

**В. М. ГРИЩЕНКО**

## ПОБУДОВА ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ПЛАВУЧОЇ ПОНТОННОЇ МОСТОВОЇ ПЕРЕПРАВИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В роботі розглядається задача моделювання коливальних процесів, які відбуваються в плавучих понтонних мостових конструкціях при дії рухомого навантаження по настилам мосту. Модель здійснює плоскі вертикальні коливання занурення-спливання. Організація понтонних мостових та поромних переправ в складних умовах стихійних подій, військових дій забезпечує транспортну логістику та резервні комунікації, що налаштовані в стислі терміни на короткий строк до відновлення зруйнованих. Крім того, економічно вигідним може бути організація переправ через невеликі річки, заболочені райони, коли не потрібні жорсткі структури, коли більш важливою стає саме оперативність або невеликі затрати. З цією метою розроблена розрахункова схема характерного варіанту мосту, яка представляє собою шарнірне з'єднання  $n$  окремих жорстких секцій, що базуються на плавучих понтонах та становлять силовий ланцюг мосту. Допускається представлення динамічної моделі ланцюга у вигляді масових платформ на пружній основі, загальним числом  $(n - 1)$  ступінь свободи. Наведені розрахункові параметри цієї моделі як динамічної системи. Серед зовнішніх силових впливів увага зосереджена на навантаженнях від інерційних сил рухомого транспорту, який може переміщуватись по настилу понтонів з точковим прикладанням по заданому рівноприскореному або рівноуповільненому русі. Алгоритмічно допускається моделювання режимів руху з зупинками, торканням з місця. По розробленій розрахунковій динамічній схемі з використанням апарату рівнянь Лагранжа II роду побудована математична модель - система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Для лінійного диференціального оператора отримано спектр кратних власних частот. Таким чином, до результатів роботи можна віднести розробку розрахункової динамічної та математичної моделей невеликої як масштабами так і числом ступенів свободи плавучої понтонної мостової конструкції, яку можна розглядати як інструмент дослідження динамічної поведінки характерних задач. Модель, за потреби, дозволяє розширення шляхом додаткового врахування актуальних силових факторів зовнішнього впливу таких як двох точкове прикладення сил від рухомого вантажу, потоків з декількох екіпажів, хвильовий процес, тощо. З використанням моделі можна проводити варіативні розрахунки, та надавати відповіді на ряд поставлених інженерних запитань.

**Ключові слова:** понтонна мостова споруда, рухоме навантаження, динамічна модель вертикальних коливань, математична модель

**V. GRISCHENKO**

## CONSTRUCTION OF A DYNAMIC MODEL OF A FLOATING PONTOON BRIDGE UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD

The paper considers the problem of modeling oscillatory processes that occur in floating pontoon bridge structures under the action of a moving load on the bridge decks. The model performs plane vertical oscillations of immersion-surfacing. The organization of pontoon bridge and ferry crossings in difficult conditions of natural disasters and military operations provides transport logistics and backup communications, which are set up in a short time for a short period of time until the destroyed ones are restored. In addition, it may be economically beneficial to organize crossings across small rivers, wetlands, when rigid structures are not required, when efficiency or low costs become more important. For this purpose, a calculation scheme of a typical version of the bridge has been developed, which represents a hinged connection of  $n$  separate rigid sections based on floating pontoons and constituting the power chain of the bridge. It is allowed to represent the dynamic model of the chain in the form of mass platforms on an elastic base, with a total number of  $(n-1)$  degrees of freedom. The calculation parameters of this model as a dynamic system are given. Among the external force influences, attention is focused on the loads from inertial forces of moving transport, which can move along the deck of pontoons with point contact in a given uniformly accelerated or uniformly decelerated motion. Algorithmically, it is allowed to model motion modes with stops and starting from a standstill. According to the developed calculation dynamic scheme using the apparatus of Lagrange equations of the second kind, a mathematical model was constructed - a system of ordinary nonlinear differential equations. For a linear differential operator, a spectrum of multiple eigenfrequencies was obtained. Thus, the results of the work include the development of a computational dynamic and mathematical model of a small floating pontoon bridge structure, both in terms of scale and number of degrees of freedom, which can be considered as a tool for studying the dynamic behavior of characteristic problems. The model, if necessary, allows expansion by additionally taking into account the relevant force factors of external influence, such as two-point application of forces from moving cargo, flows from several crews, wave process, etc. Using the model, you can perform variational calculations and provide answers to a number of engineering questions.

**Keywords:** pontoon bridge structure, moving load, dynamic model of vertical vibrations, mathematical model

**Вступ.** Наявність мінеральних ресурсів та технологічні можливості їх освоєння мають стратегічне значення та вирішальний вплив на сталий розвиток економіки країни. Це ті, які при сучасному рівні технічних засобів допускають їх ефективне використання в господарстві. В наш час увага до розподілу корисних копалин в світі стоїть надзвичайно гостро. Один із головних пріоритетів в питаннях забезпечення енергетичної стабільності

пов'язаний з видобутком та акумуляцією енергоносіїв, таких як нафта, газ, вітрова, сонячна енергія, тощо. Перспективні напрямки все більше пов'язуються з використанням високотехнологічних підходів. Як один із прикладів розвідувальної технології для дослідження земних надр та пошуку корисних копалин можна навести сейморозвідку. Відкриття багатьох родовищ було зроблено за сприянням розвідувальної сейсміки. Витрати

© В. М. Грищенко 2025



**Дослідницька стаття:** Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



індустріальних держав, компаній, об'єми робіт по пошуку нафти, газу а також твердих корисних мінералів на суші, будівництв на морях, океанографію дуже швидко зростають, як і затрати на теоретичні дослідження. Інтенсивні роботи по використанню цієї технології проводять в декількох напрямках. Науковий напрямок характеризується розробкою методів дослідження структури земних надр, пошуком корисних копалин, розробкою теоретичних та фізичних основ сейсмічної розвідки, її можливостей. З іншого боку практичною направленістю - розглядаються різні напрямки застосування теоретичних аспектів для практичного втілення. Складнощів та проблем при реалізації підходів розвідувальної сейсміки багато. Від діапазону глибин, які сягають на десятки кілометрів при проведенні бурових робіт, до розбудови інфраструктури при практичному освоєнні континентального шельфу. Пошукові роботи проводяться не в лабораторіях. Найбільш перспективні з точки зору геології структури земної кори можуть розташовуватись в полях, пустелях, гірських масивах, морях, тощо. Для досягнення успіху потрібно в таких умовах забезпечити одержання потрібної інформації про малопотужні сейсмічні процеси в місцях реєстрації сигналів. До районів розвідки корисних копалин можуть входити прибережні зони, акваторії, заболочені ділянки, мілководдя і таке інше. Організація польових робіт на морях, районах покритих водою має особливості. Для виконання необхідного об'єму робіт потрібен різноманітний спеціалізований транспорт: дослідницькі судна, невеликі судна-сейсмоприймачі, баржі, човни, тощо. До числа інженерних споруд морського, річкового призначення, які знаходять активне застосування в нафто-газовидобуванні в акваторіях, при проведенні геологічних розробок, вітроенергетиці, розбудові мостових споруд, організації переправ, тощо відносяться також конструкції плавучих понтонних платформ. Саме з використанням платформ пов'язане освоєння глибоководних родовищ вуглеводнів. Надійним видом подолання водних перешкод є організація помонних та мостових переправ.



Рис. 1 – Плавучий міст Нордхордаланд, Норвегія [1]

Інженерне забезпечення цього виду сполучення є надзвичайно актуальним. Така схема працює як для великих споруд через протоки так і для малих-середніх річкових переправ, коли не потрібна жорстка структура, а потрібне оперативне створення переправи з відносно невеликою підготовкою та затратами [2,3]. Наприклад, це може бути наплавний (плавучий) міст через канал з довжиною плавучої

частини понад кілометр. Подібна мостова споруда може відігравати життєво важливу роль для окремих регіонів або районів.

В період воєнних дій транспортна система України зазнала великих пошкоджень. Відновлення логістичних зв'язків, забезпечення сполучення через широкі та глибокі водні перешкоди можна досягти з використанням наведених понтонних мостів. Їх безпечна експлуатація потребує, зокрема, моделювання динамічної поведінки на воді при дії сучасного навантаження, визначення безпечної "вантажопідйомності" та інше. У вітчизняній літературі обмаль робіт присвячених цим аспектам.

Основою даної роботи є розробка динамічної схеми та математичної моделі характерної плавучої понтонної мостової конструкції при рухомому навантаженні. Підготовлена схема представляє собою дискретно-масову систему з окремих секцій з'єднаних між собою певним чином. Ці елементи наділені масою та визначають число ступенів свободи. Взаємодія сукупності масових елементів з оточуючим водним середовищем враховується з допомогою пружної основи (зв'язків). Понтони зі встановленими надбудовами грають роль поплавків. Різні по значенню та характеру дії зовнішні силові навантаження прикладаються до масових точок. Для визначення поведінки системи на воді з використанням апарату Лагранжа II роду підготовлена система нелінійних диференціальних рівнянь. З точки зору динамічних розрахунків понтонно-мостова модель в пружному водному середовищі представляє собою єдину динамічну систему.

Практична спрямованість конструкції наголошує доцільність забезпечення вантажоперевезень, пасажирів, туристів, аграрної продукції. Також постають питання визначення динамічної поведінки плаваючих мостових споруд під дією рухомого навантаження та інших силових чинників [4-9]. Загалом представлена робота присвячена розробці розрахункової та математичної динамічних моделей об'єкта при дії інерційних сил від руху транспортних засобів. На основі підготовлених диференціальних рівнянь вертикальної динаміки мостів можуть бути проведені чисельні дослідження.

**1. Понтонні технології переправ.** Мостові конструкції є невід'ємною частиною сучасної інфраструктури країни, що сприяють тісним економічним зв'язкам регіонів та комунікації суспільства. Це – мобільність, забезпечення транспортного сполучення, долання перешкод, тощо. Існують декілька різновидностей мостів. Сучасні технології дозволяють будувати як великі конструкції, так і локальні для організації переправ, подолання водних перешкод через невеликі річки, затоки, місцевості заповнені водою.

Понтонні мости, наплавні мости, понтонні переправи – це плавучі інженерні споруди морського або річкового призначення (рис.1). Вони складаються з окремих секцій, в основі яких лежить плавуча частина - понтони або понтонні опори.

Секції з'єднані між собою за певними схемами в єдиний транспортний засіб для забезпечення переправ через водні перешкоди. Ці споруди можуть призначатись для різних цілей, зокрема, як причали, платформи для водних об'єктів туристичного призначення, слугувати основою для зберігання або транспортування вантажів, бути базою для різних морських об'єктів [10]. Вони активно використовуються у будівництві, сільському господарстві, в регіонах з обмеженими можливостями транспортування по воді. Можливе їх використання при авто – та залізничних перевезеннях. Основними матеріалами при виробництві понтонних платформ, є сталь, алюміній, пластик, бетон. Металічні понтони виготовляються здебільшого звареними або клепанними прямокутного поперечного перерізу з прямими стінками. Вони герметично закриті, мають водонепроникні перебирання та достатній запас плавучості. За таких умов має місце пропорційність між навантаженням та осадкою системи. А осадка плавучої конструкції зворотно пропорційна її площі по ватерлінії. Тому модельне представлення плавучої частини може виглядати як балка на пружній основі (рис.2), де  $P$  – вага рухомого вантажу зі швидкістю  $V$ .

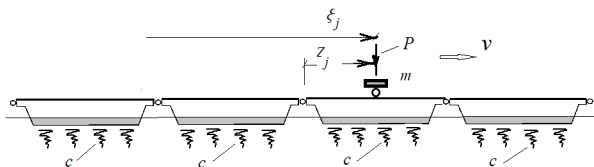


Рис. 2 – Принципова схема моделювання наплавного мосту з понтонами

З точки зору механіки для розгляду місцевої міцності судовий корпус можна прийняти за оболонку, яка підкріплена ребрами. Але в залежності від постановки задачі чи то для статичного деформування або динамічної поведінки можливі більш радикальні спрощення. Це може бути тонкостінна балка або абсолютно тверде тіло.

Також в залежності від типу конструкцій та призначення можуть бути використані різні схеми з'єднання окремих секцій в основний ланцюг мосту, тобто з'єднання плавучих частин з прогонами, понтонів між собою та інших. Одним з розповсюджених та природних типів з'єднань секцій може бути шарнірне (рис.3).

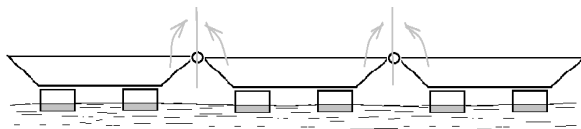


Рис. 3 – Шарнірне з'єднання секцій моделі плавучого мосту

Вибір типу з'єднання безпосередньо впливає на забезпечення стабільності та безпечності переправи.

**2. Постановка задачі. Побудова розрахункової динамічної моделі понтонної мостової споруди.** Понтонне мостове сполучення – це зручний та надійний інженерний варіант

переправи людей та вантажів через території заліті водою [11-14]. Йому присвячені численні теоретичні, розрахункові, експериментальні дослідження [15-16]. Такий спосіб транспортування виправдав себе на практиці та став незамінним в багатьох областях. Нафтовидобування, транспортна, військова сфери та інші. Понтонні платформи використовуються при проведенні геологічних розвідок, бурінні свердловин, експлуатації вітроенергетичних установок, тощо. В багатьох випадках наплавні мости відіграють життєво важливу роль по забезпеченню перевезень вантажів, пасажирів, туристів, переправ військових, рятувальних служб в окремих районах. При цьому бажаним може бути забезпечення автономного руху транспорту на платформах, можливість переміщення техніки. Силкові навантаження можуть виникати також внаслідок впливу зовнішніх факторів (хвиль, течії, вітру). Динамічний характер цих сил може впливати на поведінку споруди, і як наслідок, на стійкість, міцність та безпеку. За таких умов для контролю за безпекою роботи переправ потрібен аналіз їх динамічної поведінки. Головна увага в цій роботі направлена на вплив рухомих інерційних вантажів. Відповіді на ці питання можна одержати, зокрема, по результатам моделювання при характерних режимах експлуатації з врахуванням найбільш впливових факторів. Це дозволить оцінювати реакції платформ на дію змінних навантажень, прогнозувати можливі проблемні ситуації та вносити корективи ще на етапі проектування, сприятиме надійності та безпеці, зменшенню експлуатаційних витрат.

Дана робота присвячена розробці саме такої невеликої за масштабами та числом ступенів свободи характерної розрахункової та математичної динамічної моделі плавучої понтонної мостової конструкції при дії інерційних сил рухомих мас. Для моделювання та дослідження реакцій плавучих споруд на дію змінного навантаження подібного виду введено модельну схему наплавної переправи, зображеної на рис.4.

Конструкція складається з  $n$  частин – жорстких понтонів (барж), які шарнірно з'єднані між собою та береговими анкерами. Вони занурені, забезпечують плавучість мосту без відриву від поверхні води.

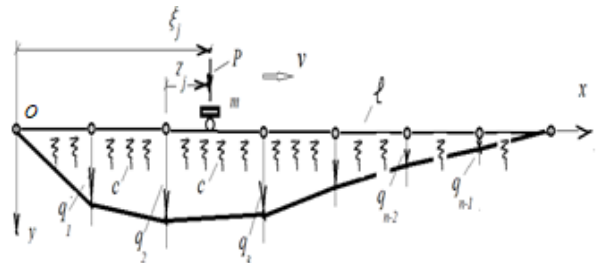


Рис. 4 – Розрахункова модель понтонної переправи з рухомих навантаженням

Будова вирізняється великою вантажопідйомністю та простотою. Для описання поточних конфігурацій всіх ланок конструкції в режимі вертикальних переміщень, на лівому краї

моделі введена система координат  $xOy$  (рис.4). Її початок вибирається в положенні статичної рівноваги між статичним навантаженням та гідростатичними силами.

$q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-2}, q_{n-1}$  – узагальнені координати, в якості яких приймаються вертикальні переміщення шарнірних точок з'єднання суміжних понтонів. При введених припущеннях координати  $q_i$  фізично представляють собою величини занурень точок ланцюга мосту, відповідних точкам з'єднання понтонів. Загалом, модельна конструкція наплавного мосту, яка складається з  $n$  секцій (понтонів), має  $(n - 1)$  ступінь свободи.

$M, l$  – маса та довжина кожної з секцій;

$\mu$  – погонна маса секції;  $\mu \cdot l = M$ ;

$m$  – маса рухомого транспорту;

$P = m \cdot g$  – вага рухомого екіпажу;

$V$  – швидкість руху транспорту по настилу платформи.

Рух екіпажу вздовж платформи вважається заданим, або рівноприскореним або рівноуповільненим:

$$V = V_0 + a_0 \cdot t. \quad (1)$$

де:  $V_0, a_0$  – стартові швидкість та прискорення.

В процесі переправи транспорт переїжджає з однієї секції на іншу.

$j$  – номер поточної секції, в межах якої в даний момент рухається екіпаж; ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

$\xi_j$  – відстань в системі координат  $xOy$ , яку подолав транспорт, рухаючись вздовж платформи:

$$\xi_j = \xi_{j0} + V_0 \cdot t + a_0 \cdot t^2 / 2.$$

$z_j$  – величина пройденої відстані від початку свого елемента:

$$z_j = \xi_j - (j - 1) \cdot l.$$

Для довільної точки понтону з номером  $i$ , що знаходиться на відстані  $z_i$  від його лівого краю, величина занурення буде залежати від значень узагальнених координат цього елемента:

$$y(z_i) = q_{i-1} + q_{i,i-1} \cdot z_i / l; \quad (2)$$

де:  $q_{i,i-1} = q_i - q_{i-1}$ .

Відповідно, для точки понтону під вантажем, величина занурення буде такою:

$$y(z_j) = q_{j-1} + q_{j,j-1} \cdot z_j / l.$$

**2.1. Визначення коефіцієнту погонної жорсткості пружної основи від сил спливання понтону.** Припускається, що на занурену платформу діють гідростатичні сили спливання пропорційні величині занурення:

$$P_{\text{підйому}} = F_{\text{осн}} \cdot \rho_v \cdot g \cdot y = \rho_v \cdot g \cdot l \cdot b \cdot y;$$

де:  $b$  – ширина платформи по ватерлінії;

$y$  – рівномірна величина осадки понтону.

В такому випадку при модельному представленні пружної основи плавучої частини можна записати:

$$P_{\text{пружне}} = c \cdot l \cdot y;$$

де:  $c$  – еквівалентна жорсткість, розподілена вздовж платформи; це – сила, що діє на одиницю довжини та відповідає одиничному зануренню;

$$c = \rho_v \cdot g \cdot b. \quad (3)$$

**2.2. Кінетична та потенціальна енергії моделі наплавного мосту.** Кінетична енергія системи складається з енергії вертикальних коливань понтонної системи та енергії вертикальних переміщень вантажу-екіпажу.

Кінетична енергія руху окремого понтону має вигляд:

$$T_{M_i} = \frac{1}{2} \int_0^l \mu dz \cdot \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2} M \cdot (\dot{q}_i \cdot \dot{q}_{i-1} + \frac{1}{3} q_{i,i-1} \dot{q}_i^2);$$

Кінетична енергія руху всіх платформ така:

$$T_M = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \cdot (\dot{q}_i \cdot \dot{q}_{i-1} + \frac{1}{3} q_{i,i-1} \dot{q}_i^2) = \\ = \frac{M}{6} (2 \cdot \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + 2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2 \cdot \dot{q}_3^2 + \dots \\ + 2 \cdot \dot{q}_{n-2}^2 + \dot{q}_{n-2} \dot{q}_{n-1} + 2 \cdot \dot{q}_{n-1}^2).$$

Кінетична енергія екіпажу, що перебуває в точці  $\xi_j$  платформи, при її вертикальних переміщеннях така:

$$T_m = \frac{m}{2} \cdot \dot{y}_j^2 = \frac{m}{2} (q_{j-1} \cdot (1 - \frac{z_j}{l}) - q_{j-1} \cdot \frac{z_j}{l} + \\ q_j \cdot \frac{z_j}{l} + q_j \cdot \frac{z_j}{l})^2;$$

$j = 1, 2, 3, \dots$  – номер секції, де знаходиться рухоме навантаження.

Повна кінетична енергія системи при дії інерційних сил рухомого екіпажу має вигляд:

$$T_{\Sigma} = T_M + T_m = \frac{M}{6} (2 \cdot \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + 2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dots + 2 \cdot \dot{q}_{n-2}^2 + \dot{q}_{n-2} \dot{q}_{n-1} + 2 \cdot \dot{q}_{n-1}^2) + \\ + \frac{m}{2} (q_{j-1} \cdot (1 - \frac{z_j}{l}) - q_{j-1} \cdot \frac{z_j}{l} + \\ q_j \cdot \frac{z_j}{l} + q_j \cdot \frac{z_j}{l})^2.$$

$U_i$  – потенціальна енергія пружних сил води при зануренні понтона  $i$ -ої секції:

$$U_i = \int_0^l \frac{1}{2} c \cdot \frac{y^2}{2} dz = \int_0^l \frac{1}{2} c \cdot (q_{i-1} + q_{i,i-1} \cdot \frac{z_i}{l})^2 dz = \\ = \frac{1}{6} cl (q_i^2 + q_i \cdot q_{i-1} + q_{i-1}^2).$$

$U$  – потенціальна енергія моделі всього понтонного мосту має вигляд:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \cdot cl (q_i^2 + q_i \cdot q_{i-1} + q_{i-1}^2) = cl/6 \cdot \\ (2q_1^2 + \\ + q_1 q_2 + 2q_2^2 + q_2 q_3 + 2q_3^2 + \dots + q_{n-2} q_{n-1} \\ + 2q_{n-1}^2).$$

Зовнішнє навантаження від рухомого транспорту у вигляді сили  $P$  приводиться до еквівалентної форми у двох вузлових точках  $(j - 1)$  та  $j$  (рис.5).

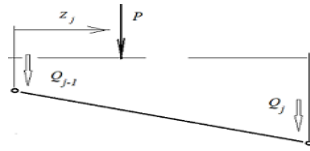


Рис. 5 – Еквівалентне вузлове навантаження

Для визначення цих узагальнених сил обчислюється варіація роботи ваги екіпажу на віртуальному переміщенні системи:

$$\begin{aligned} \delta A &= P \cdot \delta y_j = P \cdot \left( \delta q_{j-1} + \frac{z_j}{l} \cdot \delta q_{j,j-1} \right) = \\ &= P \cdot \delta q_{j-1} \left( 1 - \frac{z_j}{l} \right) + P \cdot \delta q_j \cdot \frac{z_j}{l} . \end{aligned}$$

В такому випадку узагальнені сили, що відповідають усім ступеням свободи мають наступні значення:

$$\begin{aligned} Q_s &= 0, \text{ для всіх секцій за виключенням } j ; \\ Q_{j-1} &= P \cdot \left( 1 - \frac{z_j}{l} \right) ; \\ Q_j &= P \cdot \frac{z_j}{l} ; \end{aligned}$$

де:  $j$  – номер секції на якій знаходиться транспорт. Загальний вигляд буде таким:

$$Q_s = \frac{P}{l} \cdot [\delta_{s,j-1}(l - z_j) + \delta_{s,j} z_j], \quad (s = 1, 2, \dots, n - 1) .$$

**3. Побудова математичної моделі вертикальної динаміки понтонної мостової споруди.** Для формування диференціальних рівнянь руху сконструйованої моделі понтонної системи застосовується метод рівнянь Лагранжа II роду.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s} = Q_s, \quad (s = 1, 2, 3, \dots, n - 1) .$$

Приймаючи до уваги одержані вище значення енергій  $T_{\Sigma}$  та  $U$ , а також узагальнених сил  $Q_s$  диференціальні рівняння вертикальної динаміки занурень моделі понтонної споруди набувають такого виду:

$$\begin{aligned} M(\ddot{q}_{s-1} + 4\ddot{q}_s + \ddot{q}_{s+1}) + 6m[\ddot{q}_{j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}] * \\ * [\delta_{s,j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}] = \\ = 6Q_s - cl(q_{s-1} + 4q_s + q_{s+1}) - 6m[-2\dot{q}_{j-1} \frac{\dot{z}_j}{l} - \\ - q_{j-1} \frac{\ddot{z}_j}{l} + 2\dot{q}_j \frac{\dot{z}_j}{l} + q_j \frac{\ddot{z}_j}{l}] \cdot [\delta_{s,j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}] ; \\ (s = 1, 2, \dots, n - 1); \quad j = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Зручно ввести позначення  $k^2 = cl/M$ , яке в подальших обчисленнях стане відомим, як квадрат власної частоти вертикальних коливань а воді.

Надалі одержані розрахункові рівняння будемо використовувати у формі (4):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{s-1} + 4\ddot{q}_s + \ddot{q}_{s+1} + 6 \frac{m}{M} [\ddot{q}_{j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \ddot{q}_j \frac{z_j}{l}] * \\ * [\delta_{s,j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{6}{M} Q_s - k^2(q_{s-1} + 4q_s + q_{s+1}) - 6 \frac{m}{M} [-2\dot{q}_{j-1} \frac{\dot{z}_j}{l} - \\ - q_{j-1} \frac{\ddot{z}_j}{l} + 2\dot{q}_j \frac{\dot{z}_j}{l} + q_j \frac{\ddot{z}_j}{l}] \cdot [\delta_{s,j-1}(1 - \frac{z_j}{l}) + \delta_{s,j} \frac{z_j}{l}] ; \\ (s = 1, 2, \dots, n - 1); \quad j = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Ці рівняння розрахункової моделі наплавної понтонної мостової споруди містять у своєму складі інерційні сили рухомого екіпажу і підготовлені до аналізу нестационарних процесів, що мають місце в схожих плаваючих конструкціях. Дослідження впливу дії рухомого з різними швидкостями екіпажу на вертикальні коливання занурення понтонної споруди згідно з рівняннями (4) буде представлено в наступній роботі. Натомість зараз приведемо рішення спектральної задачі власних вертикальних коливань платформної споруди без вантажу.

**4. Власні вертикальні коливання на воді понтонної конструкції без врахування транспорту.** Рівняння (4) допускають визначення спектра частот наплавної споруди, яка складається з однакових понтонів, що шарнірно з'єднані між собою. Достатньо прості залежності для них при вільних коливаннях можна записати в наступній формі:

$$\ddot{q}_{s-1} + 4\ddot{q}_s + \ddot{q}_{s+1} + k^2(q_{s-1} + 4q_s + q_{s+1}) = 0; \quad (5)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n - 1) . \quad )$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 4 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 4 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_{n-2} \\ \ddot{q}_{n-1} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 4k^2 & k^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k^2 & 4k^2 & k^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k^2 & 4k^2 & \cdot & k^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & k^2 & 4k^2 & k^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & k^2 & 4k^2 & k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k^2 & 4k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_i \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = 0 . \end{aligned}$$

Як відомо, власні коливання здійснюються всією системою у вигляді гармонічного процесу з власною частотою  $\omega_s$  по закону:

$$q_i = \lambda_i \sin(\omega_s t + \alpha_s) \quad (i, s = 1, 2, \dots, n - 1) .$$

Особливістю частотного спектру коливань на воді цієї моделі мосту є багатократність власної частоти, викликаной симетрією її структури :

$$\omega_s = k ; \quad (s = 1, 2, \dots, n - 1) . \quad (6)$$

Приведемо схему власних форм коливань, які допомагають у подальшому аналізі нестационарних процесів від дії рухомого навантаження.

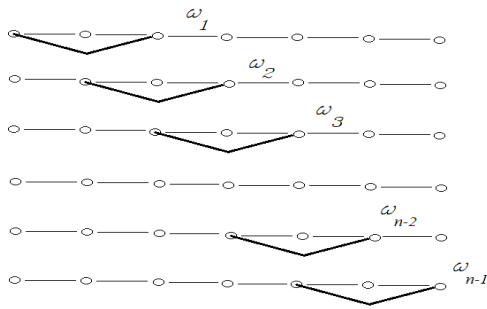


Рис. 6 – Власні форми вертикальних коливань моделі на воді

Нагадаємо, що власні форми коливань показують співвідношення вертикальних переміщень точок шарнірних з'єднань понтонів при зануренні на власному коливанні. Природно, що при русі транспорту вздовж платформи мосту чутливість до збудження будуть проявляти в більшій степені форми тих елементів, поряд з якими рухається екіпаж. Більш детальний аналіз вертикальної динаміки на воді цієї моделі, пов'язаний з нестационарною поведінкою, викладений в другій статті дослідження.

Можна зробити наступні висновки:

- Використання технології понтонних переправ у вигляді понтонних мостів або інших плавучих морських, річкових інженерних засобів є розповсюдженим, зручним та надійним інженерним рішенням переправи людей, вантажів, техніки через місцевості покриті водою. Дослідження динамічних процесів в них для різних випадків зовнішніх збурень є актуальною задачею.
- Безпечність експлуатації та безаварійна робота при використанні плаваючих понтонних засобів, яка супроводжується рухом перевезеної техніки, пасажирів, рятувальних служб, тощо є життєво важливою і потребує уваги в питаннях проявів динамічної активності.
- В даній роботі з використанням спрощень та припущень побудовані розрахункова динамічна та математична моделі невеликої як за масштабом так і числом ступенів свободи понтонної мостової споруди для організації переправ з врахуванням інерційних сил рухомих по її платформі екіпажів. Модель дозволяє проводити аналіз нестационарної динаміки занурення-спливання системи на воді під впливом цих сил та надавати ряд відповідей на важливі інженерні запитання.
- Побудовану розрахункову та математичну моделі можна доповнювати іншими актуальними силовими факторами впливу, варіювати параметрами моделі мосту, параметрами руху, вантажу, розглядати потоки з декількох екіпажів та інше.

#### Список літератури

1. Kristine Senderud. Modeling and Analysis of Floating Bridge Concepts Exposed to Environmental Loads and Ship Collision. Norwegian University of Science and Technology. 2018. 210 p

2. Lwin M. M. Floating Bridges. CRC Press, 2014
3. Kristina Husev\_ag Lund. Description and Analysis of Floating Bridges, Norwegian University of Science and Technology. 2017.
4. Ibrahim Osamo. Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridges. Ontario, Canada, 2011. 332p.
5. Fenerci, A., Kvåle, K. A., Xiang, X., & Øiseth, O. (2022). Hydrodynamic interaction of floating bridge pontoons and its effect on the bridge dynamic responses. *Marine Structures*, 83, 103174. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2022.103174>
6. Seif M. S., Inoue Y. Dynamic analysis of floating bridges, *Marine structures*, 1998, 29-46 pp [https://doi.org/10.1016/S0951-8339\(97\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8339(97)00012-9)
7. *Dynamic Analysis of Floating Bridges: Doctoral Dissertation*. Mitja Papinutti / Ole Øiseth, Nils Erik Anders Rønquist, Stojan Kravanja, Dušan Žagar, M. Papinutti, 2021, 103p
8. Raftoyiannis I. G., Avraam T., Michaltsos G. Analytical models of floating bridges under moving loads. *Engineering, Materials Science*, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.002>
9. Yuji Miao, Xu-jun Chen, Yong-lin Ye, Jun Ding, Heng Huang. Numerical modeling and dynamic analysis of a floating bridge subjected to wave, current and moving loads. *Ocean Engineering*, Volume 225, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108810>
10. Ben C. Gerwick, Jr. Construction of Marine and Offshore Structures. CRC Press, Taylor&FrancisGroup, 2007 <https://doi.org/10.1201/9780849330520>
11. Перепелиця К. М., Ключник, С. В. Використання наплавних (понтонних) мостів для технічного прикриття транспортних об'єктів. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, №26, 2024 63–70 с <https://doi.org/10.15802/btrp2024/315301>.
12. Смірнов В. Н., Дяченко Л. К. Спеціальний курс проектування і будівництва мостів:учб посібник/ В. Н. Смірнов, Л. К. Дяченко.-М.: Вологда:Інфра Інженерія, 2025.-152с.
13. Бугаєвський С. О., Ненастіна Т. О., Бугаєвський В. О., Бугаєвська Ю. В. Сучасний стан розвитку постійних наплавних мостів та перспективи їх будівництва в Україні. Опір матеріалів і теорія споруд/ *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. №113.
14. Гернич М. В., Ключник С. В. Використання майна наплавного мосту НЖМ-56 зважаючи на виклики військового сьогодення. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, 2022, № 22, с27-32. <https://doi.org/10.15802/btrp2022/268185>
15. Chao Wang, Minghao Cui, Zhenghun Cheng, Torgeir Moan. A review on design and analysis of floating bridges: Numerical simulations, model tests and field measurements. 2024. *Ocean Engineering* 306(6) 118065. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118065>
16. Yanyan Sha, Jorgen Amdahl, Aleksander Aalberg, Zhaolong Yu. Numerical investigations of the dynamic response of a floating bridge under environmental loadings. Volume 13, 2018, *Ships and Offshore Structures*. <https://doi.org/10.1080/17445302.2018.1426818>

#### References (transliterated)

1. Kristine Senderud. Modeling and Analysis of Floating Bridge Concepts Exposed to Environmental Loads and Ship Collision. Norwegian University of Science and Technology. 2018. 210 p
2. Lwin M. M. Floating Bridges. CRC Press, 2014
3. Kristina Husev\_ag Lund. Description and Analysis of Floating Bridges, Norwegian University of Science and Technology. 2017.
4. Ibrahim Osamo. Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridges. Ontario, Canada, 2011. 332p.
5. Fenerci, A., Kvåle, K. A., Xiang, X., & Øiseth, O. (2022). Hydrodynamic interaction of floating bridge pontoons and its effect on the bridge dynamic responses. *Marine Structures*, 83, 103174. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2022.103174>
6. Sei M. S., Inoue Y. Dynamic analysis of floating bridges, *Marine structures*, 1998, 29-46 pp [https://doi.org/10.1016/S0951-8339\(97\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8339(97)00012-9)
7. *Dynamic Analysis of Floating Bridges: Doctoral Dissertation*. Mitja Papinutti / Ole Øiseth, Nils Erik Anders Rønquist, Stojan Kravanja, Dušan Žagar, M. Papinutti, 2021, 103p
8. Raftoyiannis I. G., Avraam T., Michaltsos G. Analytical models of floating bridges under moving loads. *Engineering, Materials Science*, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.002>
9. Yuji Miao, Xu-jun Chen, Yong-lin Ye., Jun Ding, Heng Huang.

- Numerical modeling and dynamic analysis of a floating bridge subjected to wave, current and moving loads. Ocean Engineering, Volume 225, 2021.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108810>
10. *Be C. Gerwick, Jr.* Construction of Marine and Offshore Structures. CRC Press, Taylor&FrancisGroup, 2007 <https://doi.org/10.1201/9780849330520>
  11. *Perepelytsia K. M., Kliuchnyk S. V.* Vykorystannia naplavnykh (pontonnykh) mostiv dlia tekhnichnoho prykryttia transportnykh ob'ektiv. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*, №26, 2024 63–70 s. <https://doi.org/10.15802/bttrp2024/315301>
  12. *Smirnov V. N., Diachenko L. K.* Spetsialnyi kurs proektuvannia i budivnytstva mostiv: uchb posibnyk/ V. N. Smirnov, L. K. Diachenko - M. : Volohda: Infra Inzheneriia, 2025.-152s.
  13. *Buhaievskiy S. O., Nenastina T. O., Buhaievskiy V. O., Buhaievskaya Yu. V.* Suchasnyi stan rozvytku postiiynykh naplavnykh mostiv ta perspektyvy yikh budivnytstva v Ukraini. *Opir materialiv i teoriia sporud/ Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. №113.
  14. *Hernych M. V., Kliuchnyk S. V.* Vykorystannia maina naplavnoho mostu NZhM-56 zvezhaiuchy na vyklyky viiskovoho sohodennia. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*, 2022, № 22, s27-32. <https://doi.org/10.15802/bttrp2022/268185>
  15. *Chao Wang, Minghao Cui, Zhengun Cheng, Torgeir Moan.* A review on design and analysis of floating bridges: Numerical simulations, model tests and field measurements. 2024. *Ocean Engineering* 306(6) 118065.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118065>
  16. *Yanyan Sha, Jorgen Amdahl, Aleksande Aalberg, Zhaolong Yu.* Numerical investigations of the dynamic response of a floating bridge under environmental loadings. Volume 13, 2018, *Ships and Offshore Structures*.  
<https://doi.org/10.1080/17445302.2018.1426818>

Надійшла (received) 23.06.2025

Прийнята до друку (accepted) 20.10.2025

Опублікована (published) 29.12.2025

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Грищенко Володимир Миколайович (Grishenko Volodimir)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>; e-mail: [grivn\\_dmm@ukr.net](mailto:grivn_dmm@ukr.net)