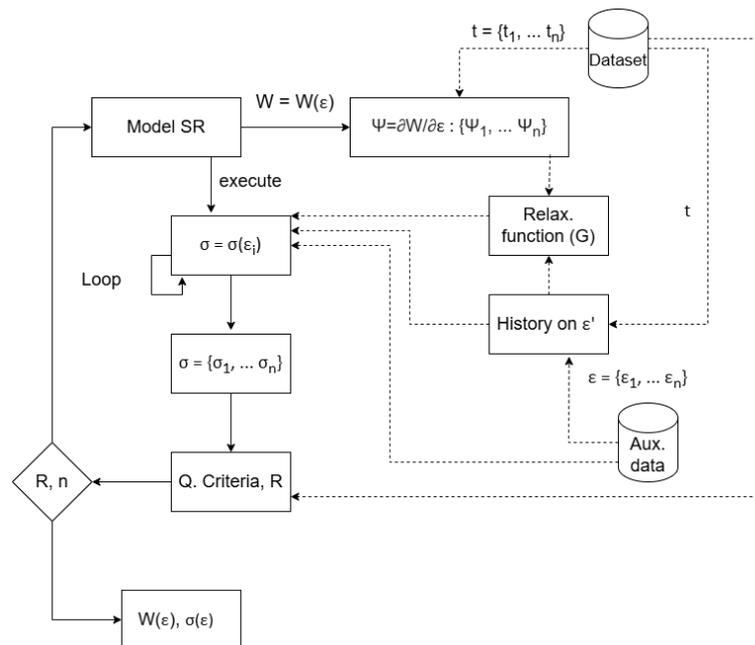


Рис. 1 – Схема першого етапу процесу навчання символічно-регресійної моделі

На етапі позначеному *Loop* відбувається обчислення напруження $\bar{\sigma} = \sigma(\bar{\varepsilon})$ шляхом чисельного розв'язання інтеграла згортки (рівняння Больцмана-Вольтерра) для кожного часового кроку. Отриманий вектор розрахункових напружень $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}^T$ передається у блок оцінки якості (*Q. Criteria, R*).

Алгоритм перевіряє відповідність моделі експериментальним даним (критерій *R* та кількість ітерацій *n*). Якщо критерій не задоволено, цикл повертається до *Model SR* для еволюції нових виразів. У разі успіху алгоритм виводить фінальний аналітичний вигляд функцій $W(\varepsilon)$ та $\sigma(\varepsilon)$.

Критерії зупинки та параметри оптимізації поділяються на загальні умови завершення роботи алгоритму, гіперпараметри навчання нейронної мережі (РНН), параметри генетичного програмування (*GP*) та налаштування оптимізації констант. Одним із головних критеріїв завершення роботи алгоритму є досягнення ліміту згенерованих та оцінених математичних виразів, який становить 2 мільйони. Оскільки оптимізація констант є обчислювально витратним процесом, для таких задач цей критерій зменшено до 10^6 оцінок. Крім того, застосовується рання зупинка: робота переривається достроково, якщо алгоритму вдалося точно відновити цільовий (еталонний) вираз до вичерпання ліміту.

1. Обчислюється похідна потенціалу по деформації $\psi = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$, яка визначає миттєву пружну реакцію матеріалу.
2. Формується функція релаксації (*Relax. function G*), що поєднує отриману пружну частину ψ з дисипативною (в'язкою) складовою.
3. Блок *History on ε'* обчислює історію швидкості деформації на основі вхідних даних.

Що стосується параметрів генетичного програмування (*GP*), розмір популяції становить 1000 індивідів, що відповідає розміру пакета РНН.

Кількість генерацій (еволюційних кроків) за замовчуванням встановлено 20. У базовому *GP* ймовірність кросинговеру становить 0.95, а мутації — 0.05. Проте для гібридного методу в конфігурації *gp_meld* обидва показники встановлені на рівні 0.5 (50%). Для селекції використовується турнірний відбір, розмір якого для базового *GP* дорівнює 2, а в налаштуваннях гібридного методу збільшений до 5. При випадкових мутаціях або генерації діють обмеження довжини від 4 до 16 або 30 токенів, а максимальна глибина піддерева для мутації обмежена 3.

Показник пристосованості оцінюється на основі нормованої середньоквадратичної помилки (*NRMSE*), яку можна розрахувати за формулою:

$$NRMSE = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{n \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}}} \quad (1)$$

де n – розмір набору даних, f – потенційна функція апроксимації, (X, y) – заданий набір даних, σ_y – середньоквадратичне (стандартне) відхилення цільових значень.

NRMSE безпосередньо використовується в обчисленні винагороди R_2 шляхом застосування функції стиснення, яка визначається як:

$$R_2 = \frac{1}{1 + NRMSE} \quad (2)$$

Розглянемо детальніше, який же вигляд має функція релаксації. Її вибір був мотивований використанням реологічної моделі Зінера (*Standard linear solid model*), яка складається з пружини і демпфера, які з'єднані послідовно з паралельним пружинним елементом, що проілюстровано на рис.2. Модель описує характеристики матеріалу за допомогою 3 параметрів, а саме 2 модулів пружності E , E_1 і однієї константи в'язкості η .

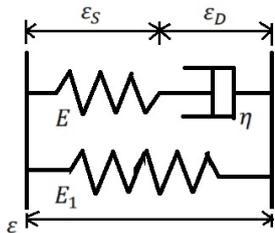


Рис. 2 – 3-параметрична модель лінійної в'язко-пружності

Опускаючи викладки перетворення реологічної моделі у диференціальне рівняння, запишемо одразу два визначальні рівняння [15] наведені для одновимірного випадку:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} + E_1(\varepsilon - q), \quad (1)$$

$$\dot{q} = \frac{E_1}{\eta}(\varepsilon - q), \quad (2)$$

де $q = \varepsilon_D$, $\varepsilon - q = \varepsilon_S$

Якщо проінтегрувати (2) та підставити в (1), для початкового стану $\sigma(0) = 0$ результат

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau)\varepsilon'(\tau)d\tau \quad (3)$$

визначає поточне напруження $\sigma(t)$ залежно від історії деформування. У такому випадку функція релаксації має вигляд:

$$G(t) = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} + E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \quad (4)$$

Результати. Пошук виразу для функції релаксації був реалізований у 2 етапи: спочатку перший доданок (друга похідна потенціалу пружної деформації), потім другий — експонента. Відповідно для першого етапу модель символічної регресії шукала вираз на даних, отриманих з випробування на розтягування.

Ми припускаємо, що якщо нестисливий гіпереластичний матеріал піддається одноосному навантаженню, то напруження Коші мають вигляд:

$$\sigma_{uniax} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right] \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (5)$$

де I_1, I_2 – інваріанти тензора деформацій; λ – коефіцієнт видовження.

У результаті на першому етапі отримали наступний вираз для потенціалу пружної деформації (W) в залежності від інваріантів:

$$I_2 \cdot (-4.42 \cdot I_1 + 4.42 \cdot I_2 \cdot \log(0.9794 \cdot I_2 - 1.4416) - 5.8187) \quad (6)$$

На рисунку 3 представлено результати моделювання. Червона крива демонструє високу відповідність знайденої аналітичної залежності експериментальним даним. Кількісна оцінка якості апроксимації досягла значення 0.9920 (за метрикою оберненої нормалізованої середньоквадратичної похибки).

На другому етапі, використовуючи фіксований вираз потенціалу пружної деформації W , знайдений на попередньому кроці, здійснювався пошук параметрів часової релаксації. В'язко-пружна відповідь моделювалася за допомогою спадкового інтеграла Больцмана. Для ефективного обчислення напружень у часовій області реалізовано рекурентну схему інтегрування для апроксимації рядів Проні.

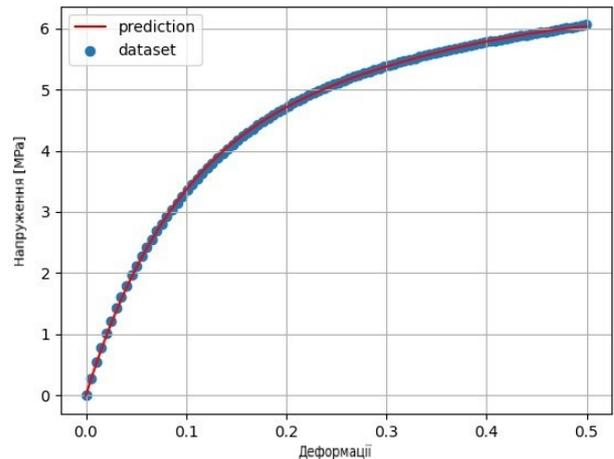


Рис. 3 – Апроксимація експериментальних даних моделлю символічної регресії (червона лінія)

Загальне напруження $\sigma(t)$ на кожному кроці часу t_i розраховувалося як різниця між миттєвим пружним напруженням $\sigma_{inst}(t_i)$ (отриманим з W) та в'язкою релаксаційною складовою $\sigma_{visc}(t_i)$, що оновлюється ітеративно:

$$\sigma(t_i) = \sigma_{inst}(t_i) - \sum_{j=1}^M \sigma_{visc,j}(t_i) \quad (7)$$

де $\sigma_{visc,j}$ — компоненти в'язкого напруження для j -го часу релаксації τ_j , які обчислюються через рекурентне співвідношення, що враховує історію навантаження та крок часу Δt . Варто зазначити, що реалізований алгоритм дозволяє враховувати залежність параметрів релаксації від рівня деформації, що забезпечує гнучкість при описі нелінійних ефектів.

Результати моделювання в'язко-пружної поведінки наведено на рис. 4. Отримана модель (червона лінія) демонструє високу відповідність експериментальним даним тесту на релаксацію (сині

маркери) як на етапі початкового навантаження, так і на ділянці релаксації напруження. Характерний пік напруження та подальший його нелінійний спад відтворено з високою точністю.

Для перевірки узагальнюючої здатності отриманої моделі було проведено серію чисельних експериментів, що відтворюють умови активного навантаження зі сталими швидкостями деформування. Для валідації використано набір експериментальних даних для термопластичного поліуретану (TPU) при чотирьох швидкостях деформування: $\dot{\epsilon} = \{0.1, 1.0, 10, 50\}$ %/с, які було технічно можливо отримати з наявного експериментального обладнання.

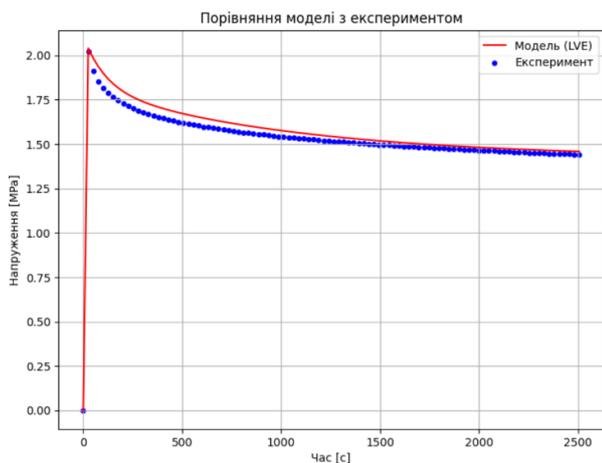


Рис. 4 – Валідація моделі за даними тесту на релаксацію напружень. Порівняння експериментальних даних (точки) та прогнозу моделі символічної регресії (суцільна лінія) для циклу «навантаження – витримка»

Прогнозування напружень здійснювалося шляхом прямого інтегрування визначальних рівнянь з фіксованими параметрами матеріалу, визначеними на попередніх етапах (калібрування пружного потенціалу та функції релаксації). Жодного додаткового підлаштування коефіцієнтів під дані розтягу не проводилося. Результати порівняння теоретичних прогнозів з експериментальними даними наведено на рис. 5.

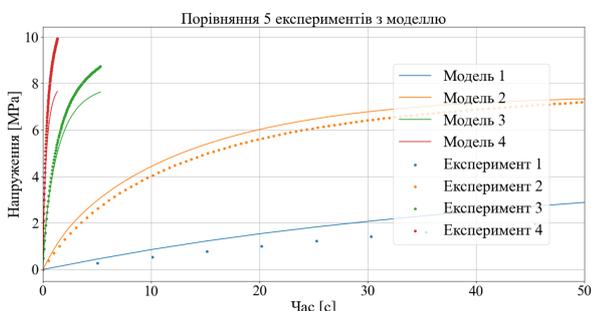


Рис. 5 – Порівняння модельних прогнозів (суцільні лінії) з експериментальними даними (маркери) для тестів на розтяг з різними швидкостями деформування

Модель використовує гіпереластичний потенціал W , знайдений алгоритмом символічної регресії (рівняння 6), та параметри релаксації, відкалібровані на іншому експерименті. Збіг теоретичних ліній з

експериментальними маркерами доводить, що отримана математична структура дійсно описує фізику процесу, а не просто «завчила» шуми чи конкретний набір точок.

На рисунку можна побачити, що найнижча крива (Модель 1) відповідає швидкості 0.1 %/с. Моделі 2, 3 та 4 демонструють реакцію матеріалу на значно вищі швидкості навантаження. Здатність моделі точно передбачити це нелінійне зростання напружень підтверджує, що в'язко-пружна відповідь, змодельована через спадковий інтеграл Больцмана та рекурентну схему, працює коректно в широкому діапазоні швидкостей.

Результати підтверджують надійну верифікацію моделі на незалежних експериментальних даних. Навчання моделі базувалося на даних релаксації (при 5% деформації) та розтягу (0.1 %/с), однак верифікаційні криві (рис. 5) доводять її здатність точно прогнозувати поведінку матеріалу в широкому діапазоні деформацій до 50%.

Висновки. У роботі розроблено та апробовано підхід до ідентифікації в'язко-пружних властивостей 3D-друкованих еластомерів, ключовою особливістю якого є фокус на відновленні фундаментального потенціалу пружної енергії. Запропоновано двоетапну стратегію символічного пошуку: розроблено модифікацію методу *Deep Symbolic Optimization (DSO)*, яка на першому етапі здійснює пошук аналітичного виразу для потенціалу пружної деформації. Застосування методу до експериментальних даних дозволило виявити компактний аналітичний вираз для потенціалу, який коректно описує нелінійну пружність матеріалу. Це стало основою для побудови ядра релаксації, де пружна складова визначається другою похідною знайденого потенціалу, що забезпечує фізичну коректність моделі на всіх етапах навантаження. Отримана модель в'язко-пружності продемонструвала гарну точність опису процесів релаксації напружень у 3D-друкованому TPU. Це підтверджує, що *data-driven* підхід здатний самостійно знаходити визначальні рівняння, які за точністю та фізичним змістом не поступаються класичним феноменологічним моделям.

Список літератури

1. Wang, Y., Wagner, N. & Rondinelli, J. M. Symbolic regression in materials science. *MRS Communications* **9**, 793–805 (2019). <https://doi.org/10.1557/mrc.2019.85>.
2. Fomenko, N., & Larin, O. (2024). Symbolic Regression-Based Models for Hyperelastic Material. *2024 IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 1–5. <https://doi.org/10.1109/khpiweek61434.2024.10878012>.
3. Petersen, B. K., Mundhenk, T. N., Kim, S. K., Santiago, C. P., and Kim, J. T., “Deep symbolic regression,” 2021.
4. Somarathna, H., Raman, S., Mohotti, D., Mutalib, A., & Badri, K. (2019). Hyper-viscoelastic constitutive models for predicting the material behavior of polyurethane under varying strain rates and uniaxial tensile loading. *Construction and Building Materials*, *236*, 117417. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117417>.
5. Zhao, B., Hu, J., Chen, W., Chen, J., & Jing, Z. (2020). A nonlinear uniaxial stress-strain constitutive model for viscoelastic membrane materials. *Polymer Testing*, *90*, 106633. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106633>.

6. Adrover-Monserrat, B., García-Vilana, S., Sánchez-Molina, D., Llumà, J., Jerez-Mesa, R., & Travieso-Rodríguez, J. A. (2022). Viscoelastic Characterization of a Thermoplastic Elastomer Processed through Material Extrusion. *Polymers*, 14(14), 2914. <https://doi.org/10.3390/polym14142914>.
7. Fazekas, B., & Goda, T. J. (2021). Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence. *International Journal of Mechanical Sciences*, 210, 106735. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106735>.
8. Reyes, S. I., Vassiliou, M. F., & Konstantinidis, D. (2024). Experimental characterization and constitutive modeling of thermoplastic polyurethane under complex uniaxial loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 186, 105582. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105582>.
9. Guo, X., Wang, E., Yang, H., & Zhai, W. (2024). Mechanical characterization and constitutive modeling of additively-manufactured polymeric materials and lattice structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 189, 105711. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105711>.
10. Su, X., Wang, Y., & Peng, X. (2020). An anisotropic visco-hyperelastic model for thermally-actuated shape memory polymer-based woven fabric-reinforced composites. *International Journal of Plasticity*, 129, 102697. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102697>.
11. Abdolazizi, K. P., Linka, K., & Cyron, C. J. (2023). Viscoelastic constitutive artificial neural networks (vCANNs) – A framework for data-driven anisotropic nonlinear finite viscoelasticity. *Journal of Computational Physics*, 499, 112704. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112704>.
12. Peirlinck, M., Linka, K., Hurtado, J. A., & Kuhl, E. (2023). On automated model discovery and a universal material subroutine for hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116534. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116534>.
13. Abdusalamov, R., Hillgärtner, M., & Itskov, M. (2023). Hyperelastic material modelling using symbolic regression. *PAMM*, 22(1). <https://doi.org/10.1002/pamm.202200263>.
14. Hou, J., Chen, X., Wu, T., Kuhl, E., & Wang, X. (2024). Automated data-driven discovery of material models based on symbolic regression: A case study on the human brain cortex. *Acta Biomaterialia*, 188, 276–296. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2024.09.005>.
15. Haupt, P. (2002). Continuum Mechanics and Theory of Materials. In *Advanced texts in physics*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
- material behavior of polyurethane under varying strain rates and uniaxial tensile loading. *Construction and Building Materials*, 236, 117417. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117417>.
5. Zhao, B., Hu, J., Chen, W., Chen, J., & Jing, Z. (2020). A nonlinear uniaxial stress-strain constitutive model for viscoelastic membrane materials. *Polymer Testing*, 90, 106633. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106633>.
6. Adrover-Monserrat, B., García-Vilana, S., Sánchez-Molina, D., Llumà, J., Jerez-Mesa, R., & Travieso-Rodríguez, J. A. (2022). Viscoelastic Characterization of a Thermoplastic Elastomer Processed through Material Extrusion. *Polymers*, 14(14), 2914. <https://doi.org/10.3390/polym14142914>.
7. Fazekas, B., & Goda, T. J. (2021). Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence. *International Journal of Mechanical Sciences*, 210, 106735. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106735>.
8. Reyes, S. I., Vassiliou, M. F., & Konstantinidis, D. (2024). Experimental characterization and constitutive modeling of thermoplastic polyurethane under complex uniaxial loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 186, 105582. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105582>.
9. Guo, X., Wang, E., Yang, H., & Zhai, W. (2024). Mechanical characterization and constitutive modeling of additively-manufactured polymeric materials and lattice structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 189, 105711. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105711>.
10. Su, X., Wang, Y., & Peng, X. (2020). An anisotropic visco-hyperelastic model for thermally-actuated shape memory polymer-based woven fabric-reinforced composites. *International Journal of Plasticity*, 129, 102697. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102697>.
11. Abdolazizi, K. P., Linka, K., & Cyron, C. J. (2023). Viscoelastic constitutive artificial neural networks (vCANNs) – A framework for data-driven anisotropic nonlinear finite viscoelasticity. *Journal of Computational Physics*, 499, 112704. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112704>.
12. Peirlinck, M., Linka, K., Hurtado, J. A., & Kuhl, E. (2023). On automated model discovery and a universal material subroutine for hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116534. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116534>.
13. Abdusalamov, R., Hillgärtner, M., & Itskov, M. (2023). Hyperelastic material modelling using symbolic regression. *PAMM*, 22(1). <https://doi.org/10.1002/pamm.202200263>.
14. Hou, J., Chen, X., Wu, T., Kuhl, E., & Wang, X. (2024). Automated data-driven discovery of material models based on symbolic regression: A case study on the human brain cortex. *Acta Biomaterialia*, 188, 276–296. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2024.09.005>.
15. Haupt, P. (2002). Continuum Mechanics and Theory of Materials. In *Advanced texts in physics*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.

References (transliterated)

1. Wang, Y., Wagner, N., & Rondinelli, J. M. Symbolic regression in materials science. *MRS Communications* 9, 793–805 (2019). <https://doi.org/10.1557/mrc.2019.85>.
2. Fomenko, N., & Larin, O. (2024). Symbolic Regression-Based Models for Hyperelastic Material. *2024 IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 1–5. <https://doi.org/10.1109/khpiweek61434.2024.10878012>.
3. Petersen, B. K., Mundhenk, T. N., Kim, S. K., Santiago, C. P., and Kim, J. T., “Deep symbolic regression,” 2021.
4. Somarathna, H., Raman, S., Mohotti, D., Mutalib, A., & Badri, K. (2019). Hyper-viscoelastic constitutive models for predicting the

Надійшла (received) 10.12.2025
 Прийнята до друку (accepted) 22.12.2025
 Опублікована (published) 29.12.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Фоменко Наталія Олександрівна (Fomenko Nataliia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірантка кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0781-6806>; email: Nataliia.Fomenko@infiz.khpi.edu.ua

Ларін Олексій Олекса ідрович (Larin Oleksiy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор навчально наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>; e-mail: oleksiy.larin@khpi.edu.ua.