



ISSN 2078-9130

ВІСНИК

Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCES OF UKRAINE

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

National technical university
"Kharkiv polytechnic institute"

ВІСНИК

**Національного
технічного університету «ХПІ»
Серія: Динаміка і міцність
машин**

№ 1 2024

BULLETIN

**of the National
Technical University "KhPI"
Series: Dynamics and Strength of
Machines**

No. 1 2024

Збірник наукових праць

Collection of Scientific papers

Видання засноване у 1961 р.

The edition was founded in 1961

**Харків
НТУ «ХПІ», 2024**

**Kharkiv
NTU "KhPI", 2024**

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин : збірник наукових праць. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2024. – № 1. – 74 с. ISSN 2078-9130

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок, виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

Ідентифікатор медіа R30-01543, згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 16.10.2023 № 1075.

Засновник видання Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Мова статей – українська, англійська.

Web-сайт (web-сторінка) наукового видання – <https://jds.m.khpi.edu.ua/>

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України №886 від 02.07.2020 року.

Від 2013 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до довідника періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Від 2014 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до наукометричної бази даних індекс ICV (Index Copernicus Value)

Від 2013 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до БД «Наукова періодика України» Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського.

Від 2001 р. статті *Вісника Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* представлені у репозитарії «Електронний архів Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», у розділі Вісники НТУ «ХПІ» за роками видання

Головний редактор

Морачковський О. К., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Morachkovskiy, O. K.)

Редакційна колегія

Аврамов К. В., доктор технічних наук, професор, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Avramov, K. V.)

Альтенбах Х., доктор технічних наук, професор, Інститут механіки, Університет Отто фон Геріке, Магдебург, Німеччина (Altenbach, H., Prof. Dr.-Ing. habil., Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Барканов Є. М., доктор інженерних наук, професор, Інститут матеріалів і конструкцій, Ризький технічний університет, Латвія (Barkanov, E. N.)

Бреславський Д. В., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Breslavskiy, D. V.)

Воробйов Ю. С., доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Vorobiov, Yu. S.)

Зінковський А. П., доктор технічних наук, професор, Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна (Zinkovskiy, A. P.)

Курпа Л. В., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Kurpa, L. V.)

Ларін О. О., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Larin, O. O.)

Львов Г. І., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Lvov, H. I.)

Мартиненко Г. Ю., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Martynenko, H. Yu.)

Міхлін Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Mikhlin, Yu. V.)

Науменко К., доктор технічних наук, професор, Інститут механіки, Університет Отто фон Геріке, Магдебург, Німеччина (Naumenko, K., Prof. Dr.-Ing. habil., Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Пеллікано Ф., доктор механіки, професор, Університет Модени і Реджо-Емілії, Італія (Pellicano, F., Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italy)

Ткачук М. А., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Tkachuk, M. A.)

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 9 від 28 листопада 2024 р.

© Національний технічний університет «ХПІ», 2024

Р. Ю. ШАКАЛО, О. О. ЛАРІН, К. В. САВЧЕНКО

РОЗРАХУНКОВО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОЧАТКОВОГО ПАРАМЕТРУ СПРЯЖЕННЯ БАНДАЖНИХ ПОЛИЦЬ ПОПАРНО БАНДАЖОВАНИХ ЛОПАТОК НА СТАТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ У ПЕРІ ЛОПАТКИ

В роботі розглядаються результати експериментального дослідження впливу початкового параметру спряження бандажних полиць попарно бандажованих робочих лопаток на статичні напруження у кореновому перерізі пера лопаток, а також порівняння отриманих результатів з розрахунковими даними. Експериментальні дослідження проводились на установці, створеній в Інституті проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України. Для проведення розрахунків розроблено тривимірні скінченноелементні моделі попарно бандажованих робочих лопаток. Для моделювання початкового параметру спряження моделі розроблено як для лівих так і для правих лопаток – тобто розроблено пари лопаток. Робота проводилась для неохолоджуваних і для охолоджуваних попарно бандажованих робочих лопаток турбін. З метою верифікації розроблених моделей для кожної лопатки виконано модальний аналіз для визначення власних частот коливань та проведено порівняння з експериментальними даними, отриманими при виготовленні лопаток. Проведено аналіз розрахунково-експериментальних досліджень впливу початкового параметру спряження на статичні напруження у кореновому перерізі пера лопаток. Встановлено, що зі збільшенням початкового параметру спряження статичні напруження у кореновому перерізі лопаток збільшуються прямопропорційно. Також встановлено, що статичні напруження у пері для лівої та правої лопаток майже однакові при однаковому параметрі спряження, як для не охолоджуваних лопаток так і для охолоджуваних. Існує суттєва похибка між експериментальними та розрахунковими значеннями, при цьому характер залежності напружень від початкового параметру схожий – прямолінійний. Похибка між експериментальними та розрахунковими значеннями пояснюється тим, що при виготовленні лопаток мають місце відхилення від номінальних розмірів, а моделі побудовано по номінальним розмірам.

Ключові слова: попарно бандажовані лопатки, спряження полиць, демпфірувальна здатність, статичні напруження

R. SHAKALO, O. LARIN, K. SAVCHENKO

COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL IMPACT STUDY INITIAL PAIRING PARAMETER OF BANDAGE SHELVES PAIRS OF BANDED BLADES FOR STATIC STRESSES IN THE FEATHER OF THE SHOULDER BLADES

The paper discusses the results of an experimental study of the influence of the initial parameter of the conjugation of the bandage shelves of the pair-banded working blades on the static stresses in the root section of the blades, as well as the comparison of the obtained results with the calculated data. Experimental studies were carried out at the installation created at the Institute of Strength Problems named after H.S. Pysarenko of the National Academy of Sciences of Ukraine. For calculations, three-dimensional finite element models of paired working blades were developed. To simulate the initial conjugation parameter, the model was developed for both left and right blades - that is, pairs of blades were developed. The work was carried out for non-cooled and for cooled pair-banded working blades of turbines. In order to verify the developed models, a modal analysis was performed for each blade to determine the natural frequencies of oscillations and a comparison was made with the experimental data obtained during the manufacture of the blades. An analysis of computational and experimental studies of the influence of the initial conjugation parameter on static stresses in the root cross-section of the blade feather was carried out. It was established that with an increase in the initial conjugation parameter, the static stresses in the root cross-section of the blades increase in direct proportion. It was also established that the static stresses in the feather for the left and right vanes are almost the same with the same coupling parameter, both for uncooled blades and for cooled blades. There is a significant error between the experimental and calculated values, while the nature of the stress dependence on the initial parameter is similar - rectilinear. The error between the experimental and calculated values is explained by the fact that during the manufacture of the blades there are deviations from the nominal dimensions, and the models are built according to the nominal dimensions.

Keywords: pairwise banded blades, flange conjugation, damping capacity, static stresses

Мета та постановка задачі. Сучасні авіаційні газотурбіні двигуни (АГТД) мають високі питомі характеристики, які досягаються за рахунок підвищення ступеню стискання у компресорі, підвищення температури газу перед турбіною, зменшення втрат у вузлах та інше. Одним з головних параметрів АГТД також є маса. Зменшення маси сучасних АГТД може відбуватися за рахунок застосування нових матеріалів, технологій виготовлення та за рахунок оптимізації конструкції. Однак підвищення параметрів та зменшення маси деталей призводить до збільшення напружень у деяких деталях та вузлах АГТД. Одними з таких деталей є робочі лопатки турбін, тому, що вони сприймають високі температурні,

відцентрові та динамічні навантаження, і саме робочі лопатки турбін здебільшого визначають ресурс АГТД, адже більшість відмов двигунів пов'язані з руйнуванням лопаток турбіни [1-5]. Відомо, що для підвищення надійності робочих лопаток впроваджують конструктивні, технологічні, експлуатаційні заходи.

Поличне бандажування лопаток робочих лопаток відноситься до конструктивних заходів оскільки внаслідок взаємних переміщень контактуючих поверхонь полиць при циклічному деформуванні лопаток зменшується напруження у пері, тому воно широко застосовується при проектуванні. Бандажування також зменшує перетікання газу через радіальний проміжок і

зменшує кінцеві втрати, що підвищує ефективність вузла. Основною умовою його функціонування є забезпечення гарантованого притиснення контактуючих поверхонь полиць або їх натягу на усіх режимах експлуатації двигуна.

Вивченням впливу умов спряження бандажних полиць на напружено-деформований стан лопаток турбін займається багато науковців. Так, у роботах [6-9] наведено результати дослідження впливу спряження бандажних полиць на напружений стан та на коливання лопаток, а також запропоновано шляхи для підвищення надійності і ресурсу лопаток. У роботах розглянуто як пакетне так і кільцеве бандажування. Проте питанню вивчення впливу умов спряження бандажних полиць на напружено-деформований стан попарно бандажованих лопаток приділяється мало уваги.

Однак попарне бандажування лопаток є особливим видом бандажування, коли використовуються тільки беззигові полиці. Частіше, такий спосіб бандажування використовується для лопаток із складеним ялинковим хвостовиком, коли в один паз диску встановлюється дві лопатки (умовно права та ліва лопатки). В цьому випадку джерелом конструкційного демпферування коливань лопаток є як бандажне, так і замкове з'єднання.

В практиці проектування АГТД на ДП «Івченко-Прогрес», широкого застосування знайшла схема попарного бандажування робочих лопаток турбін зі складеним ялинковим хвостовиком. Така схема застосовується на таких двигунах як: АИ-20, АИ-25, Д-36, Д-18, Д-436, АИ-322 та інші.

Відомо, що напруження у пері залежить від багатьох конструктивних та технологічних параметрів [10]. Одним з таких параметрів є – початковий параметр спряження бандажних полиць. Найбільші напруження у пері виникають, як правило, у кореновому перерізі [11] тому порівняння статичних напружень будемо проводити саме для коренового перерізу зі сторони спинки, оскільки в цьому місці зручніше встановлювати тензодатчики.

Метою роботи є встановлення експериментальних і розрахункових залежностей статичних напружень у кореновому перерізі пера від початкового параметру спряження бандажних полиць.

Експериментальне дослідження. Для проведення дослідження обрано неохолоджувані попарно бандажовані робочі лопатки третьої ступені турбіни АГТД АИ-25 та охолоджувані попарно бандажовані лопатки турбіни високого тиску АГТД Д-36. На рис. 1 показані обрані попарно бандажовані лопатки турбіни АГТД АИ-25 (а) та АГТД Д-36 (б).

Як було зазначено у [12] конструктивною особливістю таких лопаток є те, що в паз диска

ялинкового типу вільно встановлюється складений хвостовик, кожна половина якого має перо з беззиговою бандажною полицею. Очевидно, що після складання робочого колеса між контактними поверхнями бандажних полиць і хвостовиків будуть проміжки.

В умовах експлуатації під дією відцентрових сил відбувається притиснення контактних поверхонь полиць та хвостовиків між собою та з диском із зусиллям, при якому можна припускати їх абсолютно жорсткий зв'язок з диском. При цьому умови затиснення лопаток в диску, як правило, такі, що вони не перешкоджають відносному проковзуванню контактуючих поверхонь половинок хвостовика і бандажних полиць, внаслідок чого при циклічному деформуванні лопаток відбувається розсіювання енергії. Тобто замкове і бандажне з'єднання лопаток є природними конструкційними демпферами коливань.

Враховуючи той факт, що основною задачею роботи є визначення впливу початкового параметру спряження бандажних полиць на статичні напружень у кореновому перерізі пера лопатки були підготовані таким чином, щоб покроково відтворити початковий параметр від максимального до мінімального.

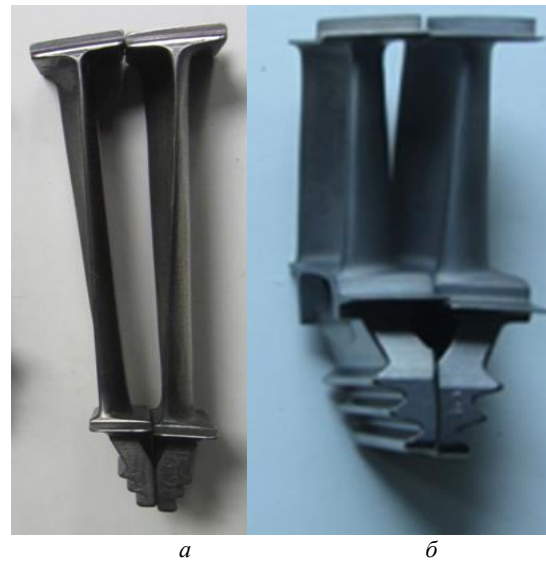


Рис. 1 – Попарно бандажовані лопатки турбін АГТД АИ-25 (а) та Д-36 (б)

На рис. 2, представлена схема визначення початкового параметру $\Delta_n = (\Delta_n' + \Delta_n'')$ по полицях попарно бандажованих лопаток. Зменшення початкового параметру досягалось послідовно.

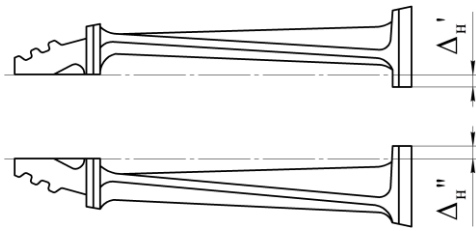


Рис. 2 – Схема визначення початкового натягу по полицях попарно бандажованих лопаток

Експериментальні дослідження обраних натурних лопаток проводилось наступним чином:

- 1) визначався початковий параметр спряження Δ_n ;
- 2) пара лопаток встановлювалась в гідрозажимі та стискається по ялинковому хвостовику;
- 3) ресструються статичні напруження згину $\sigma_{ст}$ в кореновому перерізі пера лопатки, які виникають внаслідок стискання контактних поверхонь бандажних полиць при відповідному значенні параметру Δ_n ;
- 4) здійснюється обробка торців бандажних полиць на однакову величину, що призводить до зміни параметрів Δ_n' та Δ_n'' та відповідно до зміни величини Δ_n ;
- 5) повторюються випробування у відповідності з пунктами 1-4.

Необхідно зазначити, що експериментальні дослідження проводились на установці, створеній в Інституті проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України.

Розрахункові дослідження. Всі розрахункові дослідження проводились за допомогою програмного комплексу Ansys.

Для проведення розрахункових досліджень були розроблені тривимірні моделі обраних лопаток у системі Unigraphics NX, як лівих так і правих (рис.3).

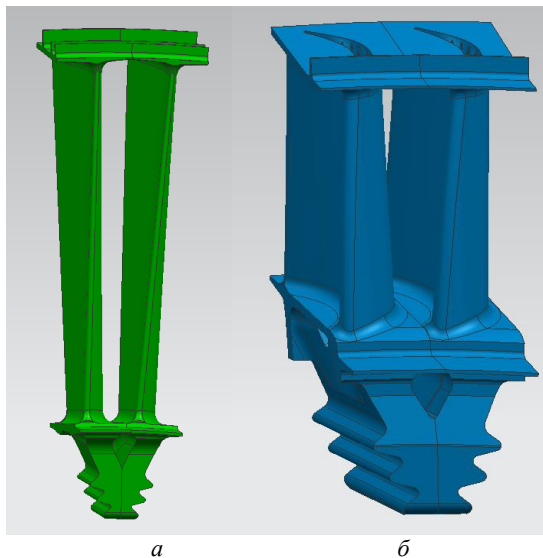


Рис. 3 – Моделі попарно бандажованих лопаток турбін АГТД АИ-25 (а) та Д-36 (б)

Для кожної лопатки виконано модальний аналіз для визначення власних частот коливань. Як відомо при виробництві лопаток контролюється частота першої згинальної форми, а отже можливо порівняти розрахункові та експериментальні дані з метою верифікації розроблених моделей [13;14]. Отримані дані наведені у таблиці 1.

Як видно з даних таблиці 1 похибка між експериментальною та розрахунковою частотою по першій згинальній формі коливань для неохолоджуваних робочих лопаток двигуна АИ-25 складає менше одного відсотка, що свідчить про коректність розроблених моделей.

Таблиця 1 – Частота першої згинальної форми лопаток

	АИ-25		Д-36	
	Ліва	Права	Ліва	Права
фекспер, Гц	375	377	2025	2040
фрзрах, Гц	373	374	2112	2160
Похибка	0,5%	0,75%	4,5%	5,5%

Для охолоджуваних робочих лопаток двигуна Д-36 похибка складає приблизно п'ять відсотків.

Така суттєва різниця похибки пояснюється більш складною конструкцією, та технологією виготовлення охолоджуваних лопаток. Враховуючи це отримана похибка для охолоджуваних лопаток вважається прийнятною, а отже і розроблені моделі коректними. Необхідно зазначити, що експериментальні частоти, котрі наведені у таблиці 1 визначені як середнє значення після контролю комплексу відповідних лопаток.

Для розрахункового визначення впливу початкового параметру спряження бандажних полиць на статичні напружень у пері, моделі лопаток були розроблені аналогічно з експериментальними дослідженнями. Тобто початковий параметр моделювався від найбільшого до найменшого. Значення початкового параметру в моделях повністю відповідали експериментальним.

За допомогою програмного комплексу Ansys розроблено скінченно-елементні моделі лопаток (рис. 4) та накладено граничні умови для розрахунку.

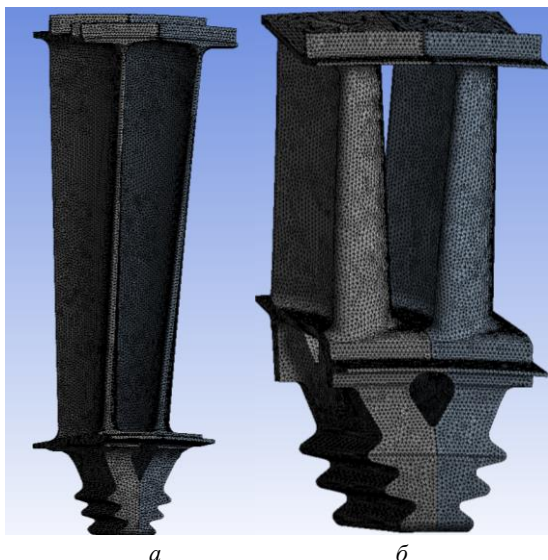


Рис. 4 – Скінченно-елементні моделі попарно бандажованих лопаток турбін АГТД АІ-25 (а) та Д-36 (б)

Кількість вузлів та елементів для необхідної пари лопаток склала 587201 та 388986 відповідно. Для охолоджуваної пари лопаток – 1325545 та 890102 відповідно.

З метою більш коректного вирішення контактної задачі по місцю моделювання початкового параметру Δ_n на бандажних полицях було покращено якість елементів (рис. 5). Контакт задано між двома торцями бандажних полиць по всій площині (Frictional). Враховуючи, що коефіцієнт тертя між торцями бандажних полиць несуттєво впливає на напруження у пері [15], коефіцієнт задано 0,17.

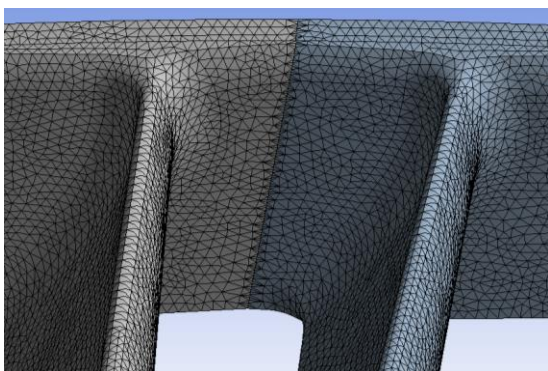


Рис. 5 – Скінченно-елементні моделі контакту бандажних полиць

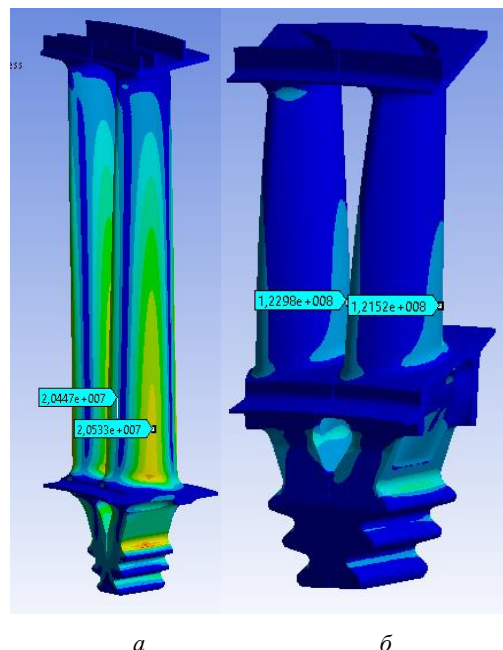


Рис. 6 – Місце визначення статичні напруження згину $\sigma_{ст}$ в лопатках турбін АГТД АІ-25 (а) та Д-36 (б)

Розрахункові статичні напруження згину $\sigma_{ст}$ в кореневому перерізі пера лопатки визначалися на тому ж радіусі, де при експерименті кріпився тензодатчик (рис. 6)

Для кожного початкового параметру спряження Δ_n були визначені експериментальні та розрахункові значення статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ як для лівої так і для правої лопаток. За результатами отриманих даних побудовані залежності статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ від початкового параметру спряження Δ_n (рис. 7-10).

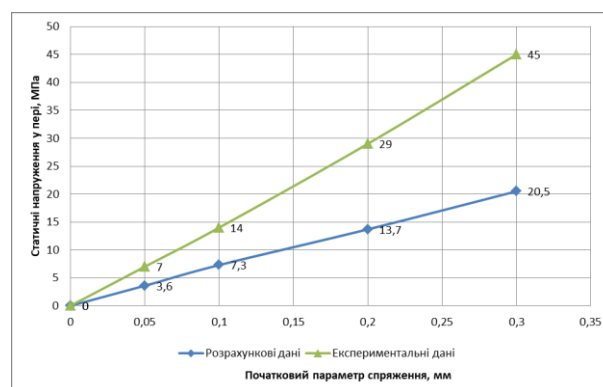


Рис. 7 – Залежність статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ від початкового параметру спряження Δ_n лівої лопатки АГТД АІ-25

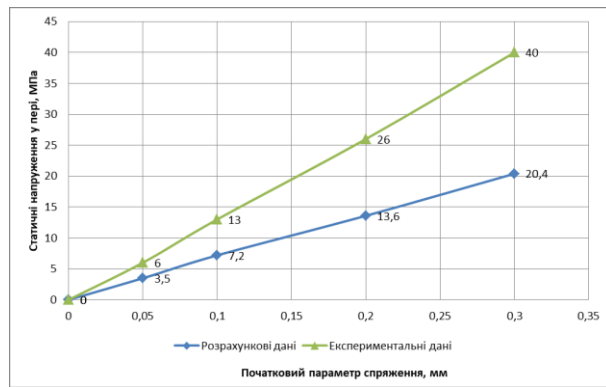


Рис. 8 – Залежність статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ від початкового параметру спряження Δ_n правої лопатки АГТД АІ-25

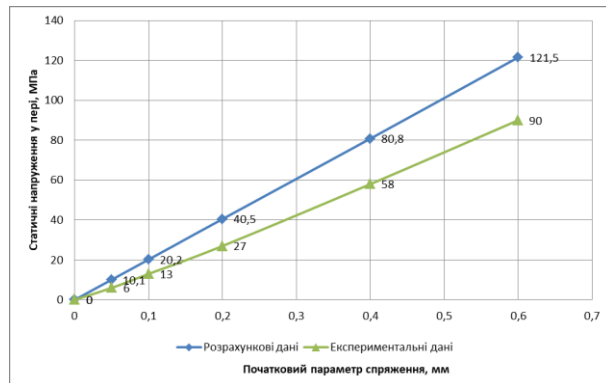


Рис. 9 – Залежність статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ від початкового параметру спряження Δ_n лівої лопатки АГТД Д-36

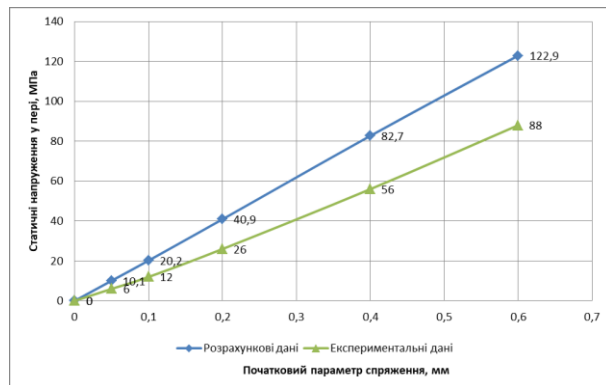


Рис. 10 – Залежність статичних напружень згину $\sigma_{ст}$ від початкового параметру спряження Δ_n правої лопатки АГТД Д-36

Висновки. Проведено експериментальні та розрахункові дослідження впливу початкового параметру спряження бандажних полиць на статичні напруження у кореновому перерізі пера лопаток. За результатами досліджень встановлено, що зі збільшенням початкового параметру статичні напруження збільшуються прямопропорційно. Статичні напруження у пері для лівої та правої лопаток майже однакові при однаковому параметрі спряження, як для не охолоджуваних лопаток так і для охолоджуваних. Існує суттєва похибка між

експериментальними та розрахунковими значеннями, при цьому характер залежності напружень від початкового параметру схожий – прямолінійний. Похибка пов'язана з тим, що розрахункові результати отримані у точці, а при експериментальному дослідженні – по базі тензодатчика.

Список літератури

1. Kulyk M. Thermocyclic fatigue and destruction of high pressure turbine blades in their critical sections / Kulyk M. Kovesnikov M. Petruk Y. Petruk B. Yakushenko O. // Transportation Research Procedia. - 2022. - Vol. 63. - P. 2812–2819. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.06.326>.
2. Kumari S. Failure analysis of gas turbine rotor blades / S. Kumari, D. Satyanarayana, M. Srinivas // Engineering Failure Analysis. - 2014. - Vol. 45. - P. 234–244. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.06.003>.
3. Rani S. Failure investigations of a first stage Ni based super alloy gas turbine blade / S. Rani, A. Agrawal, V. Rastogi // Materials Today: Proceedings. - 2018. - Vol. 5. - P. 477–486. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.11.108>.
4. Madhavan S. Vibration based damage detection of rotor blades in a gas turbine engine / S. Madhavan, R. Jain, C. Sujatha, A. Sekhar // Engineering Failure Analysis. - 2014. - Vol. 46. - P. 26–39. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.07.021>.
5. Poursaeid E. Failure analysis of a second stage blade in a gas turbine engine / E. Poursaeid, M. Aienervae, M. R. Mohammadi // Engineering Failure Analysis. - 2008. - Vol. 15. - P. 1111–1129. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2007.11.020>.
6. Придорожний П. П. Вплив монтажного натягу на напружено-деформований стан турбінної лопатки та втрату натягу по полицях у процесі експлуатації / П. П. Придорожний, О. Ст. Шереметьєв, А. П. Зінківський // Авіаційно-космічна техніка та технологія. - 2006. - №8 (34).
7. Pennacch P. A model to study the reduction of turbine blade vibration using the snubbing mechanism/ P. Pennacchi, S. Chatterton, N. Bachschmid, E. Pesatori, G. Turozzi // Mechanical Systems and Signal Processing. - 2011. - Vol. 25. - P. 1260–1275 <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.10.006>.
8. Воробійов Ю. С. Коливання бандажованого робочого колеса ВМД / Ю. С. Воробійов, К. Ю. Дьяконенко, В. Н. Романенко, С. Б. Кулішов, А. М. Скрицький // Авіаційно-космічна техніка та технологія - 2006 - №8 (34)
9. Меркулов Ст. М. Про вплив параметрів бандажування на надійність та ресурс робочих лопаток турбін/В. М. Меркулов, Ю. Ст. Якушев, М. Н. Федорченко, О. П. Зінківський // Авіаційно-космічна техніка та технологія. - 2009. - №10 (67).
10. Токар І. Г. До питання про можливості підвищення демпфуючої здатності робочих лопаток сучасних двигунів/І. Г. Токар А. П. Зінківський, В. В. Матвеев // Проблеми міцності. - 2003. - №4. - С. 58–6
11. Кулик М. С. Дослідження напруженого і граничного стану робочої лопатки турбіни від дії газових та інерційних сил / М. С. Кулик, Т. В. Доник // Авиационно-космическая техника и технология. - 2009. - №9 (66).
12. Зінківський А. П. Дослідження впливу гнучкості пера на оптимальні умови спряження полиць попарно бандажованих лопаток турбін. / Зінківський А. П., Меркулов В. М., Токар І. Г., Деркач О. Л., Шакало Р. Ю. // Авіаційно-космічна техніка і технологія. - 2020. - №7 (167). - С. 41–49. <https://doi.org/10.32620/akti.2020.8.06>.
13. Pridorozhnyi R. P. Calculation-and-experimental investigation on natural frequencies and oscillation modes of pairwise-shrouded cooled turbine blades./ Pridorozhnyi R. P., Zinkovskii A. P. Merkulov V. M., Sheremet'ev A. V., Shakalo R. Yu // Strength of Materials. - 2019. - Vol. 51. - No.6. - P.C. -827. <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00133-6>.
14. Шакало Р. Ю. Демпфирование колебаний охлаждаемых попарно бандажированных рабочих лопаток турбин / Шакало Р. Ю., Придорожний Р. П., Якушев Ю. В., Меркулов В. М., Зінківський А. П. // Авиационно-

- космическая техника и технология. - 2019. - № 7 (159). - С. 109–113 <https://doi.org/10.32620/aktt.2019.7.15>.
15. Придорожний Р. П. Моделювання контактної взаємодії та розрахунок напруг у зоні контакту бандажних полиць та замкового з'єднання лопатки турбіни / Р. П. Придорожний, А. В. Шереметєв, Ю. В. Якушев // Вісник двигунобудування. - 2004. - №4. - С. 72-76.
- References (transliterated)**
1. Kulyk M. Thermocyclic fatigue and destruction of high pressure turbine blades in their critical sections / Kulyk M. Koveshnikov M. Petruk Y. Petruk B. Yakushenko O. // Transportation Research Procedia. - 2022. - Vol. 63. - P. 2812–2819. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.06.326>.
 2. Kumari S. Failure analysis of gas turbine rotor blades / S. Kumari, D. Satyanarayana, M. Srinivas // Engineering Failure Analysis. - 2014. - Vol. 45. - P. 234–244. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.06.003>.
 3. Rani S. Failure investigations of a first stage Ni based super alloy gas turbine blade / S. Rani, A. Agrawal, V. Rastogi // Materials Today: Proceedings. - 2018. - Vol. 5. - P. 477–486. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.11.108>.
 4. Madhavan S. Vibration based damage detection of rotor blades in a gas turbine engine / S. Madhavan, R. Jain, C. Sujatha, A. Sekhar // Engineering Failure Analysis. - 2014. - Vol. 46 - P. 26–39. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.07.021>.
 5. Poursaeid E. Failure analysis of a second stage blade in a gas turbine engine / E. Poursaeid, M. Aienaravaie, M. R. Mohammadi // Engineering Failure Analysis. - 2008. - Vol. 15 - P. 1111–1129. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2007.11.020>.
 6. Pridorozhnyi R. P. Vliyanie montazhnogo natyaga na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie turbinnoj lopatki i poteryu natyaga po polkam v processe ekspluatatsii / R. P. Pridorozhnyi, A. V. Sheremetev, A. P. Zinkovskij // Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya. - 2006. - №8 (34).
 7. Pennacchi P. A model to study the reduction of turbine blade vibration using the snubbing mechanism/ P. Pennacchi, S. Chatterton, N. Bachschmid, E. Pesatori, G. Turozzi // Mechanical Systems and Signal Processing. - 2011. - Vol. 25 - P. 1260–1275 <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.10.006>.
 8. Vorobev Yu. S. Kolebaniya bandazhiro-vannogo rabocheho koleasa GTD / Yu. S. Vorobev, K. Yu. Dyakonenko, V. N. Romanenko, S. B. Kulishov, A. N. Skrickij // Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya. - 2006. - №8 (34).
 9. Merkulov V. M. O vliyaniy parametrov bandazhirova-niya na nadezhnost i resurs rabochih lopatok tur-bin / V. M. Merkulov, Yu. V. Yakushev, N. N. Fedorchenko, A. P. Zinkovskij // Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya. - 2009. - №10 (67).
 10. Tokar I. G. K vopro-su o vozmozhnostyah povysheniya dempfiruyushej spo-sobnosti rabochih lopatok sovremennyh dvigate-lej / I. G. Tokar, A. P. Zinkovskij, V. V. Matveev // Problemy prochnosti. - 2003. - №4 - P. 58-68.
 11. Kulik M. S. Doslidzhennya napruzhnogo i granichnogo stanu robochoyi lopatki turbini vid diy gazovih ta inercijnih sil / M. S. Kulik, T. V. Donik // Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya. - 2009. - №9 (66).
 12. Zinkovskij A. P. Doslidzhennya vplivu gnuchkos-ti pera na optimalni umovi spryazhennya polic po-parno banda zhovanih lopatok turbin./ Zinkovskij A. P., Merkulov V. M., Tokar I. G., Der-kach O. L., Shakalo R. Yu. // Aviacijno-kosmichna tehnika i tehnologiya. - 2020. - №7 (167) - P.41-49 <https://doi.org/10.32620/aktt.2020.8.06>.
 13. Pridorozhnyi R. P. Calculation-and-experimental investigation on natural frequencies and oscillation modes of pairwise-shrouded cooled turbine blades./ Pridorozhnyi R. P., Zinkovskii A. P. Merkulov V. M., Sheremet'ev A. V., Shakalo R. Yu // Strength of Materials. - 2019. - Vol. 51. - No.6. - P.C. 817-827. <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00133-6>.
 14. Shakalo R. Yu., Pridorozhnyi R. P., Yakushev Yu. V., Merkulov V. M., Zinkovskij A. P. Dempfirovanie kolebanij ohlazhdaemyh poparno bandazhirovan-nyh rabochih lopatok turbin / Shakalo R. Yu., Pridorozhnyi R. P., Yakushev Yu. V., Merkulov V. M., Zinkovskij A. P // Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya. 2019. № 7 (159). S. 109–113 <https://doi.org/10.32620/aktt.2019.7.15>.
 15. Pridorozhnyi R. P. Modelirovanie kontaktnogo vzaimodejstviya i raschet napryazhenij v zone kontakta bandazhnyh polok i zamkovogo soedineniya lopatki turbiny / R. P. Pridorozhnyi, A. V. Sheremetev, Yu. V. Yakushev // Vestnik dvigatelestroeniya. - 2004. - №4. - P. 72-76.

Надійшла (received) 29.12.2023

Відомості про авторів/ About the Authors

Шакало Руслан Юрійович (Shakalo Ruslan) – Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут», аспірант кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; ДП «Івченко-Прогрес», керівник групи відділу компресорів; м. Запоріжжя, Україна; тел.: (099) 775-44-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4324-9191>; e-mail: shakaloryu@ivchenko-progress.com.

Ларін Олексій Олександрович (Larin Oleksiy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут», директор ННІФІ, професор кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>; e-mail: oleksiy.larin@khpi.edu.ua

Савченко Кирило Валентинович (Savchenko Kurylo) – кандидат технічних наук, Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка Національної академії наук України, старший науковий співробітник; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9690-9758>; e-mail: savchenko@ipp.kiev.ua

*Р. Р. ЛАВЩЕНКО, Г. І. ЛЬВОВ***ОГЛЯД ЗАСТОСУВАНЬ DATA-DRIVEN ПІДХОДУ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕПЛО-ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИТІВ**

У статті представлено аналіз можливостей та перспектив data-driven підходу для вивчення термофізичних властивостей композитних матеріалів. Дослідження має на меті надати огляд потенціалу та переваг використання data-driven методологій, особливо в порівнянні з традиційними методами. Протягом аналізу розглядаються ключові концепції та передові методи машинного навчання, які зазвичай застосовуються в матеріалознавстві, підкреслюючи їх здатність покращувати розуміння, оптимізацію та загальну якість композитних матеріалів. Використання нейронних мереж для прогнозування теплових характеристик досліджується в деталях, демонструючи їх прогностичні можливості та потенціал для революціонізації вивчення теплових властивостей композитних матеріалів. Проводиться порівняльна оцінка між data-driven підходом та традиційними аналітичними техніками, підкреслюючи унікальні переваги та обмеження обох. Це порівняння дає уявлення про те, як data-driven методи можуть спростити та покращити точність термофізичного аналізу. Крім того, у статті описуються сучасні методи вимірювання та прогнозування термофізичних параметрів композитів, зосереджуючи увагу на тому, як новітні технології розвивалися в останні роки. Далі обговорюється роль обчислювальних інструментів та комп'ютерних технологій, зокрема в моделюванні термофізичних властивостей та симуляції процесів виробництва композитних матеріалів. Ця стаття підкреслює зростаючу значущість цих технологій у розвитку як теоретичних, так і практичних аспектів матеріалознавства. Пропонуючи нові погляди на виробництво композитів, дослідження сприяє подальшому розвитку як матеріалознавства, так і промислових застосувань композитів. Ці результати мають більш широкі наслідки для покращення виробничих процесів, стимулювання інновацій та розвитку досліджень композитних матеріалів у різних галузях.

Ключові слова: data-driven підхід, композити, термофізичні властивості, аналіз даних, прогнозування.

*R. LAVSHCHENKO, G. LYOV***REVIEW OF THE DATA-DRIVEN APPROACH APPLICATIONS FOR ANALYZING THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF COMPOSITES**

The paper presents an analysis of the possibilities and prospects of a data-driven approach for studying the thermo-physical properties of composite materials. The research aims to offer an overview of the potential and advantages of utilizing data-driven methodologies, particularly in comparison to traditional methods. Throughout the analysis, key concepts and advanced machine learning techniques commonly applied in materials science are examined, emphasizing their capacity to enhance the understanding, optimization, and overall quality of composite materials. The use of neural networks for predicting thermal characteristics is explored in depth, showcasing their predictive capabilities and potential for revolutionizing the study of thermal properties in composite materials. A comparative evaluation is conducted between the data-driven approach and conventional analysis techniques, highlighting the unique benefits and limitations of both. This comparison provides insights into how data-driven methods can streamline and improve the accuracy of thermo-physical analysis. Additionally, the paper describes modern methods of measuring and predicting the thermo-physical parameters of composites, focusing on how emerging technologies have evolved in recent years. The role of computational tools and computer technologies is further discussed, particularly in modeling the thermo-physical properties and simulating the manufacturing processes of composite materials. This paper underscores the increasing relevance of these technologies in advancing both theoretical and practical aspects of material science. By offering new insights into composite production, the research contributes to the future development of both materials science and the industrial applications of composite materials. The findings have broader implications for improving manufacturing processes, driving innovation, and advancing the study of composite materials in various industries.

Key words: data-driven approach, composites, thermo-physical properties, data analysis, prediction.

Вступ. Тепло-фізичні властивості композитів визначають їхню здатність передавати, вивільнювати та проводити тепло, визначаючи, таким чином, їхню ефективність у різноманітних технічних та інженерних застосуваннях. Ці властивості включають теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт теплового розширення та інші, які грають ключову роль у процесах теплопередачі та аналізі напруженого стану елементів конструкцій. Композитні матеріали, що складаються з двох або більше компонентів з різними фізичними властивостями, створюють складний ландшафт для вивчення тепло-фізичних явищ. На відміну від гомогенних матеріалів теплопровідність та температурне розширення характеризується не скалярними параметрами, а тензорами другого рангу. Проведення прямих фізичних експериментів для визначення усіх компонентів цих тензорів не завжди можливе або не доцільне. Теоретичне прогнозування фізичних властивостей композитів у багатьох випадках є більш ефективнішим.

З розвитком нових матеріалів і технологій дослідження тепло-фізичних властивостей стає все важливішою задачею у науці та інженерії матеріалів.

При цьому важливою є не лише сама точність вимірювань, а й ефективність процесів аналізу даних. У зв'язку з цим з'являється необхідність вдосконалення методів обробки інформації, що виявляється особливо актуальним у контексті використання data-driven підходу [1].

В останні десятиліття зростає інтерес до використання data-driven підходів у наукових та інженерних дослідженнях, включаючи аналіз матеріалів. Data-driven підхід полягає в використанні алгоритмів машинного навчання та інших методів обробки даних для виявлення закономірностей, тенденцій та прогнозування результатів на основі великих обсягів даних [2]. Це відкриває нові перспективи для вдосконалення точності та ефективності аналізу тепло-фізичних властивостей композитів.

У порівнянні з традиційними методами дослідження, які можуть бути часомісткими та витратними, data-driven підхід дозволяє автоматизувати процес аналізу, швидко визначати складні зв'язки та робити прогнози на основі існуючих даних. Це особливо важливо в сучасному науковому

середовищі, де збільшення обсягу даних вимагає нових підходів до їхнього аналізу та інтерпретації.

Аналіз тепло-фізичних властивостей композитів за допомогою data-driven підходу може призвести до виявлення нових закономірностей та вдосконалення методів прогнозування. Такий підхід відкриває двері для більш точного розуміння теплових процесів у складних матеріалах і сприяє розвитку інноваційних технологій в галузі матеріалознавства та інженерії. У даному літературному огляді ми розглянемо ключові аспекти використання data-driven підходу для аналізу тепло-фізичних властивостей композитів, зосереджуючись на сучасних дослідженнях та важливих висновках, що можуть визначити подальший напрямок розвитку в цій області.

Основні принципи data-driven аналізу в матеріалознавстві. Data-driven аналіз у матеріалознавстві представляє собою інноваційний підхід до вивчення та оптимізації властивостей матеріалів. Огляд основних понять цього підходу є важливим для розуміння його принципів та потенціалу в наукових та інженерних дослідженнях. Це поняття передбачає використання аналітичних та статистичних методів для отримання знань із великої кількості даних. Data-driven аналіз дозволяє виявляти складні зв'язки та закономірності, що можуть залишатися прихованими в традиційних методах [1].

У матеріалознавстві, де велика кількість експериментальних та обчислювальних даних стає стандартом, використання методів обробки великих обсягів даних є ключовим елементом. Вони дозволяють аналізувати та визначати закономірності в масивах інформації [3]. Data-driven аналіз в матеріалознавстві використовує методи кластеризації для групування подібних матеріалів та класифікації для присвоєння їм конкретних категорій. Це полегшує розуміння структурних та властивісних розбіжностей між різними матеріалами [2]. Використання візуалізації стає ефективним способом представлення складних даних. Data-driven аналіз включає в себе використання графіків для надання наочності результатам аналізу [4]. Застосування регресійного аналізу у data-driven підходах сприяє визначенню залежностей між різними параметрами матеріалів, що дозволяє прогнозувати їхні властивості та поведінку в різних умовах.

Машинне навчання в матеріалознавстві визначається використанням алгоритмів та моделей, які можуть адаптуватися та вдосконалюватися на основі даних. Застосування методів машинного навчання є ключовим елементом data-driven аналізу в матеріалознавстві. Машинне навчання в матеріалознавстві [5] охоплює як методи навчання з вчителем, де модель вивчається на основі пар вхід-вихід, так і методи навчання без вчителя, де алгоритми аналізують дані без чіткого навчального набору. Машинне навчання в матеріалознавстві дозволяє автоматизувати обробку та аналіз великих обсягів даних. Алгоритми можуть швидко виявляти складні взаємозв'язки та побудовувати прогностичні моделі [3]. Застосування методів машинного навчання

дозволяє точно прогнозувати тепло-фізичні властивості матеріалів на основі існуючих даних, враховуючи різноманітні параметри [2]. Машинне навчання дозволяє ефективно аналізувати не лише тепло-фізичні, але і інші параметри матеріалів, такі як структура та склад. Це сприяє глибшому розумінню взаємозв'язків у матеріалознавстві.

Цей огляд основних принципів data-driven аналізу та застосування методів машинного навчання в матеріалознавстві свідчить про потенціал цих підходів для вивчення та оптимізації властивостей композитів. Надзвичайно важливо продовжити дослідження в цьому напрямку для досягнення нових наукових відкриттів та технологічних переваг у розробці матеріалів.

Тепло-фізичні властивості композитів та їх вимірювання і прогнозування. Тепло-фізичні властивості композитів є ключовим аспектом їхньої поведінки та функціональності в різноманітних умовах експлуатації. Огляд основних тепло-фізичних параметрів стає важливою передумовою для розуміння та контролю теплових процесів в композитних матеріалах.

Теплопровідність є однією з ключових характеристик, яка визначає здатність матеріалу передавати тепло. У композитах ця властивість залежить від типу та кількості компонентів, їхньої мікроструктури та взаємодій між ними. [3] Особливості теплопровідності в композитах можуть призводити до неочікуваних ефектів та варіацій у порівнянні з однорідними матеріалами.

Теплоємність вказує на здатність матеріалу поглиблювати тепло при зміні температури. У композитах ця властивість визначається масовими вмістами та теплоємністю кожної компоненти. Зміна теплоємності може виникати через фазові переходи або інші термодинамічні взаємодії в системі.

Коефіцієнт теплового розширення визначає, наскільки змінюється розмір матеріалу при зміні температури. У композитах ця властивість може варіюватися в залежності від напрямку та взаємного розташування компонентів.

Окрім основних тепло-фізичних параметрів, важливо враховувати термічну стабільність та витривалість композитів при екстремальних температурах. Зміни у мікроструктурі та хімічному складі можуть впливати на довговічність та ефективність композитних матеріалів у високотемпературних умовах [4].

У реальних умовах експлуатації композити можуть піддаватися впливу вологості, хімічних речовин, агресивних середовищ та інших факторів. Врахування цих аспектів є ключовим для повного розуміння тепло-фізичної поведінки композитів.

Сукупність термофізичних властивостей композитів має визначальне значення як у технологічних процесах створення матеріалу, так і виробу. Прикладом такого процесу є пултрузія, яка була досліджена у роботі [6].

Процес пултрузії представляє собою один із ключових методів виготовлення композитних

матеріалів з постійним поперечним перерізом. Важливо враховувати теплофізичні параметри у контексті цього технологічного процесу. Дослідження виробництва композитів через пултрузію надає важливі відомості про температурні умови та профілі затвердіння [7]. Однак для повноцінного розуміння теплофізичної поведінки композитів необхідно розглядати основні параметри, такі як теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт теплового розширення та інші характеристики, які визначають їхню теплову взаємодію та функціональність в різних умовах експлуатації.

Також експериментально досліджувалися процеси пултрузії для різних одновісних композитних профілів [8–10]. У цих дослідженнях температури вимірювалися за допомогою термопар всередині композиту.

Поряд із експериментальними методами визначення цих параметрів, теоретичне прогнозування стає невід'ємною частиною досліджень. Особливо важливим стає використання сучасних комп'ютерних технологій для моделювання та аналізу теплофізичних властивостей композитів [11]. Велика кількість даних, отриманих експериментально, сприяє розвитку нових теоретичних моделей, які дозволяють прогнозувати властивості композитів при різних умовах та складах. Особливий акцент на використанні сучасних обчислювальних методів створює можливості для точного прогнозування та оптимізації тепло-фізичних властивостей композитів у широкому спектрі застосувань.

У роботі [12] було розроблено два підходи до кінцево-елементного моделювання з використанням безперервної моделі з концентрованими властивостями матеріалу для твердого композиту з метою визначення характеристик процесів пултрузії в реальному часі зі складним контролем температури. Обидва підходи базуються на схемі змішаної інтеграції часу та методі вузлових контрольних об'ємів. Однак, важливо відзначити, що в цьому контексті результати дослідження зорієнтовані на тепло-фізичні параметри композитів.

Крім того, в роботі [12] використовувалася безперервна модель із зосередженими властивостями матеріалу для затверділого композиту. Температури вимірювалися за допомогою термопар всередині композиту, а їх контроль був значущим етапом у виробництві для забезпечення відповідних теплофізичних характеристик.

У дослідженні [13] детально розглядається виробництво та механічні характеристики волоконно-епоксидних композитів із використанням хімічно модифікованих епоксидних смол на основі сої. Під час виробництва композитів шляхом пултрузії використовували системи спільної смоли з вмістом соєвих смол до 30 мас.%. Механічні випробування підтверджують, що пултрузійні композити з системами співсмол на основі сої мають порівняні або покращені структурні характеристики, такі як міцність на вигин, модуль і ударостійкість.

Сучасний розвиток матеріалознавства та обчислювальної техніки дозволяє використовувати ефективні методи для прогнозування теплофізичних властивостей композитів, що відкриває нові перспективи для їхнього вдосконалення та широкого використання.

Методи прогнозування теплопровідності та температурного розширення стають ключовими в аспекті проектування матеріалів для конкретних технологічних завдань та умов експлуатації.

Однією з передових областей є використання методів молекулярно-динамічного моделювання для прогнозування теплофізичних властивостей композитів на молекулярному рівні. Ці методи дозволяють вивчати рух атомів та молекул, що важливо для розуміння теплопередачі та ефективності матеріалу.

Використання обчислювальних методів та матеріалознавчих баз даних дозволяє прогнозувати теплопровідність та температурне розширення на основі властивостей окремих компонентів композиту. Інтеграція цих даних може бути використана для покращення прогнозів для складних композитних систем [14].

Застосування методів штучного інтелекту (ШІ) та машинного навчання для аналізу теплофізичних властивостей композитів стає все більш популярним. Моделі ШІ можуть аналізувати великі обсяги даних та визначати складні зв'язки між різними параметрами, що важливо для точного прогнозування [2].

Комп'ютерне моделювання структури композитів дозволяє враховувати різноманітні фактори, такі як розташування волокон, пористість, архітектура матеріалу тощо. Це дає можливість прогнозувати теплопровідність та температурне розширення в залежності від геометричних та хімічних характеристик. [4]

У роботі [15] представлена методика кількісного визначення нелінійної невизначеності та поширення на основі даних для вивчення стохастичних характеристик однонаправлених (UD) полімерних (CFRP) композитів, посиленних вуглецевим волокном. Запропонований підхід об'єднує характеристики мікроскопічного зображення, стохастичну реконструкцію мікроструктури та ефективне багатомасштабне моделювання методом кінцевих елементів, що забезпечується аналізом самоузгодженої кластеризації (SCA). Для моделювання складної мікроструктурної змінності запропоновані методи UQ враховують негаусівські джерела невизначеності за допомогою підходу вибірки без розподілу, що використовує непараметричні та асимптотичні статистичні інструменти. Ієрархічна умовна стратегія вибірки дозволяє одночасно вибирати з кількох джерел невизначеності. Цей підхід дає змогу зрозуміти вплив мікроструктурних змін, які мають все більше впливу на нелінійні відгуки деталей з вуглепластику UD під дією прогресивного навантаження від стискання та, в кінцевому рахунку, на частоту відмов з часом. Визначення періоду часу відмови має вирішальне

значення для прогнозування надійності, що є важливим компонентом конструкції CFRP.

У статті [16] проведено дослідження щодо доцільності застосування методів прогнозування теплопровідності та температурного розширення для автомобільного краш-боксу (crash box) на основі даних, отриманих під час характеристики будівельного блоку. Автомобільний краш-бокс (crash box) - це компонент автомобіля, який призначений для поглинання енергії під час аварійного зіткнення. Загальна ефективність краш-боксу була проаналізована для різних товщин і швидкостей тестування. Головний висновок полягає в тому, що при однаковій товщині та швидкості тестування питоме поглинання енергії (SEA) та значення пікового навантаження подібні для будівельного блоку та краш-боксу. Таким чином, можливо використовувати методи прогнозування теплопровідності та температурного розширення для оцінки дизайну складної конструкції, спрощуючи процедуру тестування. Проте важливо приділяти особливу увагу швидкості тестування, оскільки відсоток зламаних волокон може змінюватися в залежності від неї в квазістатичних умовах.

Інтеграція експериментальних даних з обчислювальними методами стає ефективним засобом прогнозування. Цей підхід дозволяє уточнювати моделі на основі реальних даних, отриманих з експериментів, що полегшує створення точних прогнозів [2]. Альтернативою чисто експериментальним методам вимірювання термофізичних властивостей композитів є теоретичне передбачення цих властивостей на основі відомих властивостей складових структури. У роботі [17] представлена комплексна числова методика, яка дозволяє з єдиної позиції та за допомогою єдиного програмного забезпечення визначати компоненти тензорів теплопровідності та температурного розширення волокнистих композитів. У роботі [18] запропонована методика визначення ефективних характеристик теплопровідності композитів з періодичною структурою, з довільною кількістю фаз та будь-якою формою включень. Процедура базується на використанні рядів Фур'є для подання періодично змінюючихся полів температур і теплових потоків. Теоретична оцінка модулів пружності та коефіцієнтів температурного розширення виконана в роботі [19] з використанням моделей Морі—Танака для випадку регулярного упакування волокон із еліпсоїдальним поперечним перерізом. Багаторівневе моделювання теплового розширення композитів із карбідокремнієвою матрицею, армованих вуглецевими волокнами, виконано в роботі [20] з урахуванням пористості кераміки.

У роботі [21] проведено гомогенізацію властивостей матеріалу кераміки за допомогою двопараметричного підходу Ешелбі-Морі-Танака (EMT). Залежність властивостей кераміки від температури описана гладкою зміною об'ємної частки вуглецевих нанотрубок за допомогою сигмоїдальної функції, профілю-О або профілю-Х. Для аналізу

термомеханічної задачі із одностороннім зв'язком використовується чисельне розв'язання нелінійного рівняння теплопровідності методом узагальненої диференціальної квадратури (GDQM), а також лінійної механічної задачі за допомогою теорії зсувної деформації третього порядку Редді (TSDT) і GDQM. Вплив фактора агрегації визначено за його впливом на максимальну поперечну нормаль і максимальні кільцеві напруження в циліндрі.

У статті [22] досліджується експериментальний підхід з багато масштабним підходом, спрямований на встановлення кореляції між глобальним напруженням та локальною реакцією матеріалу в масштабі волокна. З використанням оптичної цифрової кореляції зображень з високою роздільною здатністю визначаються зони низької та високої деформації в тканих композитних зразках, які навантажуються одновісним натягом. Кількісно визначені відповідні деформації повного поля використовуються для встановлення зв'язку між глобальною та локальною поведінкою деформації як функції орієнтації волокон. Крім того, аналізуються криві глобального напруження - локальної деформації для зразків з різними кутами орієнтації волокон. Залежність глобального напруження від локально розвиненої деформації в поєднанні з моделлю пластичності дозволяє розробити феноменологічну модель, яка враховує глобальні та локальні аспекти деформації в композитних зразках, що піддаються поза осьовому навантаженню розтягування.

У дослідженні [23] була розроблена тривимірна багато масштабна кінцево-елементна модель для прогнозування ефективної теплопровідності композитів CNT/Al. Детально досліджено вплив конфігурації CNT, напрямку теплопередачі, міжфазного теплового опору та об'ємної частки. Створено п'ять конфігурацій CNT, включаючи випадково розташовані, рівномірно орієнтовані, багатопарові, об'єднані та мережеві. Результати підтверджують, що конфігурація CNT важлива для ефективної теплопровідності композитів CNT/Al, а поверхня розділу та напрямки теплового навантаження також суттєво впливають на теплопровідність композитів.

Узагальнюючи, сучасні методи прогнозування теплофізичних властивостей композитів використовують широкий спектр підходів, починаючи від атомних моделей та закінчуючи комплексними експериментально-обчислювальними методами. Це дозволяє науковцям не лише розуміти тепло-фізичні властивості композитів, але і ефективно впливати на них для досягнення оптимальних характеристик у конкретних застосуваннях.

Застосування data-driven підходу для аналізу тепло-фізичних властивостей композитів. В сучасному світі, де обсяги даних непередбачено зростають, а наукові дослідження стають все більш високотехнологічними, використання data-driven підходу в матеріалознавстві визнається однією з перспективних стратегій для вивчення тепло-фізичних властивостей композитів. У цьому розділі ми детально

розглянемо важливі аспекти використання data-driven методів для аналізу тепло-фізичних характеристик композитних матеріалів.

У сучасному матеріалознавстві використання нейронних мереж виявляється потужним інструментом для прогнозування теплових характеристик композитів [5]. Нейронні мережі, які імітують роботу нейронної системи людини, стають важливим компонентом data-driven підходу, надаючи можливість аналізу та прогнозування теплових властивостей матеріалів без прямого задання фізичних рівнянь [1; 6].

Нейронні мережі - це моделі, які намагаються відтворити взаємодію між нейронами в мозку [3; 5]. Вони складаються зі шарів нейронів, де кожен нейрон пов'язаний з іншими за допомогою зважених з'єднань. Основна ідея полягає в тому, що мережа може вивчати складні залежності між вхідними та вихідними даними.

Одним із ключових аспектів дослідження тепло-фізичних властивостей композитів є прогнозування їхньої теплопровідності. Нейронні мережі здатні адаптуватися до складних нелінійних залежностей та виявляються ефективними для моделювання теплопередачі у композитних матеріалах [10; 14].

В розробці нейронних мереж важливо обрати відповідну архітектуру. У матеріалознавстві використовуються різноманітні архітектури, включаючи звичайні шарові мережі, рекурентні мережі для аналізу послідовностей та глибокі мережі для більш складних завдань [2].

Збір великих обсягів експериментальних даних є критичним для успішного тренування нейронних мереж. Точність та ефективність моделі нейронної мережі напряму залежать від якості та репрезентативності навчального набору [24].

Використання нейронних мереж має свої переваги та обмеження. До переваг відносяться здатність вивчати складні залежності та робота з великими обсягами даних. Однак обмеження включають потребу у великій кількості даних для тренування та виклики у поясненні результатів моделі [3].

Загально кажучи, використання нейронних мереж у прогнозуванні теплових характеристик композитів відкриває нові горизонти у вивченні матеріалів [24]. Цей підхід виявляється особливо ефективним у тих випадках, де традиційні методи аналізу не забезпечують необхідної точності або коли маємо справу з великою кількістю даних.

Порівнювати data-driven підхід із традиційними методами аналізу тепло-фізичних властивостей композитів стає актуальним завданням у сучасному матеріалознавстві. Традиційні методи, які базуються на фізичних моделях та експериментальних вимірюваннях, та новітні підходи data-driven, використовуючи методи машинного навчання та аналізу великого обсягу даних, представляють різні підходи до вивчення та оптимізації тепло-фізичних властивостей композитних матеріалів.

Традиційний підхід включає в себе експериментальні методи вимірювання тепло-фізичних властивостей, такі як теплопровідність та температурне розширення [14]. Застосування теоретичних моделей, таких як модель сумісності та теорія макроскопічної моделі, є звичайним для прогнозування поведінки композитів. Традиційні методи забезпечують високу точність в ряді випадків, але можуть бути обмежені складністю вимірювань та високою вартістю експериментів.

Data-driven підхід використовується для виявлення складних залежностей між тепло-фізичними властивостями [2]. Машинне навчання, нейронні мережі та аналіз великого обсягу даних стають інструментами для розкриття патернів та прогнозування властивостей композитів без прямих фізичних моделей. Вони можуть бути особливо корисними в умовах, де традиційні методи можуть бути важкодоступними або дорогими.

Традиційні методи можуть забезпечувати високу точність для конкретних умов експлуатації та матеріалів. З іншого боку, data-driven методи, завдяки їхній здатності пристосовуватися до складних взаємозв'язків у великих наборах даних, можуть виявитися більш універсальними, але можуть вимагати великої кількості тренувальних даних для досягнення оптимальної точності [3].

Data-driven методи можуть виявити себе менш чутливими до варіацій у вихідних даних і умовах експлуатації порівняно з традиційними методами, оскільки вони спроможні враховувати неочікувані або складні закономірності, які можуть бути неврахованими у традиційних моделях.

Data-driven методи можуть виявити себе більш гнучкими для прогнозування тепло-фізичних властивостей у нових умовах та з новими матеріалами, оскільки вони здатні адаптуватися до нових патернів, якщо наявні відповідні дані [25].

Традиційні методи можуть бути витратними та часомісткими, особливо при великому обсязі експериментів. З іншого боку, data-driven підхід може бути більш доступним і ефективним, особливо якщо є велика кількість вже наявних даних для аналізу [26].

У статті [27] пропонується ефективна макро-мікро модель для прогнозування теплофізичних властивостей композитів, які армуються короткими волокнами, включаючи нелінійну пластичну поведінку. На мікроскопічному рівні використовується остання мікромеханічна модель, розроблена на основі двоетапного усереднення орієнтації. Ця модель може враховувати широкий спектр мікроструктурних параметрів, таких як конститутивні параметри матриці та волокна, об'ємна частка волокна та співвідношення сторін волокна. Різні взаємодії, включаючи моделі Фойгта, Рейса та самоспрямовані припущення, розглядаються в мікромеханічній моделі. Після цього цю мікромеханічну модель включають в модель скінченних елементів для макроскопічного моделювання реальних структур та зразків композитів.

Цей підхід до аналізу теплофізичних властивостей композитів акцентує увагу на розробці багатомасштабної моделі, що об'єднує мікро- та макроаспекти. Порівнюючи його з традиційними методами, такими як експерименти та фізичні моделі, а також новітніми data-driven підходами, що використовують машинне навчання та аналіз великих обсягів даних, можна виявити переваги та особливості кожного підходу. Обговорюються точність результатів, їх універсальність, чутливість до вхідних даних та умов експлуатації, а також прогностичні можливості кожного методу в контексті оптимізації теплофізичних властивостей композитів.

У статті [28] досліджено вплив мікроструктурних параметрів на макромеханічні характеристики коротковолокнистих композитів, армованих короткими волокнами. Запропонована методологія моделювання враховує різноманітність цих параметрів, таких як об'ємна частка волокон, аспекти співвідношення волокон та розподіли орієнтації волокон. Описана мікромеханічна модель, розроблена за допомогою аналізу кінцевих елементів та орієнтаційного усереднення, може бути застосована для прогнозування теплофізичних властивостей композитів. Порівнюючи з традиційними методами та сучасними підходами data-driven, робиться акцент на важливості врахування мікроструктурних параметрів при аналізі та оптимізації властивостей композитів.

У роботі [29] представлена нова мікромеханічна модель для прогнозування нелінійної пружно-пластичної поведінки композитів, армованих короткими волокнами. Модель розроблена на основі двохетапного методу орієнтаційного усереднення і здатна враховувати широкий спектр мікроструктурних параметрів. На першому етапі аналіз кінцевих елементів виконується на елементарній комірці (окреме волокно, оточене матрицею). Потім відповідь елементарної комірки збільшується шляхом калібрування її реакції на пружно-пластичну сурогатну конститутивну модель. На наступному другому етапі гомогенізації пропонується схема самоузгодженої взаємодії. Потім оцінюється передбачувана здатність отриманої двохетапної схеми гомогенізації разом із версіями, які використовують більш традиційні схеми усереднення (Фойгта та Рейса, що забезпечують верхню та нижню межі відповідно), шляхом порівняння з експериментами та прямим числовим моделюванням реалістичного репрезентативного об'єму елементів.

У порівняльному аналізі традиційних та data-driven методів важливо враховувати їхні переваги та обмеження, а також конкретні умови та завдання дослідження. Обидва підходи мають своє місце в науковому дослідженні тепло-фізичних властивостей композитів, і їх взаємодія може призвести до нових відкриттів та покращень у матеріалознавстві.

Висновки. У даній роботі було проведено огляд використання data-driven підходу в аналізі тепло-фізичних властивостей композитних матеріалів. Результати досліджень вказують на значний внесок цього підходу у розвиток сучасного матеріалознавства

та його застосування для прогнозування теплових характеристик композитів.

Використання нейронних мереж виявилось дуже ефективним для прогнозування теплопровідності композитів. Машинне навчання дозволило створити моделі, які здатні адаптуватися до складних теплових процесів та враховувати нелінійні взаємозв'язки між різними параметрами матеріалів.

В дослідженнях було виявлено, що вибір відповідної архітектури нейронної мережі грає ключову роль у точності та універсальності моделі. Різноманітні архітектури, такі як рекурентні та глибокі мережі, використовуються залежно від конкретних властивостей матеріалів та поставленої задачі.

Аналіз великого обсягу даних виявився критичним етапом у вивченні тепло-фізичних властивостей. Використання статистичних методів, машинного навчання та обчислювальних методів дозволило отримати більш точні результати та глибше розуміння закономірностей у тепловіддачі та інших параметрах.

В порівнянні з традиційними методами, data-driven підхід дозволяє отримати більш універсальні та гнучкі моделі. Точність таких моделей залежить від наявності великої кількості даних, проте їхні можливості в прогнозуванні виявляються значно більшими у ряді умов. Використання data-driven методів зменшує чутливість до варіацій у вихідних даних та умовах експлуатації. Це робить їх ефективними інструментами для прогнозування поведінки матеріалів у різних умовах.

Результати досліджень свідчать про значні перспективи використання data-driven підходу у подальших дослідженнях тепло-фізичних властивостей композитів, і дозволяють визначити напрямки для майбутніх розвідок та розвитку цього підходу.

Розширення досліджень на мультиматеріалові системи та композити з різних матеріалів може стати одним із ключових напрямків. Data-driven методи мають потенціал для моделювання тепло-фізичних властивостей при різних комбінаціях матеріалів. Подальший розвиток data-driven підходів може бути спрямованим на оптимізацію тепло-фізичних властивостей композитів. Використання алгоритмів машинного навчання для автоматизованого пошуку оптимальних конфігурацій матеріалів може полегшити і прискорити процес проектування. Поліпшення взаємодії data-driven моделей з експериментальними дослідженнями стане важливим кроком у забезпеченні точності та перевірки результатів. Це дозволить підтверджувати та доповнювати виведені з моделей дані з реальних вимірювань. Data-driven підхід може бути успішно використаний в інших галузях, таких як енергетика, медицина чи авіаційна промисловість. Адаптація та розширення моделей для різних областей може привести до нових застосувань та відкриттів. Глибше вивчення впливу мікроструктури на тепло-фізичні властивості композитів може стати актуальним напрямком. Data-driven методи можуть допомогти в

ідентифікації та моделюванні цих складних зв'язків. Створення відкритих баз даних та стандартизація підходів до обробки даних можуть сприяти розвитку спільноти та підвищити достовірність результатів. Це важливий крок для розвитку колективної експертизи в галузі.

Загальною метою подальших досліджень є подальший розвиток data-driven підходу як ефективного інструменту для аналізу тепло-фізичних властивостей композитів та впровадження його в різноманітні галузі індустрії та науки.

Список літератури

- Wu, L., Zhang, P., Xu, B., Liu, J., Yin, H., Zhang, L., Jiang, X., Zhang, C., Zhang, R., Wang, Y., & Qu, X. (2023). *Data-driven design of brake pad composites for high-speed trains*. *Journal of Materials Research and Technology*, 27, 1058-1071. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.09.280>
- He, Z. C., Huo S. L., Li, Eric., Cheng, H. T., & Zhang, L. M. (2022). *Data-driven approach to characterize and optimize properties of carbon fiber non-woven composite materials*. *Composite Structures*, 297, 115961. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115961>
- Fathidoost, M., Yang, Y., Oechsner, M., & Xu, B.-X. (2023). *Data-driven thermal and percolation analyses of 3D composite structures with interface resistance*. *Materials & Design*, 227, 111746. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.111746>
- Ciampaglia, A. (2023). *Data-driven statistical method for the multiscale characterization and modelling of fiber reinforced composites*. *Composite Structures*, 320, 117215. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117215>
- Malley, S., Reina, C., Nacy, S., Gilles, J., Koohbor, B., & Youssef, G. (2022). *Predictability of mechanical behavior of additively manufactured particulate composites using machine learning and data-driven approaches*. *Computers in Industry*, 142, 103739. <https://doi.org/10.1016/j.compind.2022.103739>
- Barkanov E. et al. *Experimental validation of thermo-chemical algorithm for a simulation of pultrusion processes*. *Journal of Physics Conference Series*. April 2018. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012009.
- Barkanov, E., Akishin, P., Miazza, N. L., Galvez, S. (2017). *ANSYS-based algorithms for a simulation of pultrusion processes*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(5), 377-384. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1191096>
- Roux J. A., Vaughan J. G., Shanku R., et al. (1998). *Comparison of measurements and modeling for pultrusion of a fiberglass/epoxy I-beam*. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 17(17), 1557-1579.
- Liu X. L. and Hillier W. (1999). *Heat transfer and cure analysis for the pultrusion of a fiberglass-vinyl ester I-beam*. *Composites Structures* 47, 581-588.
- Liang G, Garg A, and Chandrashekhara K (2005). *Cure characterization of pultruded soy-based composites*. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 24(14), 1509-1520.
- Lvov, G. I. (2022). *Numerical Homogenization of the Thermophysical Properties of Fibrous Composites*. *Mechanics of Composite Materials*, 58(5), 613-628. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10054-x>
- Barkanov E., Akishin P., Namsone E., Auzins J., Morozovs A. *Optimization of Pultrusion Processes for an Industrial Application* *Mechanics of Composite Materials*, 2021, № 6, p. 697-712
- Zhu, J., Chandrashekhara, K., Flanigan, V., Kapila, S. (2004). *Manufacturing and mechanical properties of soy-based composites using pultrusion*. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 35(1), 95-101. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2003.08.007>
- Eleftheroglou, N., Zarouchas, D., & Benedictus, R. (2020). *An adaptive probabilistic data-driven methodology for prognosis of the fatigue life of composite structures*. *Composite Structures*, 245, 112386. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112386>
- Huang, T., Gao, J., Sun, Q., Zeng, D., Su, X., Liu, W. K., & Chen, W. (2021). *Stochastic nonlinear analysis of unidirectional fiber composites using image-based microstructural uncertainty quantification*. *Composite Structures*, 260, 113470. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113470>
- Saenz-Dominguez, I., Tena, I., Esnaola, A., Sarrionandia, M., Torre, J., & Aurrekoetxea, J. (2019). *Design and characterisation of cellular composite structures for automotive crash-boxes manufactured by out of die ultraviolet cured pultrusion*. *Composites Part B: Engineering*, 160, 217-224. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.046>
- Lvov G. I. *Numerical Homogenization of the Thermophysical Properties of Fibrous Composites*. *Mechanics of Composite Materials*. — 2022. — Vol. 58, No. 5. — P. 613-628
- Tian W., Chao X., Fu M. W., Qi L., Ju L. *New numerical algorithm for the periodic boundary condition for predicting the coefficients of thermal expansion of composites*. *Mechanics of Materials*. — 2021. — Vol. 154. — Article 103737.
- Lee D, Song Y. S. *Modeling the effects of elastic modulus and thermal expansion coefficient on the shrinkage of glass fiber reinforced composites*. *Composites: Part B*. — 2018. — Vol. 146. — P. 98—105.
- Sun Z., Shan Z., Shao T., Li J., Wu X. *A multiscale modeling for predicting the thermal expansion behaviors of 3D C/SiC composites considering porosity and fiber volume fraction*. *Ceramics International*. — 2021. — Vol. 47, Iss. 6. — P. 7925—7936.
- Sobhaniragh, B., Batra, R. C., Mansur, W. J., Peters, F. C. (2017). *Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme*. *Composites Part B: Engineering*, 118, 41-53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.032>
- Koohbor, B., Ravindran, S., & Kidane, A. (2018). *A multiscale experimental approach for correlating global and local deformation response in woven composites*. *Composite Structures*, 194, 328-334. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.04.016>
- Zhou L., Yuan T. B., Yang X. S., Liu Z. Y., Wang Q. Z., Xiao B. L., Ma Z. Y. *Microscale prediction of effective thermal conductivity of CNT/Al composites by finite element method*. *International Journal of Thermal Sciences*. — 2022. — Vol. 171, Jan. — Article 107206.
- Wu, L., Adam, L., & Noels, L. (2021). *Micro-mechanics and data-driven based reduced order models for multi-scale analyses of woven composites*. *Composite Structures*, 270, 114058. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114058>
- Veenstra, S. W. P., Wijskamp, S., Rosić, B., & Akkerman, R. (2022). *Bending behaviour of thermoplastic composites in melt: A data-driven approach*. *Composites Science and Technology*, 219, 109220. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2021.109220>
- Cheung, H. L., & Mirkhalaf, M. (2024). *A multi-fidelity data-driven model for highly accurate and computationally efficient modeling of short fiber composites*. *Composites Science and Technology*, 246, 110359. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2023.110359>
- Castricum, B. A., Fagerström, M., Ekh, M., Larsson, F., & Mirkhalaf, S. M. (2022). *A computationally efficient coupled multi-scale model for short fiber reinforced composites*. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 163, 107233. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2022.107233>
- Mirkhalaf, S. M., Eggels, E. H., van Beurden, J. H., Larsson, F., & Fagerström, M. (2020). *A finite element based orientation averaging method for predicting elastic properties of short fiber reinforced composites*. *Composites Part B: Engineering*, 202, 108388. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108388>
- Mirkhalaf, S. M., van Beurden, T. J. H., Ekh, M., Larsson, F., & Fagerström, M. (2022). *An FE-based orientation averaging model for elasto-plastic behavior of short fiber composites*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 219, 107097. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107097>

References (transliterated)

- Wu L., Zhang P., Xu B., Liu, J., Yin H., Zhang L., Jiang X., Zhang C., Zhang R., Wang Y., & Qu X. (2023). *Data-driven design of brake pad composites for high-speed trains*. *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 27, pp. 1058-1071. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.09.280>
- He Z. C., Huo S. L., Li Eric, Cheng H. T., & Zhang L. M. (2022). *Data-driven approach to characterize and optimize properties of carbon fiber non-woven composite materials*. *Composite Structures*, vol. 297, 115961. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115961>
- Fathidoost M., Yang Y., Oechsner M., & Xu B.-X. (2023). *Data-driven thermal and percolation analyses of 3D composite structures*

- with interface resistance. *Materials & Design*, vol. 227, 111746. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.111746>
4. Ciampaglia A. (2023). Data-driven statistical method for the multiscale characterization and modelling of fiber reinforced composites. *Composite Structures*, vol. 320, 117215. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117215>
 5. Malley S., Reina C., Nacy S., Gilles J., Koohbor B., & Youssef G. (2022). Predictability of mechanical behavior of additively manufactured particulate composites using machine learning and data-driven approaches. *Computers in Industry*, vol. 142, 103739. <https://doi.org/10.1016/j.compind.2022.103739>
 6. Barkanov E., et al. (2018). Experimental validation of thermochemical algorithm for a simulation of pultrusion processes. *Journal of Physics Conference Series*, vol. 991, no. 1, April 2018. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012009.
 7. Barkanov E., Akishin P., Miazza N. L., & Galvez S. (2017). ANSYS-based algorithms for a simulation of pultrusion processes. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 24, no. 5, pp. 377-384. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1191096>
 8. Roux J. A., Vaughan J. G., Shanku R., et al. (1998). Comparison of measurements and modeling for pultrusion of a fiberglass/epoxy I-beam. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 17, no. 17, pp. 1557-1579.
 9. Liu X. L., & Hillier W. (1999). Heat transfer and cure analysis for the pultrusion of a fiberglass-vinyl ester I-beam. *Composite Structures*, vol. 47, pp. 581-588.
 10. Liang G., Garg A., & Chandrashekhara K. (2005). Cure characterization of pultruded soy-based composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 24, no. 14, pp. 1509-1520.
 11. Lvov G. I. (2022). Numerical Homogenization of the Thermophysical Properties of Fibrous Composites. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 58, no. 5, pp. 613-628. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10054-x>
 12. Barkanov E., Akishin P., Namsone E., Auzins J., & Morozovs A. (2021). Optimization of Pultrusion Processes for an Industrial Application. *Mechanics of Composite Materials*, no. 6, pp. 697-712.
 13. Zhu, J., Chandrashekhara K., Flanigan V., & Kapila S. (2004). Manufacturing and Mechanical Properties of Soy-based Composites using Pultrusion. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 35, no. 1, pp. 95-101. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2003.08.007>
 14. Eleftheroglou N., Zarouchas D., & Benedictus R. (2020). An adaptive probabilistic data-driven methodology for prognosis of the fatigue life of composite structures. *Composite Structures*, vol. 245, 112386. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112386>
 15. Huang T., Gao J., Sun Q., Zeng D., Su X., Liu W. K., & Chen W. (2021). Stochastic nonlinear analysis of unidirectional fiber composites using image-based microstructural uncertainty quantification. *Composite Structures*, vol. 260, 113470. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113470>
 16. Saenz-Dominguez I., Tena I., Esnaola A., Sarrionandia M., Torre J., & Aurrekoetxea J. (2019). Design and characterisation of cellular composite structures for automotive crash-boxes manufactured by out of die ultraviolet cured pultrusion. *Composites Part B: Engineering*, vol. 160, pp. 217-224. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.046>
 17. Lvov G. I. (2022). Numerical Homogenization of the Thermophysical Properties of Fibrous Composites. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 58, no. 5, pp. 613-628. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10054-x>
 18. Tian W., Chao X., Fu M. W., Qi L., & Ju L. (2021). New numerical algorithm for the periodic boundary condition for predicting the coefficients of thermal expansion of composites. *Mechanics of Materials*, vol. 154, Article 103737.
 19. Lee D., & Song Y. S. (2018). Modeling the effects of elastic modulus and thermal expansion coefficient on the shrinkage of glass fiber reinforced composites. *Composites: Part B*, vol. 146, pp. 98-105.
 20. Sun Z., Shan Z., Shao T., Li J., & Wu X. (2021). A multiscale modeling for predicting the thermal expansion behaviors of 3D C/SiC composites considering porosity and fiber volume fraction. *Ceramics International*, vol. 47, no. 6, pp. 7925-7936.
 21. Sobhaniragh B., Batra R. C., Mansur W. J., & Peters F. C. (2017). Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B: Engineering*, vol. 118, pp. 41-53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.032>
 22. Koohbor B., Ravindran S., & Kidane A. (2018). A multiscale experimental approach for correlating global and local deformation response in woven composites. *Composite Structures*, vol. 194, pp. 328-334. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.04.016>
 23. Zhou L., Yuan T. B., Yang X. S., Liu Z. Y., Wang Q. Z., Xiao B. L., & Ma Z. Y. (2022). Microscale prediction of effective thermal conductivity of CNT/Al composites by finite element method. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 171, Article 107206.
 24. Wu, L., Adam, L., & Noels, L. (2021). Micro-mechanics and data-driven based reduced order models for multi-scale analyses of woven composites. *Composite Structures*, vol. 270, 114058. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114058>
 25. Veenstra S. W. P., Wijskamp S., Rosić B., & Akkerman R. (2022). Bending behaviour of thermoplastic composites in melt: A data-driven approach. *Composites Science and Technology*, vol. 219, 109220. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2021.109220>
 26. Cheung H. L., & Mirkhalaf M. (2024). A multi-fidelity data-driven model for highly accurate and computationally efficient modeling of short fiber composites. *Composites Science and Technology*, vol. 246, 110359. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2023.110359>
 27. Castricum B. A., Fagerström M., Ekh M., Larsson F., & Mirkhalaf S. M. (2022). A computationally efficient coupled multi-scale model for short fiber reinforced composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 163, 107233. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2022.107233>
 28. Mirkhalaf S. M., Eggels E. H., van Beurden T. J. H., Larsson F., & Fagerström, M. (2020). A finite element based orientation averaging method for predicting elastic properties of short fiber reinforced composites. *Composites Part B: Engineering*, vol. 202, 108388. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108388>
 29. Mirkhalaf S. M., van Beurden T. J. H., Ekh M., Larsson F., & Fagerström M. (2022). An FE-based orientation averaging model for elasto-plastic behavior of short fiber composites. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 219, 107097. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107097>

Надійшла (received) 01.03.2024

Біомості про авторів/ About the Authors

Лавченко Руслан Ровшан огли (Lavshchenko Ruslan) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3649-1118>; e-mail: ruslan.lavshchenko@infz.khpi.edu.ua

Львов Геннадій Іванович (Lvov Gennadiy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-9227>; e-mail: lvovdpm@ukr.net

В. Б. УСПЕНСЬКИЙ, О. С. ДОГАДАЙЛО

РЕАЛІЗАЦІЯ ОПТИМАЛЬНОЇ РЕКОНФІГУРАЦІЇ РОЮ БПЛА

Сьогодні застосування БПЛА коптерного типу у різних галузях господарства є економічно виправданим та інколи безальтернативним. Наступним кроком до підвищення ефективності такої технології є використання груп БПЛА, об'єднаних однією задачею. Якщо такі групи містять велику кількість апаратів, розташованих досить щільно, їх називають роями. Наочним загально відомим прикладом застосування роїв квадрокоптерів є створення у небі візуальних образів та їх перетворення за певною програмою. Очевидно, що можливості таких структур набагато ширші і вони мають дуже гарні перспективи у майбутньому. Але для реалізації таких можливостей необхідно розв'язати низку задач, починаючи з методів отримання та обміну поточною інформацією між членами групи, закінчуючи стратегічним плануванням та оперативним керуванням окремими апаратами. Ці задачі обтяжуються додатковими умовами безпеки та оптимальності функціонування. В даній статті розглянуто моделювання оптимальної реконфігурації великої групи БПЛА із фактичного початкового стану у бажаний кінцевий. Для кожного апарату визначається кінцева точка, в яку він буде рухатись. Така задача має не єдиний розв'язок, тому додано критерій оптимальності – тривалість повної реконфігурації, яку треба мінімізувати. Задача розглядається в умовах однакової та постійної швидкості польоту усіх БПЛА коптерного типу. Аналіз усіх варіантів є неможливим, бо обчислювальна складність такого методу пропорційна N факторіал, де N – кількість БПЛА в групі. Розроблено квазіоптимальний метод, складність якого пропорційна N . Шляхом статистичного моделювання доведена його ефективність, яку можна порівняти із ефективністю оптимального методу. Отримано також непрямі оцінки його ефективності у загальному випадку. Розглянуто конкретні приклади реконфігурації рою. Описано та досліджено алгоритм запобігання зіткнень БПЛА під час руху за призначеними траєкторіями. Отримані результати є складовою частиною комплексу задач з навігації та управління БПЛА в умовах великої щільної групи.

Ключові слова: БПЛА, рій, оптимальна реконфігурація, мінімальна тривалість перельоту, запобігання зіткнень

V. USPENSKYI, O. DOHADAILO

IMPLEMENTATION OF OPTIMAL RECONFIGURATION OF UAV SWARM

Now the use of copter-type UAVs in various sectors of the economy is economically justified and sometimes has no alternative. The next step to increase the efficiency of such technology is the use of groups of UAVs united by a single task. If such groups contain a large number of devices located quite densely, they are called swarms. A clear, well-known example of the use of swarms of quadcopters is the creation of visual images in the sky and their transformation according to a certain program. Obviously, the possibilities of such structures are much wider and they have very good prospects in the future. But in order to realize such opportunities, it is necessary to solve a number of problems, starting with methods of obtaining and exchanging current information between group members, ending with strategic planning and operational management of individual devices. These tasks are burdened by additional conditions of safety and optimal functioning. This article considers the modeling of the optimal reconfiguration of a large group of UAVs from the actual initial state to the desired final state. For each device, the final point to which it will move is determined. Such a problem does not have a unique solution, therefore an optimality criterion was added – the duration of complete reconfiguration, which must be minimized. The task is considered under conditions of the same and constant flight speed of all copter-type UAVs. Analysis of all options is impossible, because the computational complexity of such a method is proportional to the N factorial, where N is the number of UAVs in the group. A quasi-optimal method has been developed, the complexity of which is proportional to N . Statistical modeling has proven its effectiveness, which can be compared with the effectiveness of the optimal method. Indirect estimates of its effectiveness in the general case were also obtained. Specific examples of swarm reconfiguration are considered. The algorithm for preventing collisions of UAVs while moving along designated trajectories is described and studied. The obtained results are an integral part of the set of tasks for navigation and control of UAVs in the conditions of a large dense group.

Keywords: UAV, swarm, optimal reconfiguration, minimum flight duration, collision avoidance

Проблема, що розглядається, та аналіз її стану. Розглядається велика сукупність БПЛА, що складають групу. Прикладом такої групи може бути так званий "рій", тобто щільна група відносно невеликих апаратів, зазвичай коптерного типу [1]. Такі угруповання можуть використовуватись з різними цілями, серед яких найвідоміша – це "космічні шоу". В них апарати складають у небі певні візуальні образи та час від часу змінюють їх. Реалізація такої групової поведінки неможлива без вирішення досить складних та специфічних задач. Серед них можна вказати наступні: (1) локальне управління кожним апаратом у залежності від поставленої перед ним цілі; (2) високоточне визначення положення апаратів для забезпечення безпеки в умовах високої щільності та збереження певної конфігурації; (3) визначення структури групи БПЛА, що забезпечить узгодженість поведінки різних апаратів; (4) планування переміщень апаратів при реконфігурації групи. Дана робота є продовженням

досліджень авторів та спирається на результати, отримані раніше. Тому за доцільне вважаємо вказати, що перша задача з перелічених вище нами розв'язана у [2], розв'язок другої та третьої задач дається в [3], дана стаття присвячена четвертій задачі. Зупинимось на ній докладніше. Початковий стан апаратів є відомим та задається координатами усіх БПЛА. Потрібний кінцевий стан групи також відомий, але як сукупність точок у просторі, в які врешті решт повинні потрапити БПЛА. За умов, що максимальна швидкість руху БПЛА у будь-якому напрямі однакова для всіх апаратів, треба для кожного БПЛА визначити кінцеву точку-ціль таким чином, щоб реконфігурація усієї групи зайняла найменший час. Метод отримання квазіоптимального рішення стисло викладено в роботі [4]. В даній статті метод викладено більш докладно, доповнено алгоритмом запобігання зіткнень БПЛА в процесі перебудови та новими результатами моделювання.

Питання управління групою БПЛА розглядаються у літературі з різних точок зору. По-перше, це вибір архітектури групи та здійснення комунікації між її членами. Різні типи архітектури групи БПЛА наведені у [5]. В [3] пропонується розвиток структури з базовою станцією, доповненою додатковим зв'язком між апаратами в групі, що дозволяє більш повно реалізувати принципи відносної навігації. Друге важливе питання – це забезпечення стійкості групи БПЛА в умовах перешкод [6]. Задача геометричної реконфігурації групи, більш схожа з тією, що розглядається у статті, аналізується в [7]. Останні два випадки належать до стратегічного планування реконфігурації. Третій аспект тематики – це задачі оперативного керування польотом окремих БПЛА з оптимізацією тривалості та з обмеженнями щодо можливих зіткнень [8], розробка оптимальних контролерів [9], багатокритеріальна оптимізація траєкторій БПЛА в групі [10] і т.д. Але всі перелічені роботи здебільшого відносяться до кількох апаратів, тобто мова не йде про планування скоординованих польотів для групи БПЛА, що нараховує кілька сотень агентів. У цьому сенсі постановка задачі та підхід до її розв'язання, що пропонується у даній статті, є досить новим. Нарешті, в [11] знаходимо сучасний огляд тематики використання роїв БПЛА та її основних задач. Згідно із цією роботою, потенційні можливості використання роїв у різних сферах, специфіка їх організації, методів функціонування та взаємодії між елементами дозволяє казати про роєвий інтелект, як окрему концепцію розподіленої обробки інформації. Питання безпеки експлуатації БПЛА залишається найважливішим. Сучасні технології запобігання зіткнень дронів з перешкодами на основі використання різних сенсорів викладені у [12]. Методи зменшення ймовірності зіткнень пілотованих літальних апаратів з дронами розглядаються [13]. В роботі [14] пропонується розвиток методології запобігання зіткнень роїв дронів між собою або з перешкодами на підставі вдосконалення інформаційного обміну між агентами рою, в [15] така ж задача вирішується за допомогою візуальної інформації та керування швидкістю. Інформація стосовно наявності перешкод передається через віртуальні поля відштовхування та тяжіння, які реалізовані в бортових алгоритмах управління дронів. Подібна стратегія розвивається у даній статті, але для умов підвищеної щільності рою та впорядкування руху його агентів.

Математична постановка задачі. Початкове положення БПЛА задається координатами $\{x_n, y_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, N – кількість апаратів у групі. Кількість точок кінцевого положення також дорівнює N . Координати кінцевих точок $\{x_k^*, y_k^*\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ відомі, нумерація кінцевих точок довільна. Оскільки за припущенням всі апарати рухаються у будь-якому напрямі з однаковою та постійною швидкістю, то час перельоту є пропорційним відстані між відповідною

початковою точкою та кінцевою. Тому далі матимемо на увазі, що мінімізація параметру "відстань між точками" еквівалентна мінімізації параметру "час перельоту".

Взаємне положення початкових та кінцевих точок задамо у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \hat{\rho}_{12} & \dots & \rho_{1k} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{21} & \dots & \rho_{2k} & \dots & \hat{\rho}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \hat{\rho}_{nk} & \dots & \rho_{nN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\rho}_{N1} & \rho_{N2} & \dots & \rho_{Nk} & \dots & \rho_{NN} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $\rho_{nk} = \sqrt{(x_n - x_k^*)^2 + (y_n - y_k^*)^2}$ – відстань між відповідною початковою та кінцевою точками; номер рядка n – номер початкової точки, номер стовпця k – номер кінцевої точки.

Сформулюємо задачу. Позначимо $\mathcal{R}_s = \{r_n\}_{n=1, \dots, N}$ – конкретну перестановку з номерів кінцевих точок. Кількість таких перестановок складає $N!$ (N факторіал). Число r_n будемо інтерпретувати, як номер кінцевої точки, в яку планується перехід з початкової точки n . Треба знайти таку сукупність переходів з початкових точок в кінцеві, щоб максимальна відстань переходу була мінімальною. Іншими словами, треба знайти послідовність ρ_{nk} , таку, щоб у кожному рядку та кожному стовпці матриці був тільки один член цієї послідовності. Відповідний елемент матриці будемо називати "активним". Тобто обмеженням розв'язку задачі є умова: "для кожного рядку/стовпця – єдиний активний елемент". Оскільки варіантів вибору таких послідовностей багато, ми шукатимемо найкращу, а саме таку, максимальне значення в якій буде мінімальним серед усіх варіантів.

Математично задачу можна сформулювати так: серед $\mathcal{R}_s$ потрібно знайти перестановку

$$\mathcal{R}^* = \arg \left\{ \min_{\mathcal{R}_s, s=1, \dots, N!} \left(\max_{n=1, \dots, N} \rho_{n, r_n} \right) \right\}.$$

Як приклад оптимального планування в наведеній вище матриці відповідні елементи позначено символом $\hat{\rho}$. Відповідна множина $\mathcal{R}^* = (2, N, \dots, k, \dots, 1)$.

Обговорення задачі. Сформульована задача здається нескладною, але тільки з першого погляду. Перш за все треба обговорити можливість використання звичайного методу перебору. Для його реалізації треба згенерувати усю множину можливих перестановок, для кожного варіанту взяти відповідні значення ρ_{nk} та виділити найбільше значення серед елементів перестановки. Нарешті обрати саме ту перестановку, якій відповідає найменше значення серед обраних максимальних. Така перестановка

відображатиме оптимальну програму реконфігурації групи БПЛА в задане кінцеве положення. Описаний алгоритм можна використовувати при невеликих N (скажімо до 15). Але тоді, коли N сягатиме кілька сотень, такий алгоритм непрацездатний, оскільки кількість можливих варіантів складатиме астрономічну величину ($N!$), яка ще й збільшується зі швидкістю, що прогресує. В цих умовах треба запропонувати метод, скоріш за все квазіоптимальний, та оцінити, наскільки рішення, яке генерується цим методом, буде гіршим за суворо оптимальне.

Перед тим, як описати такий метод, зупинимось на отриманні оцінки оптимального рішення взагалі. Не торкаючись визначення оптимальної перестановки, тобто множини точкових переходів, а маючи на увазі тільки найкращий час реконфігурації, проведемо наступний аналіз матриці.

Для кожного рядку $n = \overline{1, N}$ визначимо найменше значення серед його елементів

$$\alpha_n = \min_{k=1, N} \rho_{nk}. \quad (2)$$

Визначений параметр відповідатиме відстані до певної кінцевої точки, найближчої до початкової точки за номером n . В свою чергу, для кожного стовпця $k = \overline{1, N}$ також визначимо

$$\beta_k = \min_{n=1, N} \rho_{nk}. \quad (3)$$

Цей параметр відповідатиме відстані до певної початкової точки, найближчої до кінцевої точки за номером k . Очевидно, що коротших переходів, ніж визначені, для кінцевих та початкових точок не може бути, тому сукупні параметри

$$\alpha = \max_{n=1, N} \alpha_n, \quad \beta = \max_{k=1, N} \beta_k \quad (4)$$

можуть служити оцінками нижньої межі оптимальної тривалості реконфігурації групи БПЛА у цілому. Оскільки зазвичай $\alpha \neq \beta$, то у якості оцінки є сенс брати

$$\rho_{\min} = \max\{\alpha, \beta\}. \quad (5)$$

Для отримання оцінки мінімальної тривалості реконфігурації знайдений параметр треба поділити на швидкість польоту, за припущенням однакою для всіх БПЛА. Чи буде знайдений параметр відповідати якійсь оптимальній перестановці з урахуванням умови "кожному рядку/стовпцю – єдиний активний елемент" – довести не вдається. Але можна стверджувати, що оптимальна тривалість реконфігурації гарантовано не буде меншою за отриману оцінку. Таким чином, остання може служити індикатором того, наскільки перестановки, отримані квазіоптимальними методами, далекі від оптимальної.

Оцінка максимальної тривалості реконфігурації очевидна:

$$\rho_{\max} = \max_{n, k=1, N} \rho_{nk}.$$

Вона також слугуватиме певною оцінкою ефективності знайденого квазіоптимального рішення.

Метод розв'язання. Викладемо метод оптимального планування реконфігурації, що пропонується, на прикладі п'ятих точок із незалежно заданими чисельними значеннями взаємних відстаней. Зауважимо, що на практиці незалежними можуть біти координати кінцевих точок, а відстані між ними та початковими точками напевно ні. Але для демонстрації методу це не суттєво. Надамо відповідну матрицю (1) відстаней у вигляді таблиці 1:

Таблиця 1. - Матриця початкових відстаней

Номери початкових точок	Номери кінцевих точок					α_n див.(2)
	1	2	3	4	5	
1	3	9	5	7	12	3
2	4	6	1	15	5	1
3	9	13	6	11	4	4
4	2	7	11	4	14	2
5	5	9	10	2	6	2
β_k див.(3)	2	6	1	2	4	4 max =6

та згідно з (2)–(4) знайдемо α_n, β_k та α, β . Відповідно (5) найнижча оцінка "тривалості" реконфігурації $\rho_{\min} = 6$. Але ця оцінка є орієнтовна, бо зараз невідомо, чи відповідає вона якійсь припустимій перестановці $\mathcal{R}_s = \{r_n\}_{n=1, N}$. Тобто оптимальна реконфігурація серед припустимих може бути тривалішою. Найвища оцінка становить $\rho_{\max} = 15$.

Спочатку задача розв'язується з позицій досяжності кінцевих точок. Всього маємо $N-1$ кроків (вибір останньої пари тривіальний), на кожному з яких визначається пара "номер початкової точки – номер кінцевої точки", які пов'язуються траєкторією переходу. На наступному кроці ці точки виключаються з розгляду.

В останньому рядку таблиці для кожної кінцевої точки наведено значення найменшої тривалості переходу з множини початкових точок. Це означає, що кращого результату, ніж β_k , для k -тої кінцевої точки досягти неможливо. Серед цих значень оберемо найбільшу тривалість, відповідний стовпець виділимо сірим кольором та назовемо **провідним стовпцем**; відповідний рядок, що містить β_k , назовемо **провідним рядком**, а їх перетин – **провідним елементом**. У нашому разі таким елементом є 6 у другому рядку та другому стовпці. Перехід від другої початкової точки до другої кінцевої додамо в оптимальний план. Таким чином, метод полягає у визначенні на кожному кроці провідного елемента, при цьому номер провідного рядка означає номер початкової точки, з якої БПЛА слідуватиме у кінцеву точку за номером провідного стовпця.

На наступному кроці з метою виключення з розгляду вже використаних рядка та стовпця проводиться оновлення матриці, при якому всі елементи провідного рядка покладаються рівними "великому" числу $M > 0$, яке гарантовано більше за будь-який елемент вихідної матриці (наприклад $M = 100$), після цього елементи провідного стовпця змінюються на число $-M$ і стають від'ємними (табл.2):

Таблиця 2. - Матриця відстней після перетворення

Номери початкових точок	Номери кінцевих точок					
	1	2	3	4	5	
1	3	-100	5	7	12	-
2	100	-100	100	100	100	-
3	9	-100	6	11	4	-
4	2	-100	11	4	14	-
5	5	-100	10	2	6	-
β_k див.(3)	2	-100	5	2	4	$\max = 5$

Проводячи таку ж процедуру визначення провідного елементу, як і на попередньому кроці, визначимо наступний перехід з початкової точки за номером 1 у кінцеву точку за номером 3. Тривалість переходу відповідає значенню 5. Перехід додамо до оптимального плану та проведемо оновлення матриці. Роблячи аналогічно ще два подібних кроки, маємо наступний оптимальний план (табл.3):

Таблиця 3. - Матриця з оптимальним планом

Номери початкових точок	Номери кінцевих точок				
	1	2	3	4	5
1	-	-	5	-	-
2	-	6	-	-	-
3	-	-	-	-	4
4	2	-	-	-	-
5	-	-	-	2	-

Максимальна тривалість отриманого плану реконфігурації складає 6 одиниць.

Отриманий результат є гарним, але це може бути не завжди. У загальному випадку описану процедуру треба доповнити процедурою, в якій задача розв'язується з позицій віддаленості початкових точок. Ця процедура також складається з $N-1$ еквівалентних кроків. Щоб не змінювати алгоритму, достатньо замість вихідної матриці використовувати транспоновану. У цьому разі номери початкових та кінцевих точок міняються місцями. В результаті отримаємо наступний план (табл.4):

Таблиця 4. - Матриця з квазіоптимальним планом

Номери кінцевих точок	Номери початкових точок				
	1	2	3	4	5
1	3	-	-	-	-
2	-	-	-	-	9
3	-	1	-	-	-
4	-	-	-	4	-
5	-	-	4	-	-

На відміну від попереднього результату тривалість реконфігурації досягає 9 одиниць. Але погіршення результату не є закономірним, тому у загальному випадку слід розглядати обидві процедури та обирати серед отриманих планів найкращий.

До речі, оптимальна тривалість для даної матриці є 6, при цьому одна з припустимих перестановок відповідає переходам з кожної початкової точки у однойменну кінцеву точку. Але слід зауважити, що при однаковій результативності трудомісткість знаходження оптимального рішення набагато більша, ніж отримання рішення за допомогою квазіоптимального методу.

При практичній реалізації алгоритму методу може виникнути колізія, пов'язана із можливістю не єдиного вибору провідного рядка або стовпця при однаковості оцінок. На практиці така ситуація малоймовірна, але теоретично можлива. У цьому разі треба або визначити квазіоптимальний план для кожного можливого варіанту, або обирати провідний елемент серед однакових претендентів випадково.

Зауважимо, що узагальнення методу на випадок будь-якої кількості БПЛА не має принципових відмінностей.

Чисельне моделювання. Оцінити ефективність розробленого методу аналітично не вдається, тому було обрано метод статистичного чисельного моделювання, метою якого є: 1) оцінка ефективності розробленого квазіоптимального алгоритму відносно дійсно оптимального рішення; 2) апробація квазіоптимального алгоритму на задачі великої розмірності.

Щоб досягти першої мети було обрано 10 БПЛА, початкове розташування та кінцеве бажане розташування яких задається випадково у певному діапазоні. Типове розташування у двовимірному просторі має вигляд, як на рис.1. Точками зображено початкове положення БПЛА, трикутниками – бажане кінцеве положення.

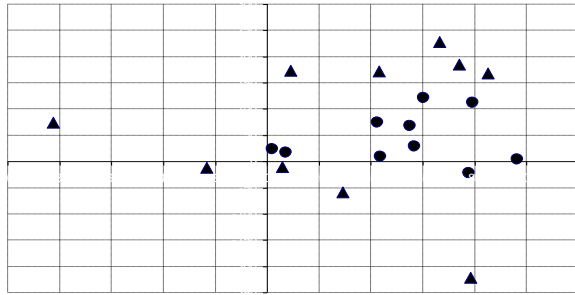


Рис.1 – Типове розташування початкових та кінцевих точок для оцінки ефективності алгоритму

Взагалі було проаналізовано 100 незалежних варіантів розташування та отримано результат за квазіоптимальним та оптимальним методами. В останньому випадку йдеться про простий перебір усіх перестановок. Кількість перестановок для кожного варіанту розташування складає $10! = 3628800$. В результаті порівняння встановлено, що два етапи квазіоптимального методу у 100% випадків забезпечують визначення плану реконфігурації з оптимальною тривалістю. Таким чином, це дає певну впевненість у його ефективності. Перешкодою до збільшення кількості БПЛА при моделюванні є швидке зростання кількості перестановок, які аналізуються для отримання дійсно оптимального рішення.

Апробація методу проводилась для 300 БПЛА, які спочатку складали двовимірний трикутник і повинні перебудуватись у заданий чотирикутник (рис.2). Координати точок задаються у метрах.

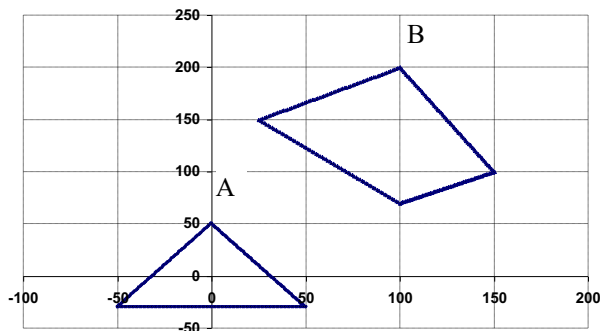


Рис.2 – Початкове фактичне (трикутник) та бажане кінцеве (чотирикутник) розташування БПЛА

В результаті обчислення квазіоптимального плану за розробленим методом максимальна відстань між початковою та кінцевою точками склала 180 м. До речі, максимальна відстань між початковою та кінцевою точками взагалі складає 275 м. Різниця є непрямым показником ефективності розробленого методу.

Нарешті, розглянемо випадок, коли БПЛА на початку розташовані хаотично та повинні якомога швидше організувати коло певного радіуса (рис.3).

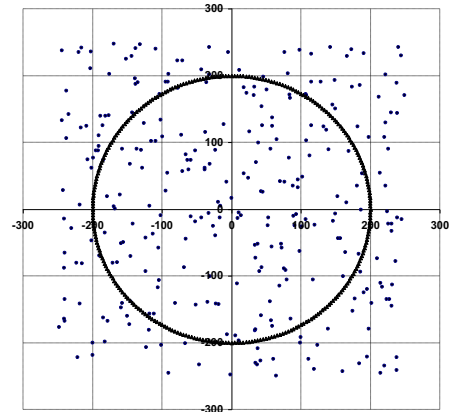


Рис.3 – Початкове та бажане кінцеве (коло) розташування БПЛА

Завдяки двом етапам алгоритму найкращий результат, тобто максимальна відстань переходу у квазіоптимальному плані, сягатиме 405 м при максимальній відстані між початковими та кінцевими точками взагалі 540 м. Але частка БПЛА, які при квазіоптимальному плануванні долатимуть відстань, більшу за 200 м, невелика та складає 10 з 300. Уявлення про "напруженість" плану для усього ансамблю БПЛА дає гістограма (рис.4).

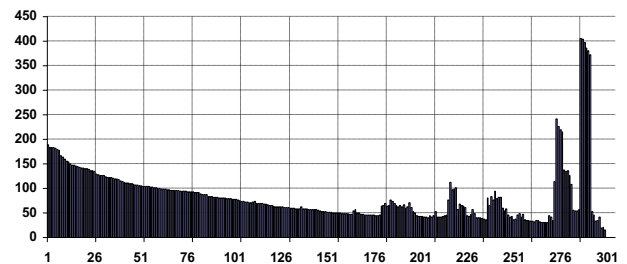


Рис.4 – Гістограма довжини запланованих переходів для кожного БПЛА

Уздовж горизонтальної осі відкладено умовний номер БПЛА, вздовж вертикальної – відстань, яку він долатиме згідно з квазіоптимальним планом. Гістограма свідчить про те, що переважна більшість БПЛА виконає завдання реконфігурації з великим запасом.

Алгоритм запобігання зіткнень. Реконфігурація групи БПЛА за методом, що пропонується, передбачає рух апаратів вздовж прямих, що з'єднують початкову точку розташування БПЛА із визначеною кінцевою точкою призначення (КТП). Саме такий рух відповідатиме квазіоптимальній за часом реконфігурації. Проте практична реалізація може привести до зіткнення апаратів внаслідок перетину або критичного зближення траєкторій руху у просторі та часі. В цих умовах необхідно використовувати спеціальний алгоритм управління БПЛА для запобігання зіткнень. Сформулюємо вимоги та припущення для такого алгоритму:

- траєкторія руху після корегування повинна залишатись близькою до оптимальної прямої;
- відстань між БПЛА не повинна бути меншою за задане число $\rho_{\min}$;
- бортова система кожного БПЛА забезпечує отримання власних поточних координат та швидкості. Також відомі координати власної КТП;
- кожен БПЛА групи, згідно зі структурою рою, запропонованою в [3], має виміри відстані до сусідів, які оновлюються з достатньо великою частотою. Разом із ідентифікатором БПЛА-сусіда в інформаційних пакетах присутня інформація щодо його координат та координат його КТП.

Побудуємо математичну модель контрольного параметра – відстані між двома БПЛА.

Нехай x_1, y_1, z_1 та x_2, y_2, z_2 – поточні координати першого та другого БПЛА, що знаходяться на своїх квазіоптимальних траєкторіях перельоту. Відстань між ними визначається виразом

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

а її похідна, або радіальна швидкість, має вигляд

$$\dot{\rho} = \frac{(x_2 - x_1)}{\rho}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{(y_2 - y_1)}{\rho}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{(z_2 - z_1)}{\rho}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \quad (6)$$

де

$$\dot{x}_i = v \cdot \frac{x_i^k - x_i}{\rho_i^k}, \quad \dot{y}_i = v \cdot \frac{y_i^k - y_i}{\rho_i^k}, \quad \dot{z}_i = v \cdot \frac{z_i^k - z_i}{\rho_i^k}; \quad (7)$$

$i = 1, 2$; x_i^k, y_i^k, z_i^k – координати КТП для i -го БПЛА;

v – швидкість БПЛА, однакова для всіх апаратів;

$$\rho_i^k = \sqrt{(x_i^k - x_i)^2 + (y_i^k - y_i)^2 + (z_i^k - z_i)^2} \quad (8)$$

– відстань від поточної точки перебування до КТП.

Вважатимемо, що зіткнення двох БПЛА ймовірне, якщо

1) відстань між ними стала меншою за $c_1 \cdot \rho_{\min}$,

де c_1 – емпіричний параметр, встановлений з врахуванням швидкості v , частоти оновлення інформації і т.і.

2) на наступній ітерації відстань між БПЛА скорочується, тобто $\dot{\rho} < 0$.

Якщо перелічені умови збігаються, далі може бути два варіанти перебігу подій.

Перша ситуація – це коли БПЛА рухаються в таких напрямках, які можуть спричинити зіткнення. В такому випадку пропонується таке: один з БПЛА має зупинитись та пропустити іншого. Який саме БПЛА має зупинитись вирішується наступним чином:

- на кожному БПЛА обчислюється швидкість за формулою

$$\dot{r} = \frac{(x_S - x_O)}{\rho} \dot{x}_S + \frac{(y_S - y_O)}{\rho} \dot{y}_S + \frac{(z_S - z_O)}{\rho} \dot{z}_S, \quad (9)$$

де $x_S, y_S, z_S, \dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{z}_S$ – поточні значення власних координат та швидкості; x_O, y_O, z_O – координати БПЛА-сусіда; ρ – поточна відстань між двома БПЛА, що розглядаються. Якщо казати про номери БПЛА 1 або 2, то для першого $S=1, O=2$, для другого $S=2, O=1$;

- якщо власна оцінка

$$\dot{r} \geq 0, \quad (10)$$

даний БПЛА продовжує рух, інакше зупиняється.

Підкреслимо, що не від'ємність оцінок швидкості $\dot{r}$ одночасно з боку обох БПЛА за умови $\dot{\rho} < 0$ неможлива. Тому при зближенні, якщо для одного БПЛА $\dot{r} \geq 0$, гарантовано буде від'ємність оцінки з боку другого апарату.

Таким чином, після обчислення власних оцінок швидкості за формулою (9) апарат, для якого $\dot{r} \geq 0$, продовжує рух, а інший апарат за критерієм від'ємності власної оцінки зупиняється. Він продовжить рух тоді, коли для поточної оцінки ρ , отриманої шляхом безпосередніх вимірів, виконається умова

$$\rho > c_2 \cdot \rho_{\min},$$

де $c_2 > c_1$ – емпіричний коефіцієнт.

Далі продемонстровано приклад такої ситуації (рис. 5, 6). Кола відповідають поточному положенню БПЛА, проміні – траєкторіям їх руху, що закінчуються у КТП. Всі апарати рухаються з однаковою швидкістю. Для сірого та білого кола є колізія, пов'язана з тим, що у процесі руху вони можуть неприпустимо зблизитись.

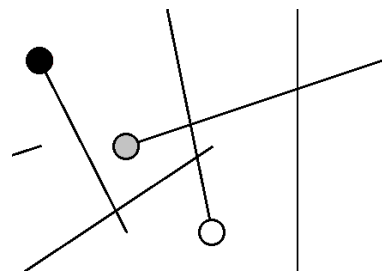


Рис. 5 – Приклад сценарію із зупинкою, "початок"

Коли обидва апарати встановили ймовірність зіткнення, кожен з апаратів за алгоритмом (9), (10) визначив свою поведінку. Сіре коло у цьому випадку рухатиметься далі, а біле коло зупиниться (рис. 6).

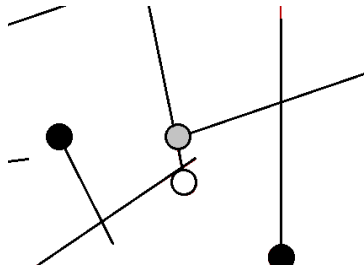


Рис. 6 – Приклад сценарію із зупинкою, "зупинка"

Біле коло продовжить рух після того, як відстань між колами стане достатньо великою (рис. 7).

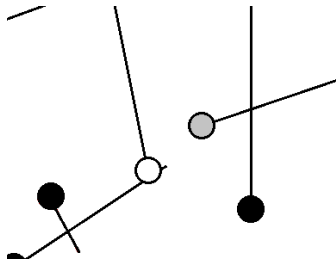


Рис. 7 – Приклад сценарію із зупинкою, "продовження руху"

Запропонований алгоритм має той недолік, що можлива ситуація, коли оцінки швидкості $\dot{r}$, обчислені обома БПЛА, будуть від'ємними. У цьому разі за логікою алгоритму обидва апарати зупиняться "назавжди". Для запобігання такого ефекту пропонується інша стратегія, яка доповнює першу. Вона активується, якщо, по-перше, відстань між БПЛА не змінюється певний час; по-друге, хоча б один з апаратів не рухається; по-третє, хоча б один з апаратів не закінчив свій рух в КТП. З точки зору "групового розуму" кожен БПЛА з двох, що взаємодіють, передає ознаку активності, яка змінюється, коли апарат прийде в КТП. БПЛА-сусід, який не рухається, якщо він матиме хоча б одну ознаку активності (свою або від сусіда) та за умови незмінності відстані до сусіда ініціює перехід на другу стратегію.

Друга стратегія полягає в тому, що БПЛА обмінюються координатами кінцевих точок призначення, після чого продовжують рух в нові кінцеві точки. Подібна стратегія описана, зокрема, в [1].

Нові швидкості для першого та другого БПЛА після обміну точками призначення визначатимуться за формулами

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v \cdot \frac{x_2^k - x_1}{\rho_{12}^k}, \quad \dot{y}_1 = v \cdot \frac{y_2^k - y_1}{\rho_{12}^k}, \quad \dot{z}_1 = v \cdot \frac{z_2^k - z_1}{\rho_{12}^k}; \\ \dot{x}_2 &= v \cdot \frac{x_1^k - x_2}{\rho_{21}^k}, \quad \dot{y}_2 = v \cdot \frac{y_1^k - y_2}{\rho_{21}^k}, \quad \dot{z}_2 = v \cdot \frac{z_1^k - z_2}{\rho_{21}^k};\end{aligned}$$

де

$$\rho_{12}^k = \sqrt{(x_2^k - x_1)^2 + (y_2^k - y_1)^2 + (z_2^k - z_1)^2},$$

$$\rho_{21}^k = \sqrt{(x_1^k - x_2)^2 + (y_1^k - y_2)^2 + (z_1^k - z_2)^2}$$

– відстань від поточних точок перебування до нових КТП. Неважко довести аналітично, що така стратегія гарантовано забезпечує додатність $\dot{\rho}$ в умовах, коли відстань ρ_{12}^k та ρ_{21}^k набагато більша, ніж $c_1 \cdot \rho_{\min}$. У загальному випадку результативність стратегії визначається умовою

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{\rho} + \frac{(y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)}{\rho} + \\ &+ \frac{(z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)}{\rho} \geq 0\end{aligned}\quad (11)$$

Продемонструємо результативну стратегію на прикладі.

Нехай біле коло зупиняється в своїй КТП надто близько до траєкторії сірого кола (рис. 8). При наближенні сірого кола до білого на критичну відстань воно зупиниться. Згідно з описаною стратегією БПЛА обмінюються кінцевими точками призначення.

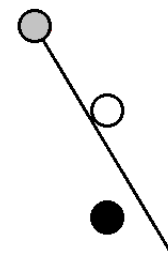


Рис. 8 – Приклад сценарію з обміном КТП, "початок"

Після цього вони продовжують рух вже в нові КТП: біле починає рух в нову КТП, сіре коло замінює біле (рис. 9).

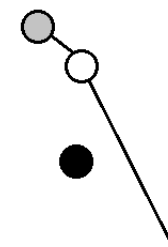


Рис. 9 – Приклад сценарію з обміном КТП, "обмін"

Характеризуємо втрати оптимальності при таких стратегіях. При першій стратегії можливе збільшення тривалості усієї перебудови, тому що певні БПЛА можуть зупинятись і тим самим збільшити час свого перельоту. При другій стратегії збільшення тривалості майже не відбувається, бо зупинки дуже короткі, а рух після обміну КТП продовжується майже за тими ж оптимальними траєкторіями, що і з самого початку.

Для демонстрації ефективності розроблених алгоритмів запобігання зіткнень використаємо метод

статистичного моделювання. Для цього проведено 100 реалізацій розв'язання задач квазіоптимальної реконфігурації групи з 20 БПЛА при довільних початкових та кінцевих точках розміщення (у випадку 2D) з моделюванням руху апаратів.

Для кожної реалізації фіксувались: квазіоптимальна розрахункова тривалість перебудови; кількість колізій (випадків можливих зіткнень); успішність або не успішність реалізації у цілому; фактична тривалість перебудови з врахуванням запобігання зіткнень.

Як примірник на рис. 10 показані траєкторії перельоту для квазіоптимальної перебудови з випадковими точками призначень групи з 20 БПЛА. Темні кола – початкові точки, сірі кола – кінцеві точки призначення. Підкреслимо, що геометричний перетин траєкторії не є достатньою ознакою ймовірного зіткнення, тому що є фактор часу, тобто перебування в точці перетину БПЛА може бути у різні моменти часу (без зіткнень).

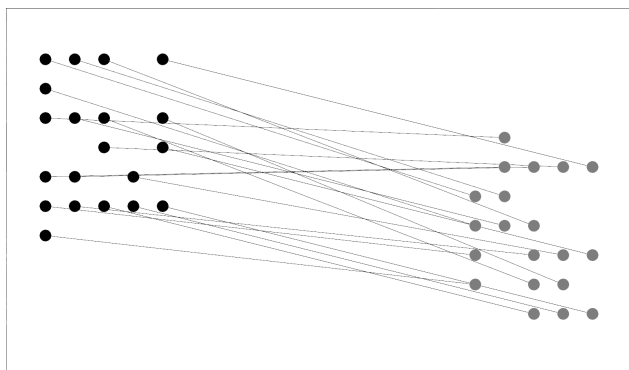


Рис. 10 – Траєкторії оптимальної перебудови групи з 20 БПЛА

За результатами моделювання встановлено, що в кожній реалізації зі 100 були колізії, пов'язані з ймовірністю зіткнень. Середня кількість колізій в реалізації склала близько 7. При цьому доля успішних реалізацій, коли алгоритм запобігання зіткнень відпрацював ефективно, становила 93% від загальної кількості експериментів. Запобігання зіткнень не суттєво підвищило загальну тривалість перебудови. Так, середня квазіоптимальна розрахункова тривалість перебудови без роботи алгоритму запобігання зіткнень становила 11,7 с, а збільшення фактичної тривалості перебудови внаслідок роботи алгоритму запобігання зіткнень у середньому склало 0,2 с.

Таким чином, результати статистичного моделювання демонструють досить високу ефективність алгоритму запобігання зіткнень. Але наявність нерозв'язаних випадків вимагає подальшого вдосконалення стратегії. Суттєво, що запропонований алгоритм майже не впливає на загальну тривалість перебудови групи БПЛА.

Висновки. Розглянуто задачу просторової реконфігурації великої групи БПЛА та запропоновано метод знаходження квазіоптимального плану, в якому

для кожного БПЛА вказані бажані кінцеві точки за умов найшвидшої реконфігурації усієї групи у цілому. На основі статистичного моделювання отримані показники ефективності метода, які за результатами наближають його до оптимального, але при суттєво меншій складності. Проведена апробація методу для конкретних умов реконфігурації великої кількості БПЛА. Наведено та досліджено алгоритм запобігання зіткнень при визначеній перебудові. Таким чином, зроблено наступний крок до створення комплексу методів та алгоритмів, які забезпечують ефективну групову поведінку групи БПЛА, у тому числі при високій її щільності, характерній для рою БПЛА.

Список літератури

1. Погудіна О., Методологія формування інтелектуальної складової агентної системи рою безпілотних літальних апаратів: монографія / О. К. Погудіна, Д. М. Крицький, А. М. Биков, Т. А. Пластун, М. В. Пивовар. // – Харків, 2021. – 211 с.
2. Uspenskiy V., Controlled Flight Model of Hybrid Multicopter for Computer Implementation / V. B. Uspenskiy, N. V. Shyriaieva // 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), pp. 1–7.
3. Uspenskiy V., Relative navigation of UaAV in a swarm / V. B. Uspenskiy, N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, pp. 1–5.
4. Uspenskiy V., Optimal Reconfiguration Planning for Large UAV Groups / V. B. Uspenskiy, N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE International Workshop on Technologies for Defense and Security (TechDefense), Rome, Italy, pp. 203–208.
5. Campion M., UAV swarm communication and control architectures: a review / M. Campion, P. Ranganathan, S. Faruque // Journal of Unmanned Vehicle Systems, 2018, 7(2), pp. 93–106.
6. Feng, Q., Resilience optimization for multi-UAV formation reconfiguration via enhanced pigeon-inspired optimization / Q. Feng, X. Hai, Bo. Sun, Yi. Ren, Z. Wang, D. Yang, Y. Hu, R. Feng // Chinese Journal of Aeronautics, 2022, volume 35, issue 1, pp. 110–123.
7. Wubben, J., Toward secure, efficient, and seamless reconfiguration of UAV swarm formations / J. Wubben, P. Aznar, F. Fabra, C. T. Calafate, J. C. Cano, P. Manzoni // 2020 IEEE/ACM 24th International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications (DS-RT), Prague, Czech Republic, 2020, pp. 1–7.
8. Liu, H., A Formation Reconfiguration Algorithm for Multi-UAVs Based on Distributed Cooperative Coevolutionary with an Adaptive Grouping Strategy / H. Liu, F. Liu, X. Zhang, X. Guan, J. Chen // Chinese Journal of Electronics, 2020, vol.29, no.5, pp.841–851.
9. Gao, C., Hybrid swarm intelligent algorithm for multi-UAV formation reconfiguration / C. Gao, J. Ma, T. Li et al. // Complex Intell. Syst., 2023, 9, pp. 1929–1962.
10. Zhen, X., Rotary unmanned aerial vehicles path planning in rough terrain based on multi-objective particle swarm optimization / X. Zhen, Z. Enze, C. Qingwei // Journal of Systems Engineering and Electronics, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 130–141.
11. Iqbal, M., Motion Planning of UAV Swarm: Recent Challenges and Approaches / Mubashir Iqbal, Muhammad, Zain Anwar Ali, Rehan Khan, and Muhammad Shafiq // Aeronautics – New Advances, 2022.
12. Chandran, N., Review on Type of Sensors and Detection Method of Anti-Collision System of Unmanned Aerial Vehicle / N. Chandran, M. Sultan, A. Lukaszewicz, F. Shahar, A. Holovaty, W. Giernacki // Sensors (Basel), 2023.
13. Sato, G., Collision Avoidance Method for Multirotor Small Unmanned Aircraft Systems in Multilateration Environments / G. Sato, H. Yokoi, D. Toratani, T. Koga // 2023 IEEE 15th International Symposium on Autonomous Decentralized System (ISADS), Mexico City, Mexico, 2023.
14. Fu, XiaoWei, Obstacle avoidance and collision avoidance of UAV swarm based on improved VFH algorithm and information sharing strategy / XiaoWei Fu, ChenYuan Zhi, Di Wu // Comput. Ind. Eng., 2024.

15. Xueqi, Gui, UAV Swarm Obstacle Avoidance Algorithm Based on Visual Field and Velocity Guidance / Gui Xueqi, Li Chuntao // Journal of System Simulation, 2024, 36(3), pp. 545-554.

References (transliterated)

1. Pogudina O., Methodology of formation of the intelligent component of the agent system of a swarm of unmanned aerial vehicles: monograph / O. K. Pogudina, D. M. Krytskyi, A. M. Bykov, T. A. Plastun, M. V. Pivovar. //– Kharkiv, 2021. – 211 p.
2. Uspenskyi V., Controlled Flight Model of Hybrid Multicopter for Computer Implementation / V. B. Uspenskyi, N. V. Shyriaieva // 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), pp. 1–7.
3. Uspenskyi V., Relative navigation of UaAV in a swarm / V.B. Uspenskyi N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, pp. 1-5.
4. Uspenskyi V., Optimal Reconfiguration Planning for Large UAV Groups / V. B. Uspenskyi, N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE International Workshop on Technologies for Defense and Security (TechDefense), Rome, Italy, 2023, pp. 203-208.
5. Campion M. UAV swarm communication and control architectures: a review / M. Campion, P. Ranganathan, S. Faruque // Journal of Unmanned Vehicle Systems, 2018, 7(2), pp. 93–106.
6. Feng Q., Resilience optimization for multi-UAV formation reconfiguration via enhanced pigeon-inspired optimization / Q. Feng, X. Hai, Bo Sun, Yi Ren, Z. Wang, D. Yang, Y. Hu, R. Feng // Chinese Journal of Aeronautics, 2022, volume 35, issue 1, pp. 110–123.
7. Wubben J., Toward secure, efficient, and seamless reconfiguration of UAV swarm formations / J. Wubben, P. Aznar, F. Fabra, C. T. Calafate, J.-C. Cano, P. Manzoni // 2020 IEEE/ACM 24th International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications (DS-RT), Prague, Czech Republic, 2020, pp. 1–7.
8. Liu H., A Formation Reconfiguration Algorithm for Multi-UAVs Based on Distributed Cooperative Coevolutionary with an Adaptive Grouping Strategy / H. Liu, F. Liu, X. Zhang, X. Guan, J. Chen // Chinese Journal of Electronics, 2020, vol.29, no.5, pp.841–851.
9. Gao, C., Hybrid swarm intelligent algorithm for multi-UAV formation reconfiguration / C. Gao, J. Ma, T. Li et al. // Complex Intell. Syst., 2023, 9, pp. 1929–1962.
10. Zhen X., Rotary unmanned aerial vehicles path planning in rough terrain based on multi-objective particle swarm optimization / X. Zhen, Z. Enze, C. Qingwei // Journal of Systems Engineering and Electronics, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 130-141.
11. Iqbal M., Motion Planning of UAV Swarm: Recent Challenges and Approaches / Mubashir Iqbal, Muhammad Zain Anwar Ali, Rehan Khan, and Muhammad Shafiq // Aeronautics – New Advances, 2022. IntechOpen. doi:10.5772/intechopen.106270.
12. Chandran N., Review on Type of Sensors and Detection Method of Anti-Collision System of Unmanned Aerial Vehicle / N. Chandran, M. Sultan, A. Lukaszewicz, F. Shahar, A. Holovatyy, W. Giernacki // Sensors (Basel), 2023.
13. Sato G., Collision Avoidance Method for Multirotor Small Unmanned Aircraft Systems in Multilateration Environments / G. Sato, H. Yokoi, D. Toratani, T. Koga // 2023 IEEE 15th International Symposium on Autonomous Decentralized System (ISADS), Mexico City, Mexico, 2023.
14. Fu XiaoWei, Obstacle avoidance and collision avoidance of UAV swarm based on improved VFH algorithm and information sharing strategy / XiaoWei Fu, ChenYuan Zhi, Di Wu // Comput. Ind. Eng., 2024.
15. Xueqi Gui, UAV Swarm Obstacle Avoidance Algorithm Based on Visual Field and Velocity Guidance / Gui Xueqi, Li Chuntao // Journal of System Simulation, 2024, 36(3), pp. 545-554.

Надійшло (received) 14.09.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Успенський Валерій Борисович (Uspenskyi Valerii) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", професор кафедри «Комп'ютерне моделювання процесів та систем»; м. Харків, Україна; тел.: (057)-707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5960-7347>; e-mail: Valerii.Uspenskyi@kpi.edu.ua

Добадайло Олександр Сергійович (Dohadailo Oleksandr) – Національний технічний університет "Харківський Політехнічний Інститут", аспірант кафедри «Комп'ютерне моделювання процесів та систем»; м. Харків, Україна; тел.: 098-396-25-81; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3954-1176>; e-mail: Oleksandr.Dohadailo@infiz.kpi.edu.ua

О. І. ТРУБАЄВ, А. О. ЛАРІН, Н. П. ПРИХОДЬКО

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ У ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТРУБИ

Труби широко використовуються у промислових та інженерних об'єктах, таких як нафтогазопроводи, водопостачання, системи опалення тощо, де важливим є визначення їхніх динамічних характеристик для забезпечення надійності та безпеки експлуатації. У зв'язку з цим, визначення власних частот коливань трубопроводів відіграє важливу роль у процесі їхнього проектування, монтажу та обслуговування. У статті використовуються різні типи скінчено-елементних моделей, включаючи стрижневі (Pipe), оболонкові (Shell) та твердотільні (Solid) які порівнюються з точки зору точності визначення власних частот, особливостей деформацій труби та обчислювальної ефективності. Окрім того, у дослідженні розглянуто варіанти реалізації різних граничних умов, таких як шарнірне та жорстке закріплення. Ці умови мають значний вплив на результати чисельного моделювання, оскільки неправильне їх задання може призвести до суттєвих похибок у визначенні частот коливань. Для забезпечення коректності результатів проведено детальний аналіз впливу способів моделювання кожного типу закріплення на динамічні характеристики трубопроводів. Дослідження показало, що стрижнева модель Pipe забезпечує найкраще наближення до аналітичного рішення, особливо при розрахунках для труб з простою геометрією та лінійними граничними умовами. Окрім того, у статті представлено результати аналізу форм власних коливань, які виявили певні особливості деформацій труби під впливом різних граничних умов. Отримані результати мають важливе значення для подальшого проектування та оцінки ресурсу трубопровідних систем у різних галузях промисловості, зокрема в енергетичній та нафтохімічній сферах. Розроблені чисельні моделі можуть бути використані для прогнозування поведінки труб при впливі різних зовнішніх навантажень. Це дозволить значно підвищити надійність систем і уникнути потенційних аварійних ситуацій, пов'язаних із вібраційними пошкодженнями. З огляду на отримані результати, автори рекомендують поєднувати чисельні методи моделювання з експериментальними дослідженнями, що дасть змогу підвищити точність розрахунків та зменшити можливі похибки. Це особливо важливо у випадках складних граничних умов або нетрадиційних конструкцій трубопроводів. Загалом, проведене дослідження підтверджує ефективність скінчено-елементних моделей для вирішення завдань моделювання динаміки трубопровідних систем і вказує на перспективи їхнього подальшого застосування в інженерній практиці.

Ключові слова: циліндрична труба, граничні умови, власні частоти та форми коливань, метод скінчених елементів, шарнірне та жорстке закріплення

О. TRUBAYEV, A. LARIN, N. PRYKHODKO

ON THE MODELING OF BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEM OF DETERMINING THE NATURAL FREQUENCIES OF A PIPE

Pipes are widely used in industrial and engineering systems, such as oil and gas pipelines, water supply, heating systems, and more, where determining their dynamic characteristics is crucial for ensuring operational reliability and safety. In this context, determining the natural frequencies of pipeline vibrations plays an important role in the design, installation, and maintenance of these systems. The article employs various types of finite element models, including beam (Pipe), shell (Shell), and solid (Solid) models, which are compared in terms of accuracy in determining natural frequencies, deformation characteristics of the pipe, and computational efficiency. Additionally, the study examines different implementations of boundary conditions, such as hinged and fixed supports. These conditions have a significant impact on the results of numerical modeling, as incorrect boundary condition assignments can lead to substantial errors in determining vibration frequencies. To ensure the accuracy of the results, a detailed analysis of the influence of modeling methods for each type of boundary condition on the dynamic characteristics of pipelines was conducted. The research revealed that the beam Pipe model provides the closest approximation to the analytical solution, particularly for pipes with simple geometry and linear boundary conditions. Furthermore, the article presents the results of an analysis of the modes of natural vibrations, which identified certain deformation characteristics of the pipe under the influence of various boundary conditions. The findings are of great importance for the further design and evaluation of pipeline systems in various industries, particularly in the energy and petrochemical sectors. The developed numerical models can be used to predict the behavior of pipes under various external loads. This will significantly enhance the reliability of systems and prevent potential emergency situations related to vibration damage. Based on the findings, the authors recommend combining numerical modeling methods with experimental studies to improve the accuracy of calculations and reduce potential errors. This is especially important in cases of complex boundary conditions or non-standard pipeline designs. Overall, the study confirms the effectiveness of finite element models for solving dynamic modeling tasks in pipeline systems and highlights the potential for their continued application in engineering practice.

Keywords: cylindrical tube, boundary conditions, natural frequencies and vibration modes, finite element method, hinge and rigid fixation.

Вступ. У світлі зростаючого інтересу до дослідження динамічних характеристик трубопроводів, особливо тих, які переносять рідину, визначення власних частот стає важливим аспектом для забезпечення їхньої надійності та ефективності експлуатації. Одним із ключових аспектів, який суттєво впливає на точність таких досліджень, є коректне моделювання граничних умов, що суттєво впливає на динамічні характеристики трубопроводу. Дана стаття присвячена аналізу та моделюванню різних варіантів задання граничних умов з метою визначення власних частот труби, що має особливе значення для трубопроводів, які використовуються в

промислових, морських та енергетичних конструкціях. Розглядаючи вплив різних граничних умов на динамічні характеристики трубопроводу, автори ставлять перед собою мету виявити ключові параметри, що впливають на власні частоти. Для досягнення цієї мети використовується метод скінчених елементів. Отримані результати мають практичне значення для проектування та експлуатації трубопровідних систем у різних галузях промисловості.

Автори статті [1] розглядали вібрації труби з кутовим з'єднанням та визначали власні частоти та форми коливань за допомогою числового дослідження

та експериментального модального аналізу. Результати показали можливість використання цих розрахунків для визначення динамічних характеристик труби. Ще однією значущою працею є дослідження [2]. Автори зосереджуються на вільних проміжках підводних трубопроводів, визначаючи їх вібраційні характеристики та допустиму довжину. Труба розглядалася як балка з трьома видами закріплень (жорстке на обох кінцях, шарнірне на обох кінцях та зі змішаним закріпленням). Через використання рівнянь коливань та параметрів управління, автори визначають вплив різних факторів, таких як швидкість потоку, осьова сила та розміри труби на власні частоти та допустиму довжину трубопроводу. Н. Yi-min та його співавтори дослідили власні частоти трубопроводу, який переносить рідину, з різними граничними умовами [3]. Вони для отримання значень власних частот використали метод Бубнова – Гальоркіна та визначили вплив різних умов на характеристики коливань. У роботі також встановлюється залежність частоти коливань трубопроводу від різних факторів, таких як маса, жорсткість, довжина труби, щільність рідини та швидкість потоку. Важливим є висновок, що зміни амплітуди залишаються невеликими у випадку вільного опирання. Важливим аспектом, розкритим у роботі [3], є також можливість ігнорування впливу сили інерції Коріоліса (похибка не перевищує 3%). Зазначено також залежність від демпфування частоти згасаючих коливань у трубопроводі, який переносить рідину. У статті [4] вивчаються вібраційні характеристики бурової труби під час установки підводного бурового устаткування. Верхня частина труби жорстко закріплена а нижня частина залишена вільною. Застосовуючи експериментальні та чисельні методи, автори визначають частоти та форми власних коливань, аналізують вплив різних параметрів, таких як довжина, діаметр, маса та граничні умови, на ці характеристики. Результати експериментів підтверджують високу точність чисельних розрахунків (середня похибка не перевищує 5%) та можливість їх використання для визначення власних частот труби в умовах встановлення підводного бурового устаткування. У роботі [5] вивчаються характеристики вібрацій трубопроводу, що переносить рідину. Використовуючи метод матриці передачі, автори аналізують вплив граничних умов та щільності рідини на частотний відгук трубопроводу. Результати показують, що граничні умови значно впливають на амплітуду вібраційного відгуку трубопроводу, а щільність рідини впливає на частоту вібрацій та амплітуду в повздовжньому напрямку. В роботі [6] за допомогою теорії Релея досліджується динаміка трубопроводів, що переносять рідину. Зокрема, вивчається вплив неklasичних граничних умов на власні частоти трубопроводу (у першому випадку лівий та правий кінці труби були закріплені торсіонними пружинами; у другому випадку труба була закріплена на лівому кінці, а правий кінець ковзав за допомогою торсійної пружини). Результати показують, що параметри, такі як масове

співвідношення та співвідношення пружності, впливають на частоту вібрацій. Робота [7] розглядає аналітичний підхід до розрахунку вібрацій труб з узагальненими граничними умовами на основі моделі Пастернака. Автори представляють аналітичне рішення для вібраційного відгуку структури, яка може містити конструкційні елементи, такі як опори, клапани та ін. Врахування цих елементів та параметрів основи суттєво впливає на власні частоти трубопроводу. Показано, що чим ближче вони до вузлів форм коливань, тим менше вони впливають на відповідні власні частоти. У дослідженні [8] вивчається нелінійна динаміка слабо зігнутих труб, які переносять рідину під впливом теплових навантажень, з використанням трьох типів закріплень (фіксоване на обох кінцях, шарнірне на обох кінцях та зі змішаним закріпленням). Результати показують, що геометрія труб та температурні фактори значно впливають на власні частоти системи. Результати свідчать про збільшення амплітуди коливань трубопроводу під впливом теплових навантажень. У роботі [9] автори зосереджуються на визначенні власних частот труб із різними геометріями та граничними умовами. Використовуючи чисельне моделювання в ANSYS та враховуючи реальні умови закріплення трубопроводу, автори вивели коригувальні коефіцієнти для аналітичних розрахунків. Це дозволяє полегшити розрахунки, не вдаючись до складного моделювання, що є актуальним у практичних застосуваннях. У статті [10] досліджено вплив потоку рідини на частоти вібрацій труб із різними матеріалами та умовами закріплення. Показано, що стійкість труб залежить від граничних умов, при цьому найвищу стійкість забезпечує жорстке закріплення на обох кінцях. У роботі [11] досліджували вплив гравітації та масових параметрів на власні частоти трубопроводів з рідиною, використовуючи метод слабкої квадрупольної форми. Також була підтверджена точність і швидкість збіжності методу.

Дослідження [12], сфокусоване на модальному аналізі легких труб із застосуванням методу скінченних елементів для різних матеріалів (сталь, PVC) та умов закріплення. Це дало можливість визначити власні частоти та оптимізувати використання матеріалу. Нарешті, робота [13] надає детальний аналітичний розгляд власних частот трубопроводів, що переносять рідину, за допомогою методу Мюллера, підтверджуючи аналітичні результати експериментальними даними. Ці праці підкреслюють важливість урахування граничних умов та геометричних параметрів при аналізі динамічних характеристик трубопровідних систем.

Огляд літератури з вивчення динаміки трубопроводів, що переносять рідину, показує наявність різноманітних підходів та методів дослідження. Вказані дослідження демонструють важливість правильного моделювання граничних умов для визначення власних частот труб та їх динамічних характеристик. Отримані результати можуть мати значення для практичного застосування у проектуванні та експлуатації

трубопроводних систем в різних сферах промисловості. В цих роботах досліджується вплив різних факторів, таких як граничні умови, геометрія труб, температурні навантаження та властивості рідини, на динаміку трубопроводів. В той же час питання моделювання граничних умов не було розглянуто у вищезазначених дослідженнях. Такі дослідження дуже важливі для прогнозування ресурсу та оптимізації роботи трубопроводних систем.

1. Постановка задачі. Ставиться задача аналізу впливу способів моделювання граничних умов на частоти та форми власних коливань фрагментів трубопроводів. У представленому дослідженні розглядається прямолинійна циліндрична труба довжиною 5 м, внутрішнім діаметром 100 мм та товщиною стінки 5 мм. Для скінчено-елементного аналізу використані різні типи моделей: стрижневі (Pipe), оболонкові (Shell) та твердотільні (Solid). Використовувались такі варіанти реалізації умов шарнірного та жорсткого закріплення: в двох точках (вздовж горизонтальної осі), в чотирьох точках (вздовж горизонтальної та вертикальної осей), по лінії серединної поверхні труби (кільце) для моделі Shell та по торцевій поверхні для Solid. Було також побудовано геометричну модель труби довжиною 6 м, для моделювання жорсткого закріплення по частині зовнішньої поверхні труби довжиною по 0,5 м з кожного краю. Це закріплення в подальшому буде називатися затисканням. Для

шарнірного закріплення був заборонений рух вздовж всіх осей та поворот відносно осі труби. Деякі варіанти закріплення показані на рис. 1.

2. Аналітичне рішення. Результати, отримані МСЕ, зіставлялися з аналітичним рішенням, що відповідає звичайній балочній теорії. Власні частоти для балки при різних умовах закріплення можна визначити за формулою [14]

$$p_k = \frac{(\alpha l_k)^2}{l^2} * \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (1)$$

Тут l – довжина стрижня, EI – жорсткість на згин, де $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль пружності, $I = 2,28 \cdot 10^{-6}$ м⁴ – момент інерції поперечного перерізу, $\mu = 12,86$ кг/м – погонна маса, $\rho = 7800$ кг/м³ – густина, αl_k – корені частотного рівняння, які залежать від способу закріплення. Так для жорсткого закріплення $\alpha l_k = \pi(2k+1)/2$, а для шарнірного $\alpha l_k = \pi k$, де k – номер частоти.

3. Чисельні дослідження.

3.1. Перше дослідження. Результати, отримані за стрижневою моделлю Pipe показали, що ця модель при визначенні перших п'яти частот згінних коливань забезпечує похибку в межах 3% для шарнірного закріплення та в межах 7% для жорсткого закріплення (табл. 1). При цьому форми коливань відповідають звичайній балочній теорії і тут не наводяться.

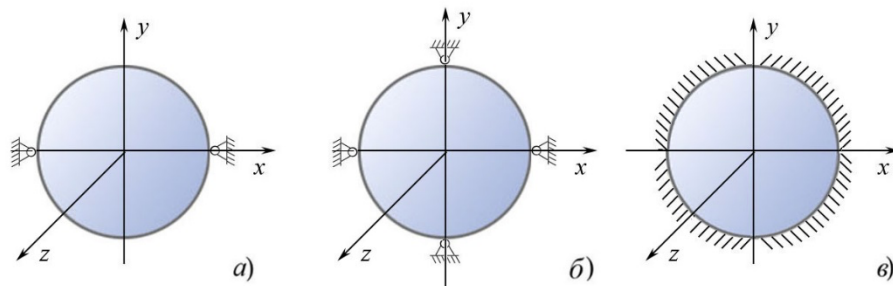


Рис. 1 - Деякі варіанти закріплення труби: а) шарнірне за двома точками; б) шарнірне за чотирма точками; в) жорстке по торцевому кільцю

Таблиця 1. – Власні частоти згінних коливань труби (Гц), отримані за моделлю Pipe та похибка відносно аналітичного рішення (%)

№ частоти	Шарнірне закріплення		Жорстке закріплення	
	Аналітичне рішення	Чисельне рішення	Аналітичне рішення	Чисельне рішення
1	12,12	12,13 (0,04 %)	27,28	27,43 (0,5%)
2	48,49	48,67 (0,37%)	75,73	75,74 (0,01%)
3	109,1	110,1 (0,9%)	148,5	149,0 (0,3%)
4	193,0	197,2 (2,2%)	231,2	247,7 (7,1%)
5	303,1	311,0 (2,6%)	366,7	372,8 (1,7%)

3.2. Друге дослідження проводилось для шарнірно закріпленої труби в двох точках. При цьому використовувались моделі Shell та Solid. Проведено порівняння з аналітичним рішенням для шарнірно закріпленого стрижня. Для інших варіантів реалізації граничних умов таке порівняння є недоречним, бо результати суттєво відрізняються від аналітичного рішення. У табл. 2 наведені власні частоти коливань шарнірно закріпленої труби (Гц), отримані за моделями Shell та Solid

З результатів цього дослідження (табл.2) можна побачити що для значень перших трьох частот похибка не перевищує 5%. Це підтверджує висновки, зроблені в статті [11], що базуються на експериментальних дослідженнях. Модель Solid дає значення частот трошки нижчі ніж аналітичне рішення, а модель Shell – навпаки дає вищі значення. Форми власних коливань отримані за моделлю Solid, що відповідають згину, наведені на рис. 2. На п'ятій формі згинних коливань відбувається деформування в площині, яка розташована вздовж осі z , та повернута відносно осі y на кут в 45 градусів. На цій формі присутні також ознаки оболонкових деформацій. Проте, слід зауважити, що у спектр згинних коливань вклинюється частота №9, що відповідає коливанням труби, як оболонки, так звана «**оболонкова форма**» коливань (рис. 2). Тут також присутні ознаки повороту площини згинних деформацій та можна стверджувати, що мають місце складні згинно-оболонкові коливання.

Таблиця 2. - Власні частоти за номером у загальному спектрі та у спектрі згинних коливань в площині yz (в дужках) для шарнірно закріплення та похибка відносно аналітичного рішення.

№ частоти	Аналітичне рішення	Shell	Solid
1 (1)	12,12	12,60 (4,0%)	11,78 (2,8%)
3 (2)	48,49	50,60 (4,3%)	46,91 (3,6%)
5 (3)	109,1	109,5 (0,37%)	104,7 (4,0%)
7 (4)	194,0	135,8 (оболонкова)	184,2 (5,0%)
9 (оболонкова)	-	216,9	278,5
10 (5)	303,1	334,2 (10,3%)	284,4 (6,2%)

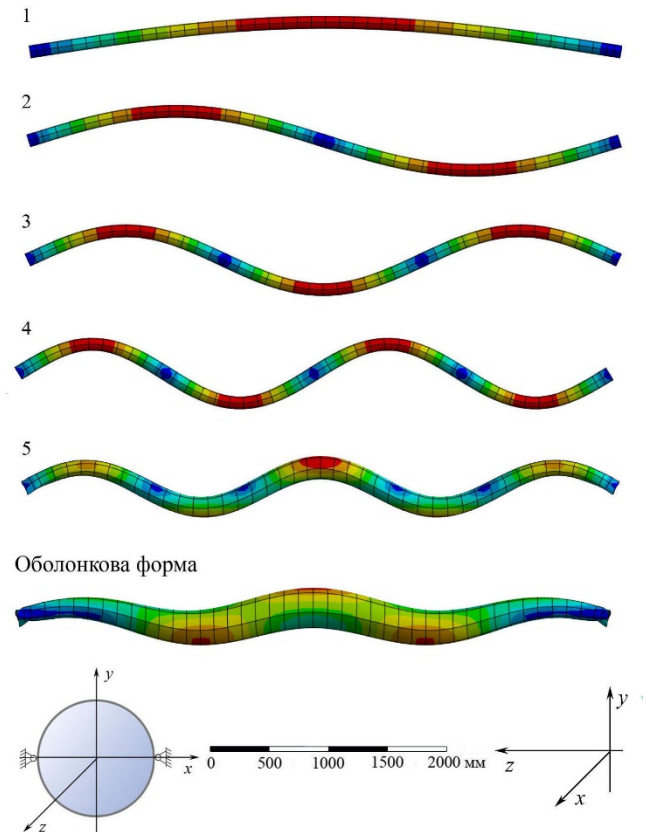


Рис. 2. Форми коливань при шарнірному закріпленні труби по краях за двома точками (модель Solid, див. табл. 2)

3.3. Третє дослідження проводилось для варіанту жорсткого закріплення труби за моделями Shell та Solid, а також шарнірного закріплення по серединній лінії.

З табл. 3 можна побачити що результати, отримані за моделлю Shell, є найбільш наближеними до аналітичного рішення якщо закріплення здійснюється за 4 точками (за винятком першої частоти). Похибка для перших трьох частот згинних коливань при закріпленні по серединній лінії змінюється у межах 9%. Результати, отримані за моделлю Solid, є найбільш наближеними до аналітичного рішення якщо закріплення здійснюється по торцевій або частині зовнішньої поверхні (затисканні). Для перших чотирьох частот згинних коливань у площині yz жорстко закріпленої труби похибка змінюється у межах 5%. Закріплення шарнірне чи жорстке по серединній лінії дає приблизно однакові результати близькі до аналітичного рішення для жорсткого закріплення. Закріплення шарнірне чи жорстке за чотирма точками дає також результати, які мають приблизно однакову похибку відносно аналітичного рішення для жорсткого закріплення. Форми коливань, отримані при жорсткому закріпленні труби по краях за торцевою поверхнею (модель Solid), показані на рис. 3. Серед них є класична оболонкова, яка не має ознак деформацій згину (частота 314,0 Гц). При цьому варіанті закріплення в нижній частині спектру частоти розпадаються на ті, що відповідають згинним та

оболонковим деформаціям. При закріпленні за чотирма точками було також зафіксовано оболонкову

форму, яка має одночасно ознаки і деформацій згину (частота №9 – 307,0 Гц, див. рис. 4).

Таблиця 3. - Власні частоти для жорсткого та шарнірного закріплення труби (Гц) та похибка відносно аналітичного рішення

№ частоти	Аналітичне рішення	Результати для моделі Shell			Результати для моделі Solid			
		4 точки (жорстке)	Закріплення по серединній лінії		4 точки		Закріплення по торцевій поверхні	Затискання
			(шарнір)	(жорстке)	(шарнір)	(жорстке)		
1 (1)	27,28	24,22 (11,2%)	28,76 (5,4%)	28,76 (5,4%)	23,75 (12,9%)	23,69 (13,2%)	26,64 (2,3%)	26,58 (2,6%)
3 (2)	75,73	74,77 (1,3%)	80,62 (6,5%)	80,71 (6,6%)	65,74 (13,2%)	65,62 (13,3%)	72,80 (3,9%)	72,65 (4,1%)
5 (3)	148,5	141,4 (4,8%)	162,3 (9,3%)	162,3 (9,3%)	128,9 (13,2%)	128,7 (13,3%)	141,1 (4,8%)	140,8 (5,2%)
7 (4)	231,2	258,6 (11,8%)	278,0 (20,2%)	278,5 (20,5%)	212,2 (8,2%)	212,0 (8,3%)	230,1 (0,5%)	229,7 (0,6%)
9 (оболонкова)	-	319,0	322,2	322,2	309,6	307,0	314,0	313,8
10 (5)	366,7	386,9 (5,5%)	434,9 (18,6%)	435,0 (18,6%)	314,8 (14,1%)	314,5 (14,2%)	338,3 (7,7%)	337,7 (7,9%)

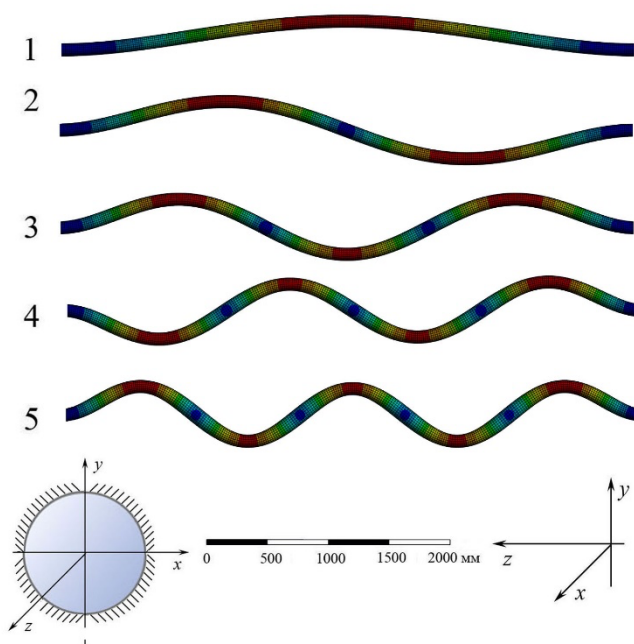


Рис. 3 - Форми коливань при жорсткому закріпленні труби по краях за торцевою поверхнею (модель Solid, див. табл. 2)

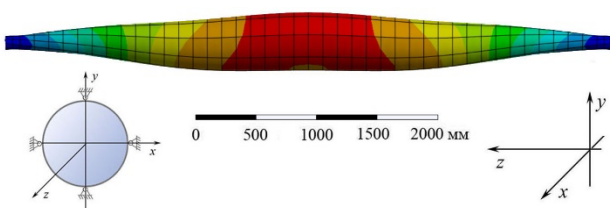


Рис. 4. - Форма коливань №9 при жорсткому закріпленні труби по краях за чотирма точками (модель Solid, див. табл. 3)

3.4. Досліджено збіжність результатів, отриманих за моделями Shell та Solid при закріпленні по двом точкам (див. табл. 4). З результатів табл. 4 видно, що моделі Solid, які містять 300–1500, та моделі Shell, які містять 400 елементів є адекватними. Для частот, які відповідають оболонковим формам збіжність не досліджувалась.

З наведених результатів видно, що у частотному діапазоні труби є значення, які відповідають оболонковим формам коливань. При цьому вони у спектрі частот мають менші значення, ніж при інших варіантах реалізації граничних умов. Значення частот, у яких починають проявлятися оболонкові властивості труби залежить також від її товщини [15].

Висновки. Проведено моделювання різних способів задання граничних умов з метою визначення власних частот циліндричної труби. Для шарнірного закріплення за моделями Shell та Solid найкращим варіантом граничних умов, що дозволяє наблизитися до аналітичних результатів, є закріплення на кожному краю труби у двох точках, через які проходить нейтральна лінія поперечного перерізу труби при згині. Для жорсткого закріплення результати, отримані за моделлю Shell, найближчі до аналітичного рішення, якщо закріплення здійснюється за чотирма точками. Для моделі Solid найбільш ефективним є закріплення по торцевій або частині зовнішньої поверхні труби (затискання). Аналіз форм власних

коливань показав, що при різних варіантах закріплення циліндричної труби виникають форми коливань, пов'язані з деформуванням труби як оболонки. Наявність таких форм коливань необхідно враховувати при проектуванні роторів, виконаних на основі оболонок. Оцінка збіжності отриманих результатів підтвердила адекватність скінчено-елементних моделей. З точки зору точності моделювання, отримані результати показали, що модель Ріре забезпечує похибку в межах 3% для шарнірного закріплення і до 7% для жорсткого закріплення. Моделі Shell і Solid демонструють похибки не більше 5-9%, залежно від граничних умов. Ці похибки є допустимими для більшості практичних

завдань, особливо на етапах проектування та оцінки динамічних характеристик трубопровідних систем. Запропоновані методи моделювання можуть бути використані для аналізу власних частот трубопровідних систем з достатньою точністю та збіжністю з аналітичними рішеннями, що дозволяє прогнозувати поведінку труб у реальних умовах експлуатації. Отримані результати вимагають додаткових досліджень, особливо при визначенні власних частот трубопровідних систем у реальних умовах закріплення, де експериментальні методи повинні обов'язково доповнювати чисельні розрахунки.

Таблиця 4. - Вплив числа елементів на точність розрахунків частот (Гц), отриманих за моделями Solid та Shell при шарнірному закріпленні по двох точках.

№ частоти	Аналітичне рішення	Результати для моделі Shell		Результати для моделі Solid	
		384 вузли (360 елементів)	1488 вузлів (1440 елементів)	2324 вузлів (264 елементи)	13 378 вузлів (1616 елементів)
1	12,12	12,60 (4%)	12,60 (4%)	11,80 (2,6%)	11,80 (2,6%)
2 (3)	48,49	50,60 (4,3%)	49,61 (2,3%)	46,91 (3,6%)	46,96 (3,2%)
3 (5)	109,1	109,5 (0,37%)	91,83 (оболонкова)	104,7 (4%)	104,8 (3,9%)
4 (7)	193,0	135,8 (оболонкова)	117,0 (оболонкова)	184,2 (5,0%)	184,3 (4,5%)
5 (9)	303,1	216,9 (оболонкова)	197,6 (оболонкова)	278,5 (оболонкова)	240,0 (оболонкова)

Список літератури

1. Carneiro, J. O. & Melo, Francisco & Rodrigues, J. & Lopes, H. & Teixeira, Vasco. (2005). The modal analysis of a pipe elbow with realistic boundary conditions. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 82. 593–601. 10.1016/j.ijpvp.2005.04.001.
2. Zhang, Bo & Xing, Ze-Yang & Wang, Tao & Wang, Zhuo. (2017). The Vibration Characteristics and Allowable Span Length of Free Span Submarine Pipeline. 10.2991/mme-16.2017.24.
3. Huang Yi-min, Liu Yong-shou, Li Bao-hui, Li Yan-jiang, Yue Zhu-feng. Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions, *Nuclear Engineering and Design*, Volume 240, Issue 3, 2010, Pages 461-467, ISSN 0029-5493. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.11.038>.
4. Xiao, Wensheng & Qin, Haozhi & Liu, Jian & Liu, Qi & Cui, Junguo & Wang, Fengde. (2020). Natural Frequencies and Mode Shapes of Drill Pipe in Subsea Xmas Tree Installation. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020. 1-17. 10.1155/2020/5634194.
5. Jun Long et al. 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1985 012074 <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1985/1/012074>
6. Begum Yurdanur Dagli, Abdulkarim Ergut, Dynamics of fluid conveying pipes using Rayleigh theory under non-classical boundary conditions, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Volume 77, 2019, Pages 125-134, ISSN 0997-7546, <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2019.05.001>.
7. M. Li, X. C. Chen, X. P. Chang, Y. Qin, Y. H. Li, General analytical solution for vibrations of pipes with arbitrary discontinuities and generalized boundary condition on Pasternak foundation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 162, 2022, 107910, ISSN 0888-3270, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107910>.
8. Akintoye O. Oyelade, Ayo A. Oyediran, The effect of various boundary conditions on the nonlinear dynamics of slightly curved pipes under thermal loading, *Applied Mathematical Modelling* (2020), doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.019>

9. Noor Fariza Saari, Azma Putra, Irianto, Reduan Mat Dan, Muhammad Agus Zeli, Roszaidi Ramlan, Nawal Aswan Abdul Jalil, Safarudin Herawan, Estimating natural frequency of pipe with various geometries: Improvement of frequency factors, *Heliyon*, Volume 10, Issue 4, 2024, e26148, ISSN 2405-8440, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e26148>.
10. Dangal, Manoj & Ghimire, Subodh. (2020). Modeling and Analysis of Flow Induced Vibration in Pipes Using Finite Element Approach.
11. Shui, Bo & Li, Yun-dong & Luo, Yu-mei & Luo, Fei. (2023). Free vibration analysis of Timoshenko pipes conveying fluid with gravity and different boundary conditions. *Journal of Mechanics*. 39. 10.1093/jom/ufad031.
12. Berkay E, Bekir Y. A finite element study on modal analysis of lightweight pipes. *Sigma J Eng Nat Sci* 2021;39(3):268–278.
13. Sutar, Shankarachar & Madabhushi, Radhakrishna & Chellapilla, Kameswararao Chellapilla & Babu, P. (2018). Determination of Natural Frequencies of Fluid Conveying Pipes using Muller's Method. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*. 100. 10.1007/s40032-018-0446-6.
14. Timoshenko S. P., Young D. H., W. Weaver Jr. Vibration problems in engineering (Fourth Edition). JOHN, WILEY & SONS New York. 468 pp. Digitized by the Internet Archive in 2022 with binding from Kahle/Austin Foundation https://archive.org/details/vibrationproblem0000timo_g3q2/page/n7/mode/2up
15. Трубаев О. І. Про моделювання граничних умов для визначення критичних швидкостей обертання роторів / О. І. Трубаев, А. О. Ларін // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер. : Динаміка і міцність машин = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser. : Dynamics and Strength of Machines : зб. наук. пр. – Харків : НТУ "ХПІ", 2022. – № 2. – С. 56-60, doi: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.2.270867>

Reference list

1. Carneiro J. O., Francisco Melo, J. Rodrigues, H. Lopes, and Vasco Teixeira. "The Modal Analysis of a Pipe Elbow with Realistic

- Boundary Conditions." *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 82, 2005, pp. 593–601. doi:10.1016/j.ijpvp.2005.04.001.Zhang,
2. Zhang Bo, Ze-Yang Xing, Tao Wang, and Zhuo Wang. "The Vibration Characteristics and Allowable Span Length of Free Span Submarine Pipeline." *Proceedings of the International Conference on Manufacturing Materials and Energy*, 2017, doi:10.2991/mme-16.2017.24.
 3. Huang Yi-min, Yong-shou Liu, Bao-hui Li, Yan-jiang Li, and Zhu-feng Yue. "Natural Frequency Analysis of Fluid Conveying Pipeline with Different Boundary Conditions." *Nuclear Engineering and Design*, vol. 240, no. 3, 2010, pp. 461–467. doi:10.1016/j.nucengdes.2009.11.038..
 4. Xiao Wensheng, Haozhi Qin, Jian Liu, Qi Liu, Junguo Cui, and Fengde Wang. "Natural Frequencies and Mode Shapes of Drill Pipe in Subsea Xmas Tree Installation." *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, pp. 1–17. doi:10.1155/2020/5634194.
 5. Jun Long, et al. "Modal Analysis of Drill String in Well Engineering." *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1985, 2021, p. 012074. doi:10.1088/1742-6596/1985/1/012074.
 6. Dagli Begum Yurdanur, and Abdulkarim Ergut. "Dynamics of Fluid Conveying Pipes Using Rayleigh Theory Under Non-Classical Boundary Conditions." *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 77, 2019, pp. 125–134. doi:10.1016/j.euromechflu.2019.05.001.
 7. Li M., X. C. Chen, X. P. Chang, Y. Qin, and Y. H. Li. "General Analytical Solution for Vibrations of Pipes with Arbitrary Discontinuities and Generalized Boundary Condition on Pasternak Foundation." *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 162, 2022, p. 107910. doi:10.1016/j.ymssp.2021.107910.
 8. Oyelade Akintoye O., and Ayo A. Oyediran. "The Effect of Various Boundary Conditions on the Nonlinear Dynamics of Slightly Curved Pipes under Thermal Loading." *Applied Mathematical Modelling*, 2020. doi:10.1016/j.apm.2020.06.019.
 9. Saari Noor Fariza, Azma Putra, Irianto, Reduan Mat Dan, Muhammad Agus Zeli, Roszaidi Ramlan, Nawal Aswan Abdul Jalil, and Safarudin Herawan. "Estimating Natural Frequency of Pipe with Various Geometries: Improvement of Frequency Factors." *Heliyon*, vol. 10, no. 4, 2024, e26148. doi:10.1016/j.heliyon.2024.e26148.
 10. Danggal Manoj, and Subodh Ghimire. "Modeling and Analysis of Flow Induced Vibration in Pipes Using Finite Element Approach." *Proceedings of the Conference on Structural Dynamics*, 2020.
 11. Shui Bo, Yun-dong Li, Yu-mei Luo, and Fei Luo. "Free Vibration Analysis of Timoshenko Pipes Conveying Fluid with Gravity and Different Boundary Conditions." *Journal of Mechanics*, vol. 39, 2023. doi:10.1093/jom/ufad031.
 12. Berkay E., and Bekir Y. "A Finite Element Study on Modal Analysis of Lightweight Pipes." *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, vol. 39, no. 3, 2021, pp. 268–278.
 13. Sutar Shankarachar, Radhakrishna Madabhushi, Kameswararao Chellapilla, and P. Babu. "Determination of Natural Frequencies of Fluid Conveying Pipes Using Muller's Method." *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, vol. 100, 2018. doi:10.1007/s40032-018-0446-6.
 14. Timoshenko S. P., D. H. Young, and W. Weaver Jr. *Vibration Problems in Engineering*. 4th ed., John Wiley & Sons, 2022, Internet. https://archive.org/details/vibrationproblem0000timo_g3q2.
 15. Trubayev O. I., Larin A. O. "Pro Modelyuvannya Hranichnykh Umov dlya Vyznachennya Krytychnykh Shvydkostey Obertyannya Rotoriv." *Visnyk Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu "KhPI". Seriya: Dynamika i Mitsnist Mashyn*, no. 2, 2022, pp. 56–60. doi:10.20998/2078-9130.2022.2.270867.

Надійшло (received) 18.06.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Трубаєв Олександр Іванович (Trubayev Oleksandr) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7318-6526>; e-mail: trubayev@gmail.com

Ларін Андрій Олексійович (Larin Andrew) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри українознавства, культурології та історії науки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-29; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1274-4333>; e-mail: professorlarin@gmail.com

Приходько Назар Павлович (Prykhodko Nazar) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; тел.: (093) 602-90-31; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-9036-277X>; e-mail: prihodkonazar198@gmail.com

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, О. О. БРОВАРНИК

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ЗВАЖЕНИХ ВІДХИЛІВ У ФОРМІ МСЕ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДВОВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Статтю присвячено опису методу двовимірної апроксимації даних за допомогою алгоритмів методу зважених відхилів з кусково заданими базисними функціями у реалізації методу скінченних елементів. Надано математичну постановку задачі та основні співвідношення методу для двовимірних областей. До моделювання залучено трикутний скінченний елемент. Наведено інформацію щодо розробленої за алгоритмами даного методу програми, результатом роботи якої є виділення областей двовимірної фігури з заданими значеннями параметрів, що аналізуються. З використанням випадково розподілених координат виконано верифікацію результатів для різних наборів даних та отримано задовільну відповідність апроксимованих та вхідних даних. Для створення бази даних, які заплановано до обробки шляхом апроксимації, розроблено додаткове програмне забезпечення, що включає програми, написані мовою Python, та вебзастосунок, створений за допомогою фреймворку Laravel мовою PHP. Для реалізації завдань роботи використано бібліотеки PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup та систему управління базами даних PostgreSQL. Описано алгоритми роботи розробленого програмного забезпечення. Надано приклад відтворення місць розташування міст на мапі України. Розроблену програму двовимірної апроксимації було застосовано до аналізу просторово-часової динаміки виникнення міст на території України. Як приклад, розглянуто дані з заснування міст у період з 800 по 1200рр. від РХ та визначено основні урбанізовані на той час регіони. Результати даної скінченноелементної апроксимації отримано з метою підготовки даних для подальшого моделювання соціодинамічних процесів на території України. Отримані результати у вигляді координат границь регіонів, що мали високий рівень урбанізованості, можуть бути використані у різних наукових дослідженнях, в першу чергу в історичних науках.

Ключові слова: апроксимація, двовимірні розподіли, метод скінченних елементів, програма, вебзастосунок, база соціодинамічних даних.

D. BRESLAVSKY, O. BROVARNYK

USING THE METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS IN THE FEM FORM FOR THE APPROXIMATION OF TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS

The paper is devoted to the description of the method of two-dimensional approximation of data using algorithms of the method of weighted residuals with piecewise specified basis functions in the implementation of the Finite Elements Method. The mathematical formulation of the problem and the main relations of the method for two-dimensional regions are provided. A triangular finite element is involved in the simulation. Information is given about the program developed according to the algorithms of this method, the result of which is the selection of regions of a two-dimensional figure with the specified values of the analyzed parameters. By use of randomly distributed coordinates, the verification of the results for different data sets was performed and a satisfactory correspondence of the approximated and input data was obtained. Additional software, including programs written in Python and a web application created using the Laravel framework in PHP, has been developed to create a database that is scheduled to be processed by approximation. The PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup libraries and the PostgreSQL database management system were used to implement the project tasks. Algorithms of the developed software are described. An example of the reproduction of the locations of cities on the map of Ukraine is provided. The developed program of two-dimensional approximation was applied to the analysis of spatio-temporal dynamics of the emergence of cities on the territory of Ukraine. As an example, data on the founding of cities in the period from 800 to 1200 AD were considered and the main urbanized regions at that time were determined. The results of this Finite Element approximation were obtained for the purpose of preparing data for further modeling of sociodynamic processes in the terrain of Ukraine. The obtained results in the form of coordinates of the borders of regions that had a high level of urbanization can be used in various scientific studies, primarily in historical sciences.

Key words: approximation, two-dimensional distributions, Finite Element method, software, web application, sociodynamic data base.

Вступ. Представлення даних двовимірних розподілів останнім часом стає досить розповсюдженим завданням, потреби у ньому виникають безпосередньо в інформаційних технологіях та у природничих, соціальних, технічних науках [1-4]. Безперечно, основою методологій при цьому є використання класичних математичних методів апроксимації та наближення функцій, представлених просторовими розподілами [5-8]. Але, на жаль, у більшості випадків вони оперують з канонічними областями визначення на кшталт прямокутних, колових об'єктів або подібних до них.

Між іншим, на практиці у більшості випадків є необхідним візуалізація даних саме для областей складної геометрії, які представляють реальні об'єкти. У зв'язку з цим є цілком доречним використання підходів методів зважених відхилів у формі методу скінченних елементів (МСЕ) [9; 10] для апроксимації функцій у таких областях складної геометрії. Такі

задачі все частіше розв'язуються останнім часом.

Стійкість та збіжність схем двовимірної апроксимації розглянуто у роботі [11]. Введено скінченно-елементну дискретизацію ітераційного алгоритму та показано її стійкість і збіжність на використаних триангуляціях. Запропоновано апостеріорний критерій, що дозволяє контролювати достатні умови для слабкої збіжності на загальних триангуляціях і для адаптивного уточнення сітки.

В роботі [12] обговорюється методологія побудови узагальнених функцій форми типу функцій Лагранжа для скінченних елементів (СЕ), визначених на неструктурованих сітках. Для побудови розбиття області використовуються R-функції. Запропонована методологія дозволяє використовувати узагальнені функції форми у частинах області визначення, де потрібна їхня висока гладкість. Досліджено інтегровність функцій за стандартними правилами Гауса–Лежандра.

Просторово-часову інтерполяцію географічних даних виконано у роботі [2]. Застосовано як 2D, так і 3D функції форми для просторової інтерполяції. Розробляються нові 4D функції форми для спільної просторової (3D) та часової інтерполяції (1D) даних. Критерії порівняння з використанням різних наборів даних включають точність інтерполяції, схильність до помилок агрегування часу, тип обмежень, що використовуються в представленні інтерпольованих даних тощо.

Авторами [13] стверджується, що правильний підхід до отримання хорошої апроксимації полягає у застосуванні спочатку процесу сегментації для точного визначення розташування великих варіацій даних, а потім у використанні техніки дискретної апроксимації. Для виконання сегментації запропоновано квазіавтоматичний алгоритм, що використовує метод набору рівнів для отримання з заданих (за сіткою або розсіяних) даних, розділених великими градієнтами (або розломами). Далі генерується трикутна скінченноелементна сітка, що враховує ідентифікований набір розривів, на якій будуватиметься апроксимація за допомогою сплайнів.

Таким чином, досвід використання методу зважених відхилів у формі МСЕ дозволяє його застосування в задачах апроксимації розподілів функцій, заданих на двовимірних областях складної геометрії. Використання при цьому трикутних скінченних елементів [9] дозволяє ефективно виконувати апроксимацію без зайвих витрат оперативної пам'яті.

Постановка задачі. Метою роботи є розробка алгоритмічного та програмного забезпечення для апроксимації двовимірних розподілів на основі використання МСЕ.

Основні етапи роботи включають математичне формулювання задачі, отримання на основі відомих співвідношень МСЕ основних формулювань методу, реалізованого в алгоритмічному та програмному забезпеченні, проведення тестових розрахунків. Додаткові задачі включають розробку вебзастосунку для збирання даних часової зміни урбаністичної ситуації, яку обрано як приклад демонстрації роботи програми двовимірної апроксимації, та програми для відображення на мапі місць розташування населених пунктів.

Математичне формулювання задачі. Виконати кускову апроксимацію деякої функції φ , заданої в R^2 в області визначення Ω набором N точок з координатами x_i , $i=1,2$. Область визначення обмежено замкнутою кривою Γ . Використовуємо декартову систему координат. Під кусковою апроксимацію будемо розуміти визначення підобластей Ω^β області Ω , в яких існують ненульові значення функції $\varphi(x_i)$, з визначенням інтенсивності їхнього представлення. Тут $j=1, N$.

Метод апроксимації. Як метод апроксимації функції, заданої у двовимірній області, метод зважених відхилів [9]. Згідно його підходів представимо наближене, апроксимоване значення

функції $\varphi(x_i)$, $i=1,2$, у вигляді розвинень за лінійно незалежними базисними функціями $N_k(x_1, x_2)$ в області визначення Ω :

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{k=1}^n a_k N_k(x_1, x_2), \quad (1)$$

де a_k є невідомими параметрами, що потребують визначення, ($k=1..n$; n – число членів ряду (1)).

Згідно з підходами МСЕ [9] представимо область Ω визначення невідомої функції $\varphi(x_i)$ як сукупність підобластей Ω^β (вони мають назву скінченних елементів) у вигляді (2):

$$\Omega = \sum_{\beta}^{Ne} \Omega^\beta, \quad (2)$$

де N_e – загальна кількість підобластей-скінченних елементів з номером β .

Границя області визначення Γ є представленою сукупністю частин границь скінченних елементів Γ^β (3), які своїми боками виходять на Γ :

$$\Gamma = \sum_{\beta}^{Ne} \Gamma^\beta. \quad (3)$$

Апроксимація $\hat{\varphi}$ будуватиметься кусковим чином, на кожній підобласті – скінченному елементі, при цьому використані при апроксимації базисні функції також задаються кусково, на скінченних елементах. Базові співвідношення методу зважених відхилів [9] представляються співвідношеннями (4) та (5):

$$\int_{\Omega} N_l R_{\Omega} d\Omega = \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Omega^\beta} N_l^{\beta} R_{\Omega^\beta} d\Omega^{\beta}, \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma} N_l R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Gamma^\beta} N_l^{\beta} R_{\Gamma^\beta} d\Gamma^{\beta}. \quad (5)$$

У співвідношеннях (4) та (5) позначено $R_{\Omega} = (\varphi - \hat{\varphi})_{\Omega}$ – відхил за областю визначення Ω ; $R_{\Gamma} = (\varphi - \hat{\varphi})_{\Gamma}$ – відхил за границею Γ . Згідно з використаним підходом Гальоркіна як вагові функції також використовуються базисні.

Вимоги мінімізації функції відхилів за всією областю Ω та границею Γ призводять до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Omega^\beta} N_l^{\beta} R_{\Omega^\beta} d\Omega^{\beta} + \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Gamma^\beta} N_l^{\beta} R_{\Gamma^\beta} d\Gamma^{\beta} = 0. \quad (6)$$

СЛАР (6) можливо представити наступним чином:

$$[K^{\beta}] \{a^{\beta}\} = \{f^{\beta}\}. \quad (7)$$

У СЛАР (7) $\{a\}$ є вектором невідомих системи, розмірність якого в теорії МСЕ визначено кількістю

вузлів моделі. Компоненти матриці СЛАР (l - номер рядку, m - номер стовпця) для окремого скінченного елемента визначаються виразом (8):

$$K_{lm}^{\beta} = \int_{\Omega^{\beta}} N_l^{\beta} N_m^{\beta} d\Omega^{\beta}. \quad (8)$$

Компоненти вектору правих частин обчислюються за співвідношенням (9):

$$f_l^{\beta} = \int_{\Omega^{\beta}} N_l^{\beta} \varphi^{\beta} d\Omega^{\beta}. \quad (9)$$

Тут φ^{β} є відомими значеннями функції, що апроксимується, на даному елементі β . Відхил за границю враховуємо згідно зі стандартними підходами МСЕ.

Далі за процедурою ансамблювання [9] проводиться побудова матриці системи рівнянь, що охоплює взаємодію всіх N^e скінчених елементів системи та отримується матриця всієї СЛАР $[K]$, що входить до загальної системи рівнянь відносно вектору вузлових невідомих коефіцієнтів апроксимації $\{a\}$ (10):

$$[K]\{a\} = \{f\}. \quad (10)$$

де $\{f\}$ – вектор правих частин, що обумовлюється значеннями вузлових невідомих векторів скінчених елементів після процедури ансамблювання [9].

Для розв'язання двовимірної задачі апроксимації використаємо підхід з застосуванням двовимірних тривузлових трикутників. Базисні функції N_i^{β} для них є відомими та можуть бути обраними лінійними за виразом (11):

$$N_i^{\beta} = \delta_{1i}^{\beta} + \delta_{2i}^{\beta} x_1 + \delta_{3i}^{\beta} x_2. \quad (11)$$

де δ_{ji}^{β} , $i, j=1,2,3$ є коефіцієнтами, що обчислюються за значеннями координат вузлів елемента β x_1, x_2 за виразами (12):

$$\delta_{1i}^{\beta} = \frac{x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j}{2\Delta^{\beta}}, \delta_{2i}^{\beta} = \frac{x_2^j - x_2^k}{2\Delta^{\beta}}, \delta_{3i}^{\beta} = \frac{x_1^k - x_1^j}{2\Delta^{\beta}}, \quad (12)$$

де Δ^{β} – площа трикутного скінченного елемента, $i, j, k=1,2,3$ з циклічною перестановкою індексів.

Програма двовимірної апроксимації. Описаний метод апроксимації двовимірних розподілів було реалізовано у вигляді прикладної дослідницької програми. Для її побудови застосовано блоки та процедури програмного комплексу *FEM Creep* [14], який використовує той самий скінчений елемент. Програму написано мовою C++, вона складається з трьох основних функцій – побудови матриці системи, визначення вектору правих частин та розв'язання СЛАР методом Холєцького. Після визначення вектору невідомих вузлових коефіцієнтів апроксимації відбувається перехід до окремого скінченного елемента, для якого й визначаються потрібні характеристики.

Для верифікації результатів, що отримуються з застосуванням розробленої програми апроксимації даних в двовимірній області, було проведено цикл

перевірочних розрахунків. Прямокутна область заповнювалась точками, координати яких задавались випадковим чином. Після цього розрахунками визначались області, в яких присутні одна або більше точок.

Як приклад, наведемо результати двох розрахунків з 50 та 300 точками на прямокутнику. Результати апроксимації представлено на рис.1 (задача з 50 точками) та рис.2 (задача з 300 точками). Кольорами позначено області з відповідним числом отриманих точок. Проведена перевірка показує, що процедура апроксимації працює вірно.

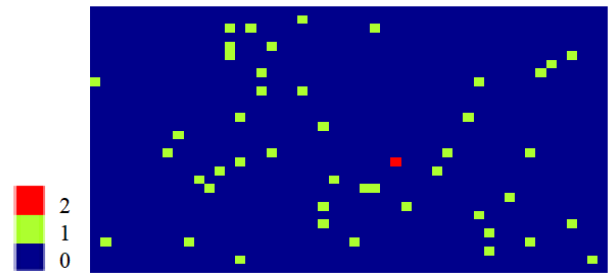


Рис. 1 – Апроксимація за прямокутною областю. Масив даних з 50 точок

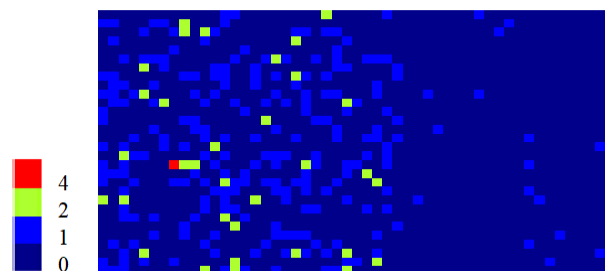


Рис. 2 – Апроксимація за прямокутною областю. Масив даних з 300 точок

Вебзастосунок для збирання даних часової зміни урбаністичної ситуації. Розроблену програму апроксимації даних на двовимірній області було заплановано використати для аналізу часової та просторової динаміки міського населення України. Для підготовки вхідних даних було розроблено вебзастосунок. Надамо його стислий опис.

Для первинного наповнення бази даних вебзастосунку обрано вебресурс «Вікіпедія». Для збирання даних використано програму *HDSearch*, створену на мові програмування Python та бібліотеки *requests*, *aiohhttp*, *BeautifulSoup* для здійснення HTTP запитів та вебскрапінгу сторінок. Блок-схему алгоритму збирання інформації наведено на рис. 3.

Для зберігання даних використана система управління базами даних PostgreSQL, що дозволяє ефективно структурувати зібрану інформацію за допомогою організованої схеми бази даних.

Для перегляду, додавання та редагування даних створено вебзастосунок. При його створенні за основу був вибраний фреймворк *Laravel* через його гнучкість, безпеку та зручність у розробці.

Для зображення місць розташування населених пунктів на мапі України створено окрему програму.

Використано мову програмування Python, бібліотеку PyQt5 – набір бібліотек та інструментів, що дозволяють створювати графічні користувацькі інтерфейси (GUI), бібліотеку OSMnx [15], яка призначена для завантаження, побудови, аналізу та візуалізації складних мереж доріг і іншої міської інфраструктури за даними OpenStreetMap. Для прикладу на рис. 4 наведено вигляд інтерфейсу програми з наданими точками місцями розташування населених пунктів, заснованими в період з 1000 по 1200 рр.



Рис. 3 – Блок-схема алгоритму збирання даних

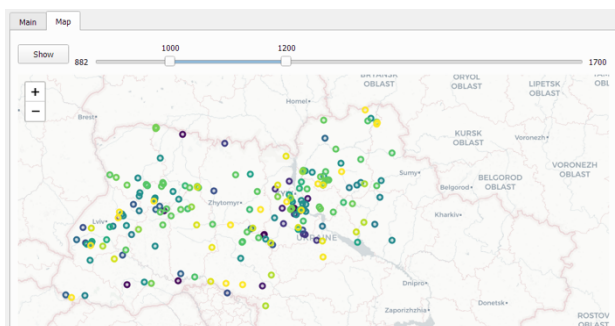


Рис. 4 – Інтерфейс програми для відображення населених пунктів України

Використання програми двовимірної апроксимації для представлення соціодинамічних даних. Розроблену програму двовимірної скінченноелементної апроксимації було використано для визначення найбільш урбанізованих регіонів середньовічної України. Отримані за допомогою програми *HDSearch* координати розташування міст України розглядалися як вхідні дані.

Для розрахунків було побудовано

скінченноелементну модель мапи України. Після перевірочних та верифікаційних розрахунків до моделювання було обрано сітку з 6294 трикутних скінченних елементів.

Розрахунки виконувались наступним чином. За обраним часовим тактом масив вхідних даних оновлювався шляхом завантаження додаткових координат міст, що утворились саме у даний проміжок часу. Аналізувались дані з 800 по 1200 рр. від РХ.

Результати апроксимації представлено на рис. 5 та рис. 6, де як приклад червоним кольором представлено урбанізовані райони України, що утворились до 1000р (рис.5) та до 1100р. (рис.6).

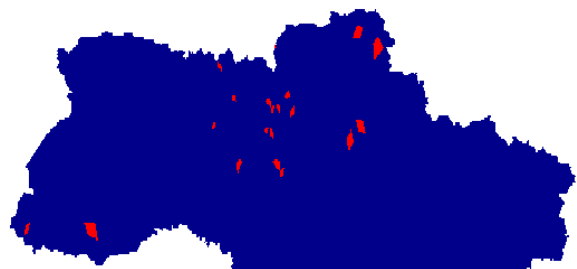


Рис. 5 – Регіони України з наявністю міст . Ситуація на 1000р.

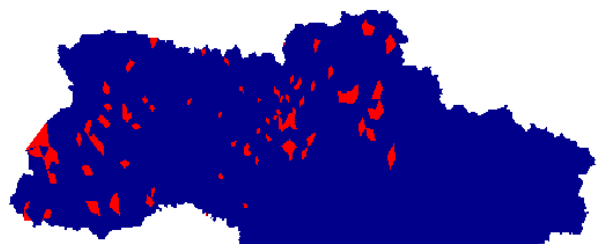


Рис. 6 – Регіони України з наявністю міст . Ситуація на 1100р.

Висновки. В даній роботі надано опис методу двовимірної апроксимації даних за допомогою алгоритмів методу зважених відхилів з кусково заданими базисними функціями у реалізації методу скінченних елементів. Наведено інформацію щодо розробленої за алгоритмами даного методу програми, результатом роботи якої є виділення областей двовимірної фігури з заданими значеннями параметрів, що аналізуються. З використанням випадково розподілених даних виконано верифікацію результатів, яка дозволила перейти до аналізу інших задач. Як приклад, розглянуто дані з заснування міст України у період з 800 по 1200рр. від РХ.

Для отримання цих вхідних даних розроблено додаткове програмне забезпечення, що включає програми, написані мовою Python, та вебзастосунок, створений за допомогою фреймворку Laravel мовою PHP. Для реалізації завдань роботи також використано бібліотеки PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup та систему управління базами даних PostgreSQL.

Дану апроксимацію виконано з метою підготовки

даних для подальшого моделювання соціодинамічних процесів на терені України, але отримані результати у вигляді координат границь регіонів, що мали високий рівень урбанізованості, можуть бути використані у різних наукових дослідженнях, в першу чергу в історії та археології.

Список літератури

1. Panzera D. *Areal Interpolation Methods: The Bayesian Interpolation Method* / D. Panzera // Spatial Econometric Methods in Agricultural Economics Using R. – 2021. – P. 185-201. <https://doi.org/10.1201/9780429155628-10>
2. Najar M. A *Brief Overview of Interpolation Methods* / M. Najar // Journal of Computational Methods in Engineering. – 2024. – Vol. 43. – No. 1. – P. 69-101. <https://doi.org/10.47176/jcme.43.1.1021>
3. Minda A. A. A review of interpolation methods used for frequency estimation / A. A. Minda, C. I. Barbinita, G. R. Gillich // Romanian Journal of Acoustics and Vibration. – 2020. – Vol. 17. – No. 1. – P. 21-26.
4. Li J. Spatial interpolation methods applied in the environmental sciences: A review / J. Li, A. D. Heap // Environmental Modelling & Software. – 2014. – Vol. 53. – P. 173-189. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.12.008>
5. Meinardus G. Approximation of functions: Theory and numerical methods. / G. Meinardus – Springer Science & Business Media, 2012. – Vol. 13. – 198 p.
6. Jazar R. N. Approximation methods in science and engineering. / R.N. Jazar – New York, NY: Springer, 2020. – 537 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-0716-0480-9>
7. Mhaskar H. N. Fundamentals of approximation theory. / H. N. Mhaskar, D. V. Pai – CRC Press, 2000. – 541 p.
8. Atangana A. New numerical scheme with Newton polynomial: theory, methods, and applications. / A. Atangana, S. I. Araz – Academic Press, 2021. – 460 p.
9. Zienkiewicz, O. C. Finite elements and approximation. / O. C. Zienkiewicz, K. Morgan – Courier Corporation, 2006. – 325 p.
10. Ern A. Finite elements I: Approximation and interpolation. / A. Ern, J. L. Guermond – Springer Nature, 2021. – Vol. 72 <https://doi.org/10.1007/978-3-030-56341-7>
11. Bartels S. Fast and accurate finite element approximation of wave maps into spheres / S. Bartels // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2015. – Vol. 49. – No. 2. – P. 551-558. <https://doi.org/10.1051/m2an/2014044>
12. Duarte C. A. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations / C. A. Duarte, D. J. Kim, D. M. Quaresma // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2006. – Vol. 196. – No. 1-3. – P. 33-56. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.12.016>
13. Gout C. Approximation of surfaces with fault (s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D m-splines and the finite element method / C. Gout et al. // Numerical Algorithms. – 2008. – Vol. 48. – P. 67-92 <https://doi.org/10.1007/s11075-008-9177-8>
14. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Татаринова О. А.

Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2017. – 232 с.

15. McClain B. P. Python for Geospatial Data Analysis. / B. P. McClain – O'Reilly Media, Inc., 2022.

References (transliterated)

1. Panzera D. *Areal Interpolation Methods: The Bayesian Interpolation Method*. Spatial Econometric Methods in Agricultural Economics Using R. 2021. P. 185-201. <https://doi.org/10.1201/9780429155628-10>.
2. Najar M. A *Brief Overview of Interpolation Methods*. Journal of Computational Methods in Engineering. 2024. Vol. 43. No. 1. P. 69-101. <https://doi.org/10.47176/jcme.43.1.1021>
3. Minda A. A., Barbinita C. I., Gillich G. R. *A review of interpolation methods used for frequency estimation*. Romanian Journal of Acoustics and Vibration. 2020. Vol. 17. No. 1. P. 21-26.
4. Li J., Heap A. D. *Spatial interpolation methods applied in the environmental sciences: A review*. Environmental Modelling & Software. 2014. Vol. 53, P. 173-189. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.12.008>
5. Meinardus G. Approximation of functions: Theory and numerical methods. *Springer Science & Business Media*, 2012. Vol. 13. 198 p.
6. Jazar R. N. Approximation methods in science and engineering. *New York, NY: Springer*, 2020. 537 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-0716-0480-9>
7. Mhaskar H. N., Pai D. V. Fundamentals of approximation theory. *CRC Press*, 2000. 541 p.
8. Atangana A., Araz S. I. New numerical scheme with Newton polynomial: theory, methods, and applications. *Academic Press*, 2021. 460 p.
9. Zienkiewicz O. C., Morgan K. Finite elements and approximation. *Courier Corporation*, 2006. 325 p.
10. Ern A., Guermond J. L. Finite elements I: Approximation and interpolation. *Springer Nature*, 2021. Vol. 72 <https://doi.org/10.1007/978-3-030-56341-7>
11. Bartels S. *Fast and accurate finite element approximation of wave maps into spheres*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2015. Vol. 49. No. 2. P. 551-558. <https://doi.org/10.1051/m2an/2014044>
12. Duarte C. A., Kim D. J., Quaresma D. M. *Arbitrarily smooth generalized finite element approximations*. Computer methods in applied mechanics and engineering. 2006. Vol. 196. No. 1-3. P. 33-56. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.12.016>
13. Gout C. et al. *Approximation of surfaces with fault (s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D m-splines and the finite element method*. Numerical Algorithms. 2008. Vol. 48. P. 67-92. <https://doi.org/10.1007/s11075-008-9177-8>
14. Breslavsky D. V., Korytko Yu. M., Tatarinova O. A. *Proektuvannya ta rozrobka skinchennoelementnogo programnogo zabezpechennya*. Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. 232 p.
15. McClain B. P. Python for Geospatial Data Analysis. *O'Reilly Media, Inc.*, 2022.

Надійшла (received) 11.08.2024

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; тел.: (057)-707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>; e-mail: Dmytro.Breslavskyi@khpi.edu.ua

Броварник Олексій Олексійович (Brovarynyk Oleksii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (057)-707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9689-1850>; e-mail: Oleksii.Brovarynyk@infiz.khpi.edu.ua

К. І. ЛЮБИЦЬКА, І. О. МОРАЧКОВСЬКА, Г. М. ТИМЧЕНКО

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ ЗГИН ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

В роботі розглянуто задачу геометрично-нелінійного згину пологих елементів конструкцій, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів (FGM) під впливом різноманітного поперечного навантаження. Пологі оболонки, що розглядаються, можуть мати довільну форму плану та контактують з пружною основою типу Вінклера-Пастернака. Передбачається, що механічні характеристики функціонально-градієнтних матеріалів безперервно змінюються за товщиною та обчислюються згідно зі степеневим законом. Математичну постановку виконано в рамках класичної геометрично-нелінійної теорії. Для лінеаризації нелінійної системи диференціальних рівнянь рівноваги застосовано метод послідовних навантажень в комплексі з методом Ньютона. Для розв'язання послідовності лінійних крайових задач, отриманих у результаті лінеаризації, разом із теорією R-функцій використовується метод Рітца. Поєднання теорії R-функцій та варіаційних методів надало значну можливість проведення чисельного експерименту для елементів конструкцій в широкому діапазоні зміни геометрії, силових навантажень, способів закріплення та властивостей матеріалу тощо. Завдяки використанню теорії R-функцій, побудовано необхідні системи координатних функцій у разі довільної геометрії плану оболонки та способів її обпирання. Запропонований підхід програмно реалізовано, протестовано та застосовано для розв'язання задач згину пологих оболонок складної форми плану з отворами. Розглянуто згин квадратної та гексагональної сферичних пологих оболонок на пружній основі, з круглим отвором, під дією рівномірно розподіленого навантаження. Досліджено вплив коефіцієнтів пружності основи, градієнтного показника в розподілі часток металу та кераміки, а також інших параметрів на прогини елементів конструкцій. Порівняння з результатами інших авторів дозволило встановити достовірність та ефективність розробленого підходу.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, пологі оболонки, теорія R-функцій, метод послідовних навантажень, геометрична нелінійність.

K. LIUBYTSKA, I. MORACHKOVSKA, G. TIMCHENKO

GEOMETRICLY NONLINEAR BENDING OF FUNCTIONAL-GRADIENT SHALLOW SHELLS ON AN ELASTIC FOUNDATION

The paper considers the problem of geometrically nonlinear bending of shallow structural elements made of functional graded materials (FGM) under the influence of various transverse loads. The shallow shells under consideration may have arbitrary plan shapes and be in contact with an elastic base of the Winkler-Pasternak type. It is assumed that the mechanical properties of functional-gradient materials vary continuously through the thickness and are calculated according to the power law. The mathematical formulation is carried out within the framework of classical geometric-nonlinear theory. To linearize the nonlinear system of equilibrium differential equations, the sequential loading method in combination with Newton's method is applied. To solve a sequence of linear boundary value problems obtained as a result of linearization, the Ritz method is used together with the R-functions theory. The combination of the theory of R-functions and variational methods provided a significant opportunity to conduct numerical experiments on structural elements over a wide range of geometry, loading conditions, boundary constraints, material properties, etc. The use of the theory of R-functions made it possible to construct the necessary systems of coordinate functions for shells with arbitrary geometry and support conditions. The proposed approach was implemented in software, tested, and applied to solve the problems of bending shallow shells of complex plan shapes with holes. The bending of square and hexagonal spherical shallow shells on an elastic base with a circular hole under a uniformly distributed load was considered. The influence of the elasticity coefficients of the base, the gradient index in the distribution of metal and ceramic particles, as well as other parameters on the deflection of structural elements, was studied. Comparison with the results of other authors has allowed us to establish the reliability and efficiency of the developed approach.

Keywords: functionally graded materials, shallow shells, theory of R-functions, the sequential load method, geometric nonlinearity.

Вступ. Активне використання сучасних композитних матеріалів, у тому числі й функціонально-градієнтних (FGM), для виготовлення різних елементів тонкостінних конструкцій створює потребу в розробці ефективних методів їх аналізу та розрахунку. В сучасній літературі особлива увага приділяється нелінійним проблемам, до яких належать задачі згину, коливань та стійкості пластин та оболонок як основних елементів багатьох авіаційних та машинобудівних конструкцій. Велика кількість статей та монографій присвячена питанням розрахунку пластин та оболонок з FGM, з урахуванням їхнього нелінійного деформування. Достатньо повний огляд таких робіт представлений, наприклад, в [1-3].

Аналіз публікацій, присвячених розробці методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пластин та оболонок з FGM, показує, що запропоновані аналітичні методи здебільшого підходять для дослідження конструкцій з прямокутним планом [4; 5]. Значно в меншій кількості робіт досліджено елементи круглого плану [6; 7] чи зі Geometricly nonlinear bending of

functional-gradient shallow shells on an elastic foundation складною формою (з отворами тощо) [8]. Проте, виявились майже відсутніми роботи, у яких були б представлені чисельні результати для оболонкових FGM конструкцій зі складною формою плану, що лежать на пружній основі під дією поперечного навантаження.

В даній роботі пропонується підхід, який використовує варіаційно-структурний метод (RFM): теорію R-функцій та варіаційні методи [3; 9-11]. Така комбінація надала значну можливість проведення чисельного експерименту для елементів в широкому діапазоні зміни геометрії, силових навантажень, способів закріплення, властивостей матеріалу тощо. Алгоритм лінеаризації вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь базується на методі послідовних навантажень (МПН) [12] з уточненням отриманого результату методом Ньютона.

Раніше в [13] було запропоновано метод для дослідження НДС ортотропних пластин та пологих оболонок на пружній основі при їх нелінійному

деформуванні. У роботі [14] цей метод поширений на FGM пластини. Дана робота є продовженням попередніх досліджень і присвячена геометрично-нелінійній задачі згину пологих FGM оболонок.

Постановка задачі. Розглянемо згин пологої FGM оболонки, яка знаходиться під дією розподіленого навантаження $q(x, y)$ та спирається на пружну основу із реакцією $p(x, y)$. В даній роботі використано основу Вінклера-Пастернака, реакція якої:

$$p(x, y) = K_1 w + K_2 \nabla^2 w,$$

де K_1 та K_2 – коефіцієнти жорсткості, w – прогин.

Передбачається, що прогини оболонки, які виникають в результаті навантаження, є великими, отже для запису рівнянь рівноваги застосуємо класичну геометрично-нелінійну теорію:

$$d_{11}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) + 2(d_{12} + 2d_{66})w_{,xxyy} - b_{12}(\phi_{,xxxx} + \phi_{,yyyy}) + 2(b_{66} - b_{11})\phi_{,xxyy} - \nabla_k \phi = q(x, y) - p(x, y) + L(w, \phi), \quad (1)$$

$$a_{11}(\phi_{,xxxx} + \phi_{,yyyy}) + (2a_{12} + a_{66})\phi_{,xxyy} - b_{12}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) - 2(b_{11} - b_{66})w_{,xxyy} + \nabla_k w = -\frac{1}{2}L((w, w)), \quad (2)$$

де $\phi(x, y)$ – функція напруг

$$N_x = \phi_{,yy}, \quad N_y = \phi_{,xx}, \quad N_{xy} = -\phi_{,xy},$$

$L(R, \Psi) = R_{,xx} \Psi_{,yy} - 2R_{,xy} \Psi_{,xy} + \Psi_{,xx} R_{,yy}$ – загальний вигляд нелінійних операторів $L(w, \phi)$ та $L((w, w))$, $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ та $[d_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) – матриці зведених поверхневої, зсувної та згинальної жорсткості [1, 8, 15]:

$$[a] = [A]^{-1}, \quad [b] = -[A]^{-1}[B], \quad [d] = [D] - [B][A]^{-1}[B]. \quad (3)$$

$$([A], [B], [D]) = \int_{-h/2}^{h/2} [Q(z)](1, z, z^2) dz \quad (4)$$

$$[Q(z)] = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu(z)}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Дане дослідження присвячено функціонально-градієнтним оболонкам, у яких властивості матеріалу безперервно змінюються за товщини згідно степеневому закону [1]:

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n, \quad E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m, \quad \nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m, \quad (6)$$

(4) – (6) та інтегрування обчислюються наступним чином: де V_c – об'ємна частка кераміки;

z – відстань від поточної точки до серединної площини;

n ($0 \leq n < \infty$) – показник степеня, якщо $n = 0$ отримуємо однорідний матеріал – керамічний, при $n \rightarrow \infty$ – металевий.

Припустимо, що оболонка знаходиться в умовах сталої температури, тобто характеристики складових

FGM матеріалу від неї не залежать. Це означає, що коефіцієнти матриць (3) після підстановки

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu}{E_1}, \quad a_{66} = 2(1 + \nu)a_{11}, \quad (7)$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{66} = -\frac{E_2}{E_1}, \quad b_{12} = b_{21} = b_{16} = b_{26} = 0 \quad (8)$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{1}{1 - \nu^2} \left(E_3 - \frac{E_2^2}{E_1} \right), \quad d_{12} = d_{21} = \nu d_{11},$$

$$d_{16} = d_{61} = d_{26} = d_{62} = 0, \quad d_{66} = \frac{1 - \nu}{2} d_{11}. \quad (9)$$

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{n + 1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)nh^2}{2(n + 1)(n + 2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{4(n+1)} \right) \right) h^3. \quad (10)$$

Для кожного способу обпирання конструкції та отримання частинного розв'язку системи (1) – (2) додаються відповідні граничні умови. Наприклад, для ковзаючого шарніра:

$$W = 0, \quad M_n = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (11)$$

Метод розв'язання. Лінеаризацію нелінійних рівнянь (1) – (2) виконуємо за методом послідовних навантажень [12]. Відповідно до цього методу вихідне навантаження розбивається на n малих навантажень $\delta q^{(r)}$. На кожному r -му кроці навантаження розв'язується лінеаризована система рівнянь, а сумарні функції зусиль і прогину обчислюються через суперпозицію розв'язків:

$$w^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta w^{(r)}, \quad \phi^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta \phi^{(r)}.$$

Розв'язання лінеаризованої системи було виконано за допомогою RFM, в рамках якого було складено відповідний функціонал для кожного кроку навантаження:

$$\begin{aligned} \Pi(\delta w^{(r)}, \delta \phi^{(r)}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ d_{11}(\delta w_{,xx}^{(r)})^2 + \right. \\ & + d_{22}(\delta w_{,yy}^{(r)})^2 + 2d_{12}\delta w_{,xx}^{(r)}\delta w_{,yy}^{(r)} + \\ & + 4d_{66}(\delta w_{,xy}^{(r)})^2 - a_{22}(\delta \phi_{,xx}^{(r)})^2 - \\ & - a_{12}\delta \phi_{,xx}^{(r)}\delta \phi_{,yy}^{(r)} - a_{66}(\delta \phi_{,xy}^{(r)})^2 - a_{11}(\delta \phi_{,yy}^{(r)})^2 + \\ & + (\delta w_{,x}^{(r)})^2 \phi_{,yy}^{(r-1)} - 2\delta w_{,x}^{(r)}\delta w_{,y}^{(r)}\phi_{,xy}^{(r-1)} + \\ & + (\delta w_{,y}^{(r)})^2 \phi_{,xx}^{(r-1)} + \\ & + 2(\delta w_{,y}^{(r)}\delta \phi_{,y}^{(r)}w_{,xx}^{(r-1)} + \delta w_{,x}^{(r)}\delta \phi_{,x}^{(r)}w_{,yy}^{(r-1)}) - \\ & - 2w_{,xy}^{(r-1)}(\delta w_{,x}^{(r)}\delta \phi_{,y}^{(r)} + \delta w_{,y}^{(r)}\delta \phi_{,x}^{(r)}) + \end{aligned}$$

$$+ k_x \delta w^{(r)}_{,y} \delta \phi^{(r)}_{,y} + k_y w^{(r)}_{,x} \delta \phi^{(r)}_{,x} + K_1 (\delta w^{(r)})^2 + K_2 (\nabla \delta w^{(r)})^2 - 2 \delta q^{(r)} \delta w^{(r)} \} d\Omega. \quad (12)$$

Тут $w^{(r-1)}$ і $\phi^{(r-1)}$ – сумарні прогин та функція напруг для попереднього, $(r-1)$ -го, кроку навантаження.

Згідно варіаційного методу Ритця, для розв'язання (12) невідомі $\delta w^{(r)}$, $\delta \phi^{(r)}$ подаються у вигляді послідовності координатних функцій $\{w_i\}$, $\{\phi_i\}$, що задовольняють, принаймні, кінематичним граничним умовам:

$$\delta w^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_1} c_i w_i, \quad \delta \phi^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_2} c_i \phi_i, \quad (13)$$

де c_i – невідомі коефіцієнти розкладання. Для побудови таких послідовностей у роботі використовується теорія R -функцій, яка дозволяє їх будувати для пологих оболонок зі складною формою плану та різноманітними умовами закріплення.

Через накопичування похибок розв'язок, отриманий за методом послідовного навантаження, рекомендується уточнювати. В даній роботі для цього було застосовано метод Ньютона, проте його збіжність значно залежить від того, на скільки обрана початкова ітерація наближена до розв'язку. Збіжність ітераційного процесу контролюється за допомогою нерівності

$$\left\| \frac{w^{(s+1)} - w^{(s)}}{w^{(s)}} \right\|^2 + \left\| \frac{\phi^{(s+1)} - \phi^{(s)}}{\phi^{(s)}} \right\|^2 \leq \varepsilon,$$

де ε – задана величина відносної похибки.

Чисельні результати. Для перевірки достовірності запропонованого алгоритму та створеного програмного забезпечення було вирішено низку тестових завдань.

Задача 1. Розглянемо згин квадратної $(a \times a)$ FGM ($n = 1$) пологої сферичної ($k_x = k_y = k = 1/Ra$) оболонки (рис.1), $h = 0.01$ м, $a = 0.2$ м, яка виготовлена з матеріалу алюміній - цирконій

($E_m = 70 \text{ GPa}$, $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.3$, $\nu_c = 0.3$) та знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження q . Граничні умови – ковзаючий шарнір. Графіки залежності прогину в центрі оболонки від розміру навантаження для різної кривини ($R=0.725, 5, \infty$) представлені на рис. 2, де також наведені результати, отримані в роботі [15]. Як видно з рисунка, результати добре узгоджуються між собою, що підтверджує достовірність розробленого алгоритму.

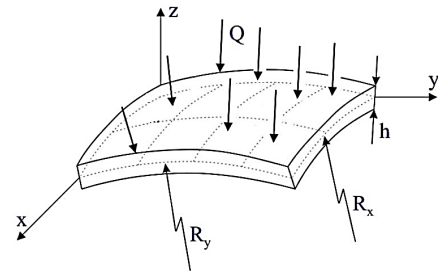


Рис.1 – Форма оболонки

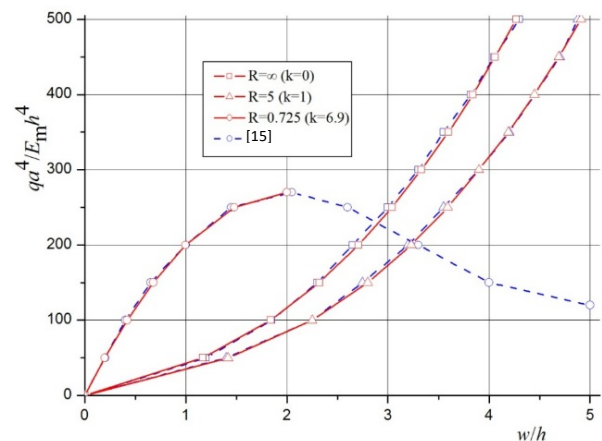


Рис. 2 – Порівняння залежності «навантаження-прогин у центрі» шарнірно опертій оболонки при $n = 1$

Задача 2. Розглянемо згин квадратної пологої сферичної оболонки на пружній основі, з круглим отвором, під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис.3). Геометричні параметри оболонки: $h = 0.01$ м, $a = 0.2$ м. Коефіцієнти пружності основи $k_1 = K_1 a^4 / E_m h^3$, $k_2 = K_2 a^4 / E_m h^3$. Матеріал – алюміній - цирконій. Зовнішній контур спирається на ковзаючий шарнір, отвір вільний.

Згідно RFM, для побудови координатних функцій (13) перш за все необхідно скласти рівняння плану оболонки та структурні формули, які відповідають заданій комбінації граничних умов. Для даної крайової задачі структурні формули мають наступний вигляд:

$$\delta w^{(r)} = \omega_1 \Phi_1, \quad \delta \phi^{(r)} = \omega^2 \Phi_2. \quad (14)$$

Тут $\omega = f_1 \vee_0 (f_2 \wedge_0 f_3) = 0$ – рівняння границі всієї області, а $\omega_1 = f_2 \wedge_0 f_3 = 0$ – рівняння отвору, Φ_1 , Φ_2 – невизначені компоненти структурних формул [9], які в даній роботі розкладаються за степеневими поліномами (13). При цьому $f_1 = (c^2 - x^2 - y^2)/2c \leq 0$ – зовнішність круга радіуса c із центром у початку координат; $f_2 = (a^2/4 - x^2)/a \geq 0$ – вертикальна полоса, обмежена прямими $x = \pm a/2$; $f_3 = (a^2/4 - y^2)/a \geq 0$ – горизонтальна полоса, обмежена прямими $y = \pm a/2$.

На рис. 4 представлена залежність максимального прогину (який виникає на контурі отвору) оболонки ($c = 0.15a, n = 1$) без пружної основи ($K_1 = K_2 = 0$) від зовнішнього навантаження для різних значень радіуса кривини. Вплив радіуса отвору для елемента,

який досліджується, із кривиною $k = 1$ наведено на рис. 5. Видно, що збільшення отвору зменшує максимальний прогин елемента, що відповідає фізичному сенсу задачі. Такий самий ефект спостерігається на рис. 2 та 4 при різних значеннях кривини. Крім того, при збільшенні кривини сферичної оболонки виникає ефект втрати нею стійкості та зміни форми рівноваги, вивчення якого є окремою дослідницькою задачею.

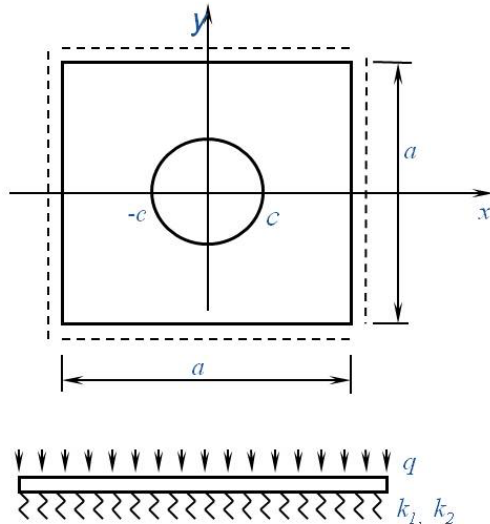


Рис. 3 – План квадратної сферичної оболонки з центральним отвором

Результати дослідження впливу пружної основи для різного степеня n матеріалу при $c = 0.1a$, $k = 1$ представлені на рис. 6. Як видно з графіків, збільшення впливу пружної основи зменшує ефект FGM матеріалу та прогини, які виникають. Можна побачити, що у випадку $k_1 = 100$, $k_2 = 10$ (основа Вінклера-Пастернака) криві для алюмінію та цирконію дуже наближені одна до одної, степінь FGM матеріалу майже не впливає на прогин оболонки. Також відмітимо, що відсутність коефіцієнта k_2 (основа Вінклера) вже значно збільшує варіативність прогину в залежності від характеристик матеріалу. Ці висновки підтверджують амортизаційну функцію пружних основ. Найбільші прогини та розбіг результатів для різних матеріалів виникає, відповідно, при відсутності пружної основи.

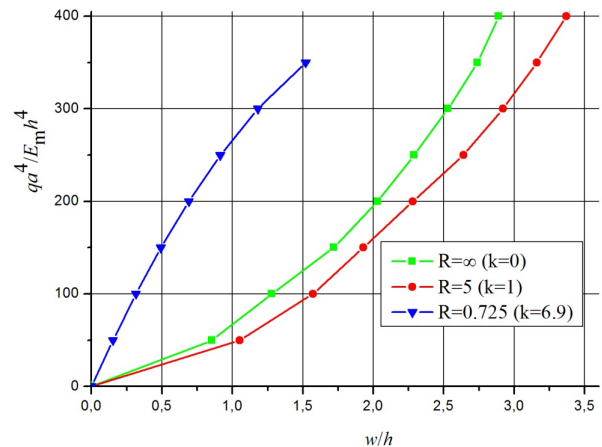


Рис. 4 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки (рис. 3), при $n = 1$, $c = 0.15a$, $K_1 = K_2 = 0$

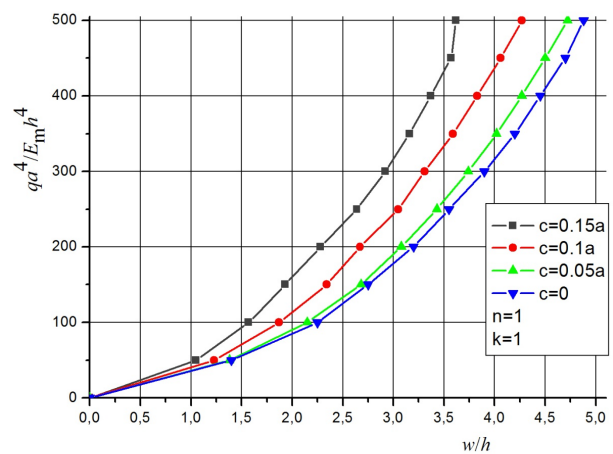


Рис. 5 – Вплив радіуса отвору на залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки (рис. 3), $K_1 = K_2 = 0$, $k = 1$, $n = 1$

Задача 3. Для демонстрації можливостей розробленого алгоритму щодо полігональної геометрії розглянемо згин пологої гексагональної сферичної оболонки на пружній основі з круговим отвором (рис.7). Геометричні параметри: $h = 0.01$ м, $a = 0.5$ м, $c = 0.1$ м, $k = 6.9$, $n = 1$. Зовнішній контур спирається на ковзаючий шарнір, отвір вільний.

Графіки залежностей «зовнішнє навантаження-максимальний прогин» для різних типів пружної основи представлено на рис. 8, звідки видно, що наявність пружної основи, особливо основи Вінклера-Пастернака, суттєво зменшує прогини пластини.

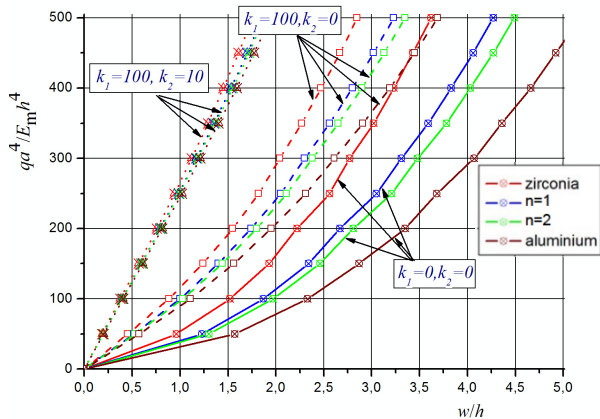


Рис. 6 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки ($k = 1$) з отвором ($c = 0.1a$) при різних коефіцієнтах пружності основи та степені об'ємної частки матеріалу

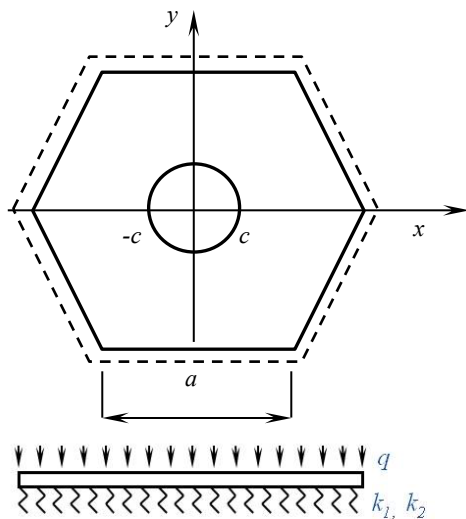


Рис. 7 – Шарнірно оперта гексагональна сферична оболонка з отвором

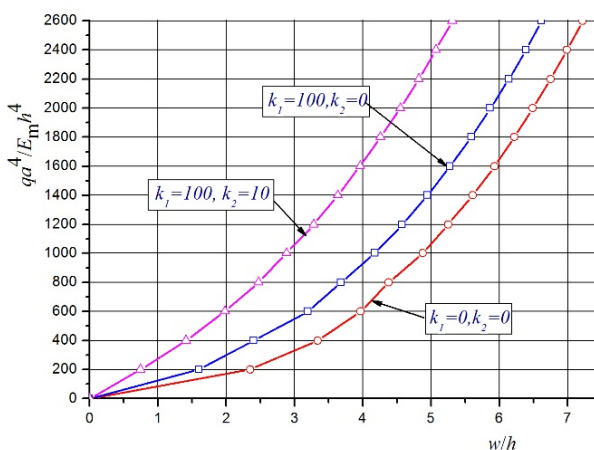


Рис. 8 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки при різних значеннях коефіцієнтів пружності основи

Висновки. В роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод для дослідження геометрично-

нелінійного згину FGM пологих оболонок зі складною геометрією на пружній основі типу Вінклера-Пастернака. Розроблений метод базується на спільному використанні варіаційного методу Рітца, теорії R-функцій, методах послідовного навантаження та Ньютона.

Створене програмне забезпечення реалізує розроблений підхід у рамках класичної геометрично-нелінійної теорії. Наведені тестові приклади підтверджують достовірність запропонованого методу.

Досліджено вплив пружної основи та ступінь об'ємної частки матеріалу на прогини сферичної оболонки. Наявність отворів та геометрія плану помітно впливають на прогини, що виникають. Також варто зазначити, що пружна основа значно зменшує не тільки прогини елементів конструкцій, а й вплив ступеня градієнта FGM матеріалу.

Таким чином, описаний метод і розроблене програмне забезпечення дозволяють проводити широкий обчислюваний експеримент для пологих оболонок складної форми та різних видів граничних умов, що дуже важливо при проектуванні реальних конструкцій.

Список літератури

1. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.
2. Erasmo Viola. Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery / Erasmo Viola, Luigi Rossetti, Nicholas Fantuzzi, Francesco Tornabene // Composite Structures – 2014. – V.112. P. 44–65.
3. Kurpa L. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz, G. Timchenko, I. Morachkovska // Journal of Applied and Computational Mechanics – 2023. – V.9(4). P. 1144–1155.
4. Tran Quoc Quan. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells / Tran Quoc Quan, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Dinh Duc // Aerospace Science and Technology. – 2019. No 90. – P. 160–180.
5. Hui-Shen Shen. Nonlinear bending and postbuckling of FGM cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations in thermal environments / Hui-Shen Shen, Hai Wang // Composites Part B. – 2015. – No.78. P. 202–213.
6. Son Thai. Nonlinear bending analysis of variable thickness multi-directional functionally graded plates based on isogeometric analysis / Son Thai, Dieu T. T. Do, Tien Nguyen Tan // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – V. 30, No. 20. – P. 4091–4109.
7. Jingchao Wang. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach / Jingchao Wang, Zheng Liang Li, Wei Yu // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 138. – P. 430–457.
8. Ömer Civalek. Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method // Composite Structures. – 2017. No 161. – P. 93–110.
9. Rvachev V. L. The R-functions theory and its applications / V. L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p.
10. Kurpa L. V. The R-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L. V. Kurpa. – Kharkov: NTU "KhPI", 2009. – 408p.
11. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133–147.
12. Petrov. V. V. The method of consecutive loads in the nonlinear theory of plates and shells / V. V. Petrov. – Saratov, 1975. – 119 p.

13. Kurpa L. V. The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for ortho- tropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // Int. J. Applied Mech. – 2010. – No 6. – P. 660–668.
14. J. Awrejcewicz. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations / J. Awrejcewicz, L. V. Kurpa, K. I. Lyubitska // Proceeding of the 11-th conference “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), October 11-13,2017, Gdansk, Poland.- Shell Structures: Theory and Applications, Taylor & Francis Group, London, UK 2017.- V.4, p.61-64.
15. Woo J. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / J. Woo, S. A. Meguid, // Int. J. Solid and Structures. – 2001. – No 38. P. 7409–7421.
6. Son Thai. Nonlinear bending analysis of variable thickness multi-directional functionally graded plates based on isogeometric analysis / Son Thai, Dieu T. T. Do, Tien Nguyen Tan // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – V. 30, No. 20. – P. 4091–4109.
7. Jingchao Wang. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach / Jingchao Wang, Zheng Liang Li, Wei Yu // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 138. – P. 430–457.
8. Ömer Civalek. Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method // Composite Structures. – 2017. No 161. – P. 93–110.
9. Rvachev V. L. The R-functions theory and its applications / V. L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p.
10. Kurpa L. V. The R-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L. V. Kurpa. – Kharkov: NTU “KhPI”, 2009. – 408p.
11. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133–147.
12. Petrov V. V. The method of consecutive loads in the nonlinear theory of plates and shells / V. V. Petrov. - Saratov, 1975. - 119 p.
13. Kurpa L. V. The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for ortho- tropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // Int. J. Applied Mech. – 2010. – No 6. – P. 660–668.
14. J. Awrejcewicz. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations / J. Awrejcewicz, L. V. Kurpa, K. I. Lyubitska // Proceeding of the 11-th conference “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), October 11-13,2017, Gdansk, Poland.- Shell Structures: Theory and Applications, Taylor & Francis Group, London, UK 2017.- V.4 , p.61-64.
15. Woo J. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / J. Woo, S. A. Meguid, // Int. J. Solid and Structures. – 2001. – No 38. P. 7409–7421.

References (transliterated)

1. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.
2. Erasmo Viola. Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery / Erasmo Viola, Luigi Rossetti, Nicholas Fantuzzi, Francesco Tornabene // Composite Structures – 2014. –V.112. P. 44–65.
3. Kurpa L. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz, G. Timchenko, I. Morachkovska // Journal of Applied and Computational Mechanics – 2023. –V.9(4). P. 1144–1155.
4. Tran Quoc Quan. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells / Tran Quoc Quan, Nguyen HuyCuong, Nguyen Dinh Duc // Aerospace Science and Technology.– 2019. No 90. – P. 160–180.
5. Hui-Shen Shen. Nonlinear bending and postbuckling of FGM cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations in thermal environments / Hui-Shen Shen, Hai Wang // Composites Part B. – 2015. – No.78. P. 202–213.

Надійшло (received) 05.08.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Любицька Катерина Ігорівна (Liubytka Kateryna) - кандидат технічних наук, Середньо-Шведський університет, дослідник кафедри інженерії, математики та предметної дидактики; м. Сундсвалль, Швеція; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2080-0299>; e-mail: kateryna.liubytka@miun.se

Морачковська Ірина Олегівна (Morachkovska Iryna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-60-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4164-4780>; e-mail: i.morachkovska@gmail.com

Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-60-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7279-7173>; e-mail: gntimchenko2000@gmail.com

В. Г. МАРТИНЕНКО**ПОШУК ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ АКТИВНИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІДВИШУВАННЯ ШЛЯХОМ ВИЗНАЧЕННЯ ЇХНІХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЖОРСТКІСНИХ ТА ДЕМПФУВАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

В роботі представлений підхід до моделювання системи «Ротор в активних магнітних підшипниках» та подальшого пошуку оптимальних параметрів опор для забезпечення нерезонансної роботи машини у всьому діапазоні робочих швидкостей обертання. У якості об'єкта дослідження виступають активні магнітні підшипники для ротора промислового вентилятора місцевого провітрювання шахти, що був попередньо встановлений у підшипники кочення та через відсутність необхідного навантаження на них має великі втрати ефективності на тертя. Для вирішення проблем із втратою ефективності, пропонується використовувати активні магнітні підшипники з системою керування на основі пропорційно-інтегрально-похідного регулятора з принципами керування одним входом і одним виходом, що є більш дешевою та простою у впровадженні системою у порівнянні із системами множинного входу і множинного виходу, проте може виступати дієвим засобом для вирішення описаних проблем у роботі машини. Предметом дослідження є динаміка ротора промислового вентилятора в активних магнітних підшипниках, що моделюються за допомогою пружинно-демпферних елементів із коефіцієнтами жорсткості та демпфування, які визначаються за допомогою розробленого у роботі підходу. Він заснований на представленні активних магнітних підшипників як електромеханічної системи із компонентами, динаміка яких у частотному діапазоні описується передатними функціями. Формування передатної функції активного магнітного підшипника в цілому та подальше її включення в систему рівнянь динаміки ротора дозволяє отримати відносно прості залежності коефіцієнтів жорсткості та демпфування підшипників від швидкості обертання ротора. Ці залежності містять у собі фізичні параметри компонентів активних магнітних підшипників та параметри їхніх систем керування, що дозволяє не тільки змоделювати динаміку ротора в таких підшипниках, а і провести пошук їхніх оптимальних параметрів, зокрема значення току зміщення в електромагнітах, необхідного для забезпечення відсутності резонансів ротора із синхронними збуджуючими навантаженнями у всьому діапазоні робочих швидкостей обертання, що підтверджується побудовою залежностей критичних швидкостей ротора від струму зміщення, а також діаграми Кемпбелла для оптимального значення струму зміщення.

Ключові слова: динаміка ротора; активний магнітний підшипник; система керування; передатна функція; критична швидкість.

V. MARTYENKO**SEARCH FOR OPTIMAL PARAMETERS OF ACTIVE STRUCTURAL SUSPENSION ELEMENTS BY DETERMINING THEIR INTEGRAL STIFFNESS AND DAMPING CHARACTERISTICS**

The paper presents an approach to the modelling of the “Rotor in active magnetic bearings” system and the subsequent search for optimal support parameters to ensure non-resonant operation of the machine in the entire range of operating rotational speeds. The object of the study is active magnetic bearings for the rotor of an industrial fan for local ventilation of the mine, which was previously installed in the rolling element bearings and due to the lack of the necessary load on them, have large frictional efficiency losses. To solve the problems with the loss of efficiency, it is proposed to use active magnetic bearings with a control system based on a proportional-integral-derivative controller with control principles of single input-single output, which is a cheaper and simpler system to implement compared to multiple input-multiple output systems, however, can be an effective tool for solving the described problems in the operation of the machine. The subject of the study is the dynamics of the rotor of an industrial fan in active magnetic bearings, which are modeled using spring-damper elements with stiffness and damping coefficients which are determined using the approach developed in the work. It is based on the representation of active magnetic bearings as an electromechanical system with components the dynamics of which are described by transfer functions in the frequency domain. The formation of the transfer function of the active magnetic bearing as a whole and its subsequent inclusion in the system of rotor dynamics equations allows obtaining relatively simple dependences of the stiffness and damping coefficients of the bearings on the rotor rotational speed. These dependencies contain the physical parameters of active magnetic bearing components and the parameters of their control systems which allows not only simulating the dynamics of the rotor in such bearings, but also searching for their optimal parameters, in particular, the value of the bias current in the electromagnets, which is necessary to ensure the absence of resonances of the rotor with synchronous excitation loads in the entire range of operating rotational speeds, which is confirmed by plotting the dependences of the rotor critical speeds on the bias current, as well as the Campbell diagram for the optimal value of the bias current.

Keywords: rotor dynamics; active magnetic bearing; control system; transfer function; critical speed.

Вступ. На даний момент нелінійний конструктивний аналіз пропонує інженерам і науковцям багату різноманітність інструментів для аналізу проблем різної природи, від комплексного моделювання руйнівних процесів у напружених конструкціях [1] до моделювання динаміки ротора під впливом сторонніх предметів [2]. Проте навіть для цих випадків було показано, що лінійний підхід може бути застосований з деякими обмеженнями, наприклад, нелінійний удар об'єктів можна спростити до дії сили [3] для моделювання механіки конструкції ротора без значного зниження точності [4].

Цей підхід також застосовний для моделювання підшипників ротора як лінійних опор із власними властивостями жорсткості та демпфування [5], що було ефективно використано авторами для

моделювання динаміки роторів в активних магнітних підшипниках [6; 7].

Переваги використання магнітної левітації активно використовуються в галузях транспорту та турбомашинобудування [8]. Поряд із пасивними магнітними підшипниками [9] технологія активних магнітних підшипників (АМП) пропонує значні переваги в порівнянні зі звичайними підшипниками та все частіше використовується в різних галузях промисловості. Використання АМП замість традиційних масляних підшипників ковзання або підшипників кочення в турбомашинах забезпечує роботу без тертя зі зменшенням потреби в обслуговуванні, підвищенням ефективності завдяки меншим втратам потужності та покращенням надійності завдяки керованій динамічній поведінці

системи та відсутності зносу між валом та підшипниками.

Активні магнітні підшипники досягли великої популярності серед інженерів і вчених як опорні системи для високошвидкісних машин із низьким тертям. З 1980-х років їх застосування стало перспективним варіантом при проектуванні нових турбомашинних агрегатів або при вирішенні проблем нестабільності в існуючих [10].

Основна ідея роботи активного магнітного підшипника заснована на електромагнітних процесах. Він працює за принципом електромагнітного підвішування. Електричний струм, що проходить через щільно намотані мідні котушки, створює магнітне поле. Це поле взаємодіє з гільзою ротора, яка виготовлена з магнітного матеріалу, такого як кремній-залізо. Левітація ротора в АМП зумовлює ряд їхніх переваг [11], серед яких можливість варіювати коефіцієнти жорсткості та демпфування, що забезпечує плавне проходження резонансів.

Діапазон розмірів машин з АМП варіюється від дуже малих до великих застосувань з обмеженнями потужності та швидкості до 30 МВт і 150000 об/хв. Активні магнітні підшипники використовуються:

1. У системах видобутку та транспортування природного газу для компресорів, турбодетандерів і детандер-компресорних установок [12-14].
2. В енергетиці для парових і газових турбін [15;16].
3. Для електричних машин [12].
4. Для деяких конкретних застосувань, де інші типи підшипників непридатні, наприклад, ядерні центрифуги, маховики накопичувачів енергії, шпинделі обробки, турбомолекулярні насоси тощо [17; 18; 19; 20].

Підходи до моделювання динаміки системи «ротор в АМП» як мехатронної мають свої особливості порівняно зі стандартним моделюванням динаміки ротора, оскільки необхідно адекватно враховувати взаємозв'язок електромагнітної та механічної систем. Залежно від потреб і складності системи ці підходи можуть включати наступне:

1. Аналітичне [21] або чисельне [22] визначення параметрів жорсткості та демпфування АМП з подальшим моделюванням динаміки ротора із врахуванням моделі «ротор в пружинно-демпферних опорах» [23].
2. Експериментальна ідентифікація параметрів системи керування АМП [24] з подальшим моделюванням її роботи у зв'язку з відгуком ротора, включаючи валідацію на випробувальному стенді [25], [26].
3. Поглиблене моделювання всіх компонентів АМП [27] з подальшим застосуванням алгоритмів оптимізації [28], зокрема можливостей нейронної мережі [29], для пошуку оптимальних параметрів АМП, які забезпечують систему «ротор в АМП» з найбільш плавним проходженням через резонанси та безпечне функціонування на робочих режимах.

Незважаючи на велику увагу до інноваційних технологій і переваг, які надають АМП, їх

використання обмежене через складність процесу проектування, аналізу та інтеграції в машину. Той факт, що ротори з АМП є мехатронними системами, означає, що в системах одночасно відбуваються як механічні, так і електромагнітні процеси. Таким чином, комплексне моделювання властивостей і особливостей компонентів АМП має вирішальне значення при проектуванні «під ключ» турбомашин з активними магнітними підшипниками або при створенні зразків АМП для існуючих машин для заміни застарілих або неправильно підібраних підшипників іншого типу. Чим адекватнішими є моделі АМП, тим легше стає перехід від цих моделей до реальної конструкції, оскільки це забезпечує інженерам кращу відповідність між параметрами моделі та реальними властивостями компонентів підшипника. Це забезпечує максимально широкі можливості оптимізації з налаштуванням кожної функції певного компонента для досягнення найкращих вібраційних властивостей мехатронної системи «ротор в АМП».

Метою поточної роботи є демонстрація застосовності підходу для моделювання АМП за їх жорсткістними та демпфувальними властивостями без зниження точності моделі, що дозволяє правильно розраховувати динаміку ротора машини.

Підхід в цілому дає змогу підвищити ефективність мехатронної системи за рахунок можливості точного прогнозування динамічної реакції ротора, що дозволяє перейти на такі безфрикційні опори, як АМП, і зменшує втрати на тертя в підшипниках.

Зростаюча популярність АМП серед інженерів і науковців надає цій роботі високу актуальність, а її новизна визначається унікальним набором вхідних параметрів для компонентів АМП, а саме характеристик підсилювача, фізичних властивостей електромагніту, налаштувань контролера, параметрів фільтра згладжування та датчика переміщення, що доступні для оптимізації під час моделювання динаміки ротора розглянутої мехатронної машини.

1. Теоретичні основи підходу.

1.1. Динаміка електромагнітної частини. Для опису динаміки електромагнітної частини використовується частотна область. Зв'язок між частотною областю s і часовою областю t керується перетворенням Лапласа $\mathcal{L}\{\dots\}$, яке для функції загального вигляду $f(t)$, визначеної в діапазоні $t \in [0, +\infty]$, представлено таким оператором [30]:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

Підхід, представлений у статті, використовує модель пропорційно-інтегрально-похідного (proportional-integral-derivative, PID) регулятора з принципами керування одним входом і одним виходом (single input-single output, SISO), що обумовлює відповідність між напругою підсилювача u та напругою затримки u_{delay} :

$$u(s) = G_{\text{PID}}(s) u_{\text{delay}}(s). \quad (2)$$

Підсилювач розглядається як пристрій транспровідності з обмеженою смугою пропускання, який представляє взаємозв'язок між струмом i_{mag} і напругою u із замкнутим контуром транспровідності $G_{amp}(s)$:

$$i_{mag} = G_{amp}(s) u. \quad (3)$$

Три інші компоненти АМП, а саме датчик, фільтр згладжування та затримка, з'єднані послідовно:

$$u_{delay} = G_{delay}(s) G_{aa}(s) G_{sense}(s) u_{sense} = G_{out}(s) u_{sense}, \quad (4)$$

і це вводить відповідність між переміщенням y_{sense} , виміряним у датчику, та напругою затримки u_{delay} .

Нарешті, співвідношення між струмом і переміщенням, виміряним датчиком, є:

$$i_{mag} = G_{amp}(s) G_{PID}(s) G_{out}(s) u_{sense} = G(s) u_{sense}. \quad (5)$$

Цей зв'язок використовується при розрахунку динамічних коефіцієнтів опор, що є частиною підходу та показано в наступних підрозділах.

1.2. Передатні функції компонентів АМП.

Хоча доведено, що розширені алгоритми керування множинним входом і множинним виходом (multiple input-multiple output, МІМО) [31], такі як H_∞ [32; 33], дають надійні можливості керування [34; 35], експерименти показують [36; 37], що прості аналогові схеми ще можна використовувати як один із варіантів вузлів АМП для турбомашин для отримання переваг керування поведінкою ротора [38].

Таблиця 1 містить формули для передатних функцій компонентів АМП, які моделюють їхню динаміку на основі досвіду наданих документів.

Таблиця 1 – Передатні функції компонентів АМП

Компонент	Передатна функція		
	Формула	Параметр	Значення
Система керування (контролер)	$G_{PID}(s) = (K_D s + K_P) / ((\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)) + K_I / s$	K_D [мкс]	449.3
		K_P [-]	1.362
		K_I [с ⁻¹]	82.6
		τ_1 [мкс]	33
Підсилювач	$G_{amp}(s) = k_{amp} / (s^2 / (4\pi^2 f_{b1}^2) + 2\xi s / (2\pi f_{b1}) + 1)$	τ_2 [мкс]	11
		k_{amp} [-]	1
		f_{b1} [Гц]	1200
		ξ [-]	0.8
Сенсор (датчик переміщення)	$G_{sense}(s) = (u_{max} - u_{min}) / m_r / (s / (2\pi f_{b2}) + 1)$	u_{min} [В]	-25
		u_{max} [В]	25
		m_r [м]	0.001
		f_{b2} [Гц]	8000
Модель затримки вибірки	$G_{delay}(s) \approx (24\tau^2 s^2 + 240) / (\tau^3 s^3 + 12\tau^2 s^2 + 60\tau s + 120) - 1$	τ [мкс]	100
Фільтр згладжування	$G_{aa}(s) = \alpha^2 s^2 / (4\pi^2 f^2) / (s^2 / (4\pi^2 f^2) + 2\beta s / (2\pi f) + 1)$	α [-]	0.95
		β [-]	0.05
		f [Гц]	100

Фільтр згладжування низьких частот другого порядку використовується для підготовки сигналу з сенсора перед тим, як їх дискретизує пропорційно-інтегрально-похідний контролер.

Значення параметрів, наведені в таблиці, використовуються для подальшого розгляду випадку ротора в активних магнітних підшипниках.

1.3. Модель динаміки ротора. Модель динаміки гнучкого ротора, що обертається зі швидкістю Ω , для

скінченно-елементного формулювання описується матричною формою рівнянь рівноваги, включаючи матриці маси $[M]$, демпфування $[C]$, гіроскопічної $[D]$ і жорсткості $[K]$, а також вектор переміщення $\{z\}$ та вектор вузлових сил $\{f\}$ [39]:

$$[M]\{d^2 z / dt^2\} + ([C] + \Omega[D])\{dz / dt\} + [K]\{z\} = \{f\}. \quad (6)$$

Для випадку аналізу синхронних коливань від дії дисбалансу системи «ротор в АМП» вектор вузлових сил можна розділити на сили дисбалансу $\{f_u\}$ і сили в активному магнітному підшипнику $\{f_{AMP}\}$:

$$\{f\} = \{f_u\} + \{f_{AMP}\}. \quad (7)$$

Зв'язок між глобальним вектором сили АМП $\{f_{AMP}\}$ і локальним вектором сили у підшипнику $\{f_a\}$ описується матрицею перетворення «від локального до глобального» $[T_A]$:

$$\{f_{AMP}\} = [T_A]^T \{f_a\}. \quad (8)$$

Ця сама матриця також переводить локальний вектор переміщення в місцях актуаторів $\{z_a\}$ в глобальний вектор переміщення $\{z\}$:

$$\{z_a\} = [T_A]\{z\}. \quad (9)$$

Вектор локальної сили підшипника $\{f_a\}$ загалом є нелінійною функцією керуючих струмів у підшипниках $\{i_a\}$ та вектора локального переміщення в місцях розташування актуаторів $\{z_a\}$. Розгляд малих відхилень навколо точки статичної рівноваги дозволяє спростити цю функцію до лінеаризованої форми:

$$\{f_a\} = k_s \{z_a\} - k_i \{i_a\}. \quad (10)$$

Коефіцієнт підсилення актуатора k_i та номінальна жорсткість актуатора k_s залежать від параметрів актуатора, включаючи магнітну проникність вакууму $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, кількість витків котушок на магніті N , площу поперечного перерізу полюса A , половину кута між двома полюсами θ , струм зміщення i_b і номінальний повітряний зазор s_0 [40; 41]:

$$k_i = (\mu_0 N^2 A \cos \theta i_b) / s_0^2, \quad k_s = -(k_i i_b \cos \theta) / s_0. \quad (11)$$

Струм зміщення i_b визначається на основі необхідного цільового значення жорсткості АМП k_i :

$$i_b = (s_0^3 k_i / (\mu_0 N^2 A \cos \theta (1 + \cos \theta)))^{(1/2)}. \quad (12)$$

Отже, вектор сили АМП можна переписати:

$$\{f_{AMP}\} = [T_A]^T (k_s \{z_a\} - k_i \{i_a\}). \quad (13)$$

Нехтуючи динамікою підсилювача, розглянутою у виразі G_{amp} у Таблиці 1, і припускаючи, що актуатори та відповідні їм сенсори розташовані в одних і тих же місцях, що означає, що $\{y_{sense}\} = \{z_a\}$ (сигнали зміщення в місцях розташування сенсорів дорівнюють переміщенням у місцях розташування актуаторів), рівняння (5) може бути виражене в локальній векторній формі як:

$$\{i_a\} = [G(s)]\{z_a\}, \quad (14)$$

де $[G(s)]$ є діагональною матрицею у випадку керування SISO з діагональними компонентами, що дорівнюють передатним функціям з рівняння (5) з параметрами, індивідуальними для кожного напрямку в кожному АМП (для двох радіальних АМП з двома керованими напрямками це діагональна матриця 4×4).

Якщо далі припустити, що структура АМП однакова в горизонтальному та вертикальному напрямках, а система керування налаштована на еквівалентний зворотний зв'язок у горизонтальному та вертикальному напрямках, це дозволить вважати всі діагональні компоненти в матриці $[G(s)]$ рівними один до одного, і вираз (14) буде спрощений:

$$\{i_a\} = G(s)\{z_a\}, \quad (15)$$

Підставляючи рівняння (7), (13) і (15) у (6) з переходом від змінної перетворення Лапласа до змінної частоти збудження $s = j\omega$, отримуємо:

$$[M]\{d^2z/dt^2\} + ([C] + \Omega[D])\{dz/dt\} + [K]\{z\} - k_s[T_A]^T[T_A]\{z\} + k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A]\{z\} = \{f_u\}. \quad (16)$$

Тут $j = (-1)^{(1/2)}$ – уявна одиниця. В цьому рівнянні єдиним комплексним членом є $k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A] = \Re(k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A]) + j\Im(k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A])$. Оскільки дисбаланс ротора є різновидом гармонічного відгуку ротора через гармонічну силу $\{f_u\} = \Re(\{F_u\}e^{j\omega t})$ з частотою збудження, що збігається зі швидкістю обертання, розв'язок рівняння (16) можна шукати в тій же формі $\{z\} = \Re(\{Z\}e^{j\omega t})$. Підстановка цих форм у рівняння дає наступну зміну:

$$(-\omega^2[M]\{Z\} + j\omega([C] + \Omega[D])\{Z\} + [K]\{Z\} - k_s[T_A]^T[T_A]\{Z\} + k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A]\{Z\})e^{j\omega t} = \{F_u\}e^{j\omega t}. \quad (17)$$

Спрощення та перестановка цього виразу дає:

$$-\omega^2[M]\{Z\} + j\omega([C] + \Omega[D]) + \Re(k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A])\{Z\} + ([K] - k_s[T_A]^T[T_A] + \Im(k_tG(j\omega)[T_A]^T[T_A]))\{Z\} = \{F_u\}. \quad (18)$$

Додаткові доданки у другому та третьому членах рівняння рівноваги представляють впливи активних магнітних підшипників на систему ротора. Оскільки вони є доданками до матриць жорсткості та демпфування ротора, їх можна розглядати як матриці жорсткості та демпфування активних магнітних підшипників, які записуються у такій формі:

$$[K_{AMP}] = (-k_s + \Re(k_tG(j\omega)))[T_A]^T[T_A]; \quad (19)$$

$$[C_{AMP}] = \Im(k_tG(j\omega))/\omega [T_A]^T[T_A].$$

Враховуючи однакові параметри для кожного напрямку кожного АМП і той факт, що частота збудження дорівнює швидкості обертання Ω для синхронних коливань ротора від дії дисбалансу, їхню жорсткість і демпфування в обох напрямках можна розрахувати:

$$k_{AMP} = -k_s + k_t\Re(G(j\omega)); \quad (20)$$

$$c_{AMP} = k_t\Im(G(j\omega))/\omega.$$

Ці прості співвідношення використовуються для розрахунку критичних швидкостей ротора, щоб представити ротор в АМП як у пружинно-демпферних елементах із властивостями, які залежать від швидкості обертання.

2. Дослідження ротора в АМП.

2.1. Передумови використання АМП у роторі.

У роботі [5] розглянуто ротор осевого промислового вентилятора, зображеного на рисунку 1, для визначення його статичної міцності та модальних характеристик на основі тривимірного скінченно-елементного підходу, який дозволяє розрахувати форми коливань, пов'язані з рухом лопаток, диску, валу тощо. Однак у цій статті розглядалися лише перші шість власних частот, які не були пов'язані з коливаннями вала, а підшипники були змодельовані як жорсткі, оскільки власні частоти динаміки ротора були вищими за розглянуті власні частоти.

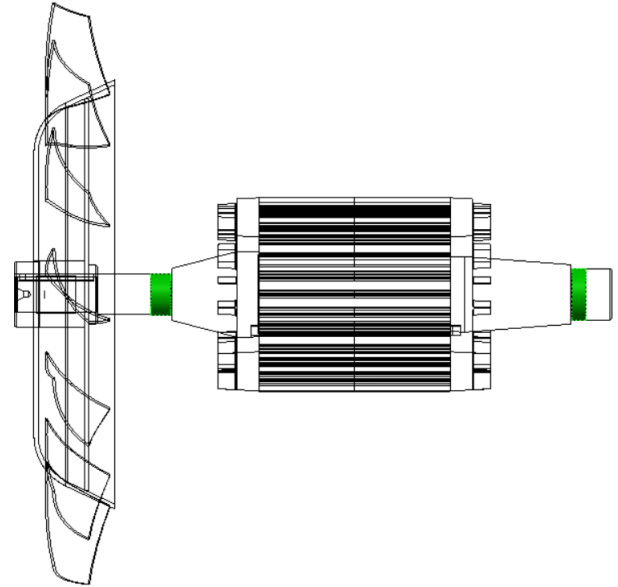


Рис. 1 – Модель ротора з місцями підшипників (зелені)

У проведеному аналізі міцності не враховувалося значне зниження ефективності машини через збільшення втрат на тертя в підшипниках кочення, оскільки це не було предметом цього дослідження. Однак через недовантаження підшипників виникло прослизання тіл кочення, що призвело до необхідності використання збільшеного зазору, але не вирішило питання впливу підшипників кочення на ефективність машини.

Щоб подолати цю проблему, було запропоновано використовувати просту схему опори активного магнітного підшипника з PID-регулюванням SISO, реалізація якої відносно дешева порівняно з розширеними цифровими схемами MIMO, але повинна дати бажану перевагу зменшення втрат на тертя в опорах і має можливість керувати резонансами ротора, які можуть виникати внаслідок переходу від підшипників кочення до активних магнітних підшипників.

2.2. Вхідні параметри для аналізу динаміки ротора. Параметри збірки «Ротор в АМП», що стосуються обертової та електромагнітної частин, представлені в таблиці 2 (струм зміщення змінюється з метою оптимізації).

Таблиця 2 – Властивості АМП та ротора

Компонент	Властивість		
	Назва	Параметр	Значення
Електромагніт	Кількість витків	$N, [-]$	88
	Площа перерізу полюса	$A, [мм^2]$	675
	Кут між полюсами	$2\theta, [^\circ]$	45
	Струм зміщення	$i_b, [A]$	4..8
Актуатор	Коефіцієнт посилення	$k_i, [H/A]$	388..777
	Номинальна жорсткість	$k_s, [MN/m]$	5.74..23
	Номинальний зазор	$s_0, [mm]$	0.25
Ротор	Маса	$m, [kg]$	161
	Діаметральний МІ*	$I_d, [kg \cdot m^2]$	7.154
	Полярний МІ*	$I_p, [kg \cdot m^2]$	2.445
	Розташування ЦВ*	$x_{ЦВ}, [mm]$	337.32
	Діаметр переднього АМП	$D_{П}, [mm]$	55
	Діаметр заднього АМП	$D_3, [mm]$	69.4
	Відстань між АМП	$x_b, [mm]$	594
	Цільова жорсткість АМП	$k_t, [MN/m]$	11..44
	Номинальна швидкість	$\Omega_{ном}, [об/хв]$	3000

*МІ – момент інерції, ЦВ – центр ваги.

Ці параметри разом з передавальними функціями у таблиці 1 використовуються при розрахунках динамічного відгуку збірки «Ротор в АМП».

2.3. Розрахункова модель ротора в АМП.

Тривимірна скінченно-елементна (СЕ) модель, показана на рисунку 2, була створена для розрахунку динамічного відгуку ротора в активних магнітних підшипниках, змодельованих як пружинно-демпферні елементи, з використанням коефіцієнтів жорсткості та демпфування.

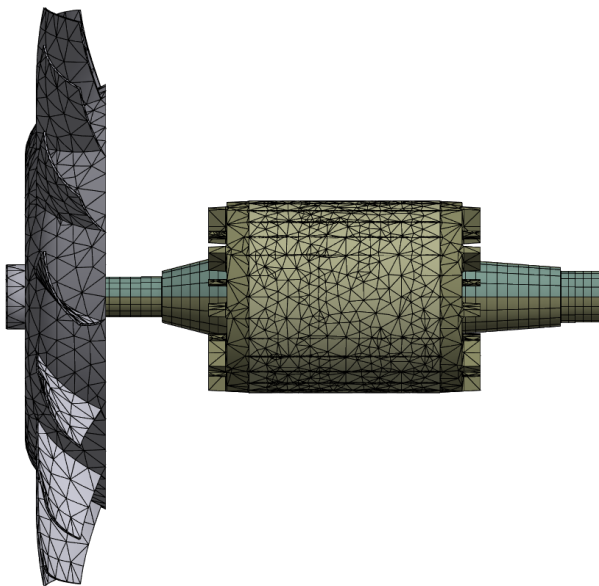


Рис. 2 – СЕ модель ротора для розрахунків

Геометричну модель ротора було модифіковано шляхом спрощення частин, менш важливих для динамічної поведінки ротора як основного фокусу дослідження, щоб зменшити розмір скінченно-елементної моделі, що має 243175 вузлів і 135623 квадратичних скінченних елементів у формі тетраєдрів, пірамід та шестигранників, приділяючи особливу увагу до створення впорядкованої сітки для валу як найбільш відповідальної частини для моделювання динамічної поведінки ротора та вільної сітки для зосереджених елементів, які можуть

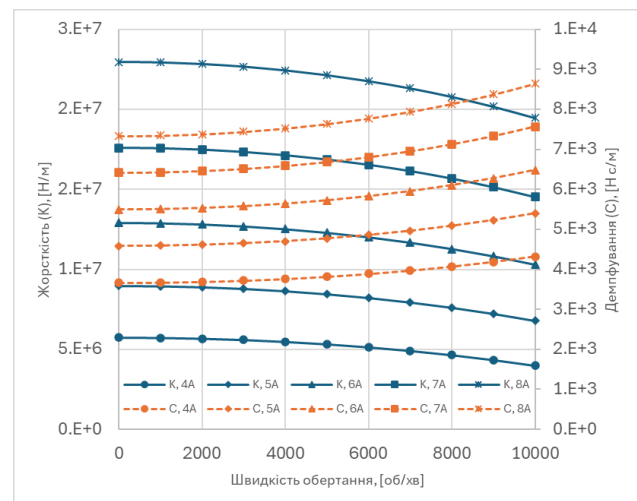
правильно представити їхні розподілені масово-інерційні властивості (похибка сітки менше ніж 2%).

Відповідно до оцінки, зробленої в [5], реакції переднього та заднього підшипників становили приблизно 1000 Н та 500 Н відповідно, що вимагало вибору електромагніту для забезпечення потрібної несучої здатності. У джерелі [27] представлено поглиблене дослідження ротора в АМП з електромагнітами із несучою здатністю 2400 Н, що задовольняло вимоги до поточного ротора. Виходячи з цього, більшість параметрів, наведених у таблиці 1 і таблиці 2, були обрані відповідно до цього джерела з деякою поправкою на розмір і модальні характеристики досліджуваної конструкції. Це відноситься до використання фільтра низьких частот другого порядку для відсікання критичної швидкості обертання ротора, яка дорівнює 113 об/с.

3. Результати та обговорення.

3.1. Жорсткість та демпфування АМП.

Незважаючи на те, що номінальна швидкість ротора становить 3000 об/хв, коефіцієнти жорсткості та демпфування активних магнітних підшипників були розраховані до 10000 об/хв, щоб дати уявлення про можливі резонанси через наявність форм коливань ротора як твердого тіла та для різних значень струму зміщення, щоб знайти оптимальні параметри АМП. Рисунок 3 показує залежність цих коефіцієнтів від швидкості обертання ротора. Вона використовується для розрахунку критичних швидкостей ротора у пружинно-демпферних елементах із прямим коефіцієнтами жорсткості та демпфування.

Рис. 3 – Жорсткість та демпфування АМП в залежності від швидкості обертання для $i_b = 4 \text{ A}..8 \text{ A}$

3.2. Динаміка ротора в АМП.

Як згадувалося в попередньому абзаці, розрахунок жорсткості та демпфування АМП проводився для змінного струму зміщення, що дозволило визначити критичні швидкості (КШ) ротора зворотної прецесії (ЗП) і прямої прецесії (ПП) для цього варіанту, показаного на рисунку 4, і необхідне значення струму зміщення, щоб не було резонансів у діапазоні частоти обертання.

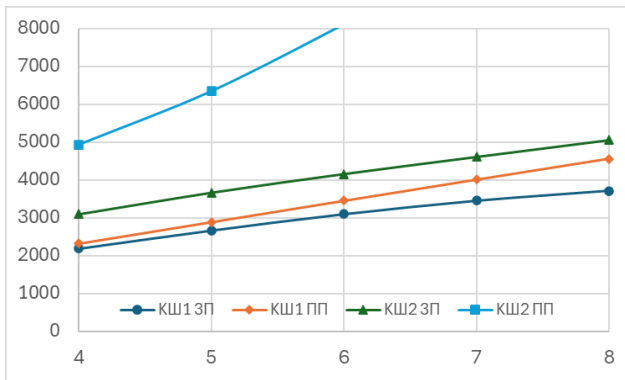


Рис. 4 – Залежність перших двох КШ, [об/хв] для 3П та 4П від струму зміщення, [А]

Як впливає з рисунка, струм зміщення 8 А призводить до 20% запасу вище номінальної швидкості обертання (ШО) ротора відносно перших КШ, що відповідають прямій та зворотній прецесії, що робить його жорстким (під час пусків і зупинок ротора не виникає резонансів). На рисунку 5 показана діаграма Кемпбелла для цього значення струму зміщення з відповідними формами коливань (ФК).

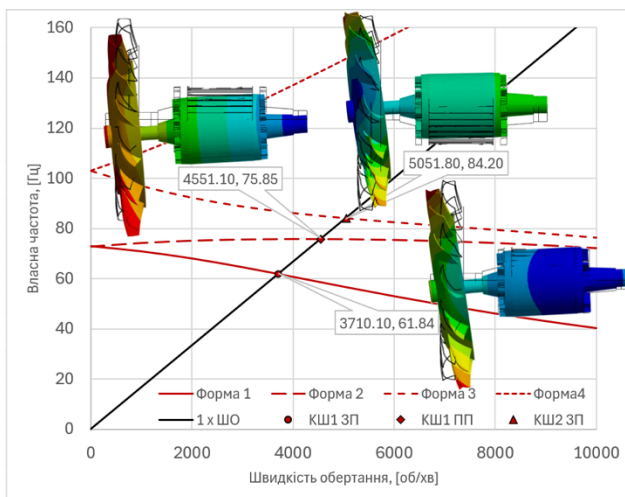


Рис. 5 – Діаграма Кемпбелла для АМП з коефіцієнтам жорсткості та демпфування, визначеними для $i_b = 8$ А

Перші КШ, що відповідають зворотній і прямій прецесії та пов'язані з комбінованими режимами коливань ротора як твердого та гнучкого тіла, становлять приблизно 3710 об/хв та 4551 об/хв відповідно, що дозволяє зробити висновок, що використання АМП з вибраними параметрами в роторі призводить до його нерезонансної роботи для всього діапазону швидкостей обертання.

Висновки. У роботі представлено підхід, який дозволяє ідентифікувати коефіцієнти жорсткості і демпфування активних магнітних підшипників для їх використання в розрахунках динаміки ротора з метою обґрунтування можливості впровадження АМП в існуючу роторну машину для підвищення її ефективності, яка знизилася через неефективну роботу підшипників кочення. Підхід базується на розгляді динаміки компонентів АМП у вигляді відповідних передавальних функцій. Результати динамічного

відгуку ротора машини, встановленої в активних магнітних підшипниках з PID-регулюванням SISO та іншими параметрами, спеціально налаштованими для розглянутої конструкції, вказують на нерезонансну роботу ротора промислового вентилятора в АМП, що дозволяє подальше використання цих підшипників для підвищення ККД розглянутого вентилятора приблизно на 10% за рахунок переходу від підшипників кочення до безфрикційних АМП.

Фінансування. Це дослідження підтримано та частково профінансовано Національним фондом досліджень України (грант НФДУ № 2023.03/0255).

Список літератури

1. Martynenko G. Numerical simulation of missile warhead operation / G. Martynenko, M. Chernobryvko, K. Avramov, V. Martynenko, A. Tonkonozhenko, V. Kozharin, D. Klymenko // *Advances in Engineering Software*. – 2018. – Vol. 123. – P. 93-103. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.07.001>
2. Merculov V. Peculiarities of the Modelling of the Bird Dynamic Impact on Fan Blades of an Aircraft Turbojet Engine at Operating Modes / V. Merculov, M. Kostin, G. Martynenko, N. Smetankina, V. Martynenko // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2022. – Vol. 367. – P. 462-473. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94259-5_39
3. Merculov V. Force Simulation of Bird Strike Issues of Aircraft Turbojet Engine Fan Blades / V. Merculov, M. Kostin, G. Martynenko, N. Smetankina, V. Martynenko // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2022. – Vol. 305. – P. 129-141. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83368-8_13
4. Merculov V. Improving the accuracy of the behaviour simulation of the material of the turbojet aircraft engine fan rotor blades in the event of a bird strike by using adapted finite element computational models / V. Merculov, M. Kostin, G. Martynenko, N. Smetankina, V. Martynenko // *Mater Today Proceedings*. – 2022. – Vol. 59. – P. 1797-1803. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.381>
5. Martynenko V. Analysis of Strength and Bearing Capacity of the Auxiliary Mine Ventilation Fan Connected to the Rotor of Its Electrical Drive / V. Martynenko // *2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2020. – P. 19-23. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250078>
6. Martynenko G. Identification of Computational Models of the Dynamics of Gas Turbine Unit Rotors with Magnetic Bearings by Incomplete Data for Design Automation / G. Martynenko, V. Martynenko // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2021. – Vol. 188. – P. 451-463. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_38
7. Martynenko G. Computer Modeling and Simulation Analysis of Linear and Nonlinear Phenomena of Rotor Dynamics in Systems with Magnetic Bearings / G. Martynenko, V. Martynenko // *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2021. – P. 213-217. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570097>
8. Moon F. C. Superconducting levitation: applications to bearings and magnetic transportation / F. C. Moon, P.-Z. Chang. – Weinheim: Wiley, 2008. – 310 p.
9. Martynenko G. Permanent Magnets with Magnetizing Winding for Varying Mechanical Stiffness / G. Martynenko, V. Martynenko // *2021 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems*. – Kremenchuk: Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, 2021. – P. 1-6. <https://doi.org/10.1109/MEES52427.2021.9598716>
10. Weise D. An Introduction and Case History Review of Active Magnetic Bearings / D. Weise, F. Pinckley // *Proceedings of the Eighteenth Turbomachinery Symposium*. – Texas: Texas A&M University, 1989. – P. 121-126.
11. Schweitzer G. Active magnetic bearings-chances and limitations / G. Schweitzer // *6th International Conference on Rotor Dynamics*. – Sydney: The University of New South Wales, 2002. – P. 1-14.
12. Masala A. Lateral Rotordynamic Analysis and Testing of a Vertical High Speed 12.5MW Motorcompressor / A. Masala, G. Vannini, M. Lacour, F.-M. Tassel, M. Camatti // *12th International Symposium on Magnetic Bearings*. – Wuhan, 2010. – P. 8-13.

13. Park H. A study on structural design and analysis of small wind turbine blade with natural fibre(flax) composite / H. Park // *Advanced Composite Materials*. – 2016. – Vol. 25, No. 2. P. 125-142. <https://doi.org/10.1080/09243046.2015.1052186>
14. Lee J.-Y. Sound and Vibration Signal Analysis using Improved Short-Time Fourier Representation / J.-Y. Lee // *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. – 2013. – Vol. 7. – P. 811-819. <https://doi.org/10.15282/ijame.7.2012.1.0066>
15. Duesterhaupt S. High temperature active magnetic bearings in industrial steam turbines / S. Duesterhaupt, H. Neumann, T. Rottenbach, C. Vanek, F. Worlitz // 15th International Symposium on Magnetic Bearings. – Kitakyushu: Mojiko hotel, 2018. – P. 50-57.
16. Khatri R. Design and Prototype Test Data for a 300 kW AMB-Supported Turbine Generator for Natural Gas Pressure Letdown / R. Khatri, L. Hawkins, M. Ortiz Neri, F. Cangiolli, D. Biliotti // *ASME Turbo Expo 2019*. – Phoenix: Phoenix Convention Center, 2019. – P. 1-11. <https://doi.org/10.1115/GT2019-91172>
17. Schweitzer G. Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings / G. Schweitzer // *IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics*. – New Delhi: Indian Institute of Technology, 2011. – P. 263-273. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0020-8_23
18. Kimman M. H. A miniature milling spindle with Active Magnetic Bearings / M. H. Kimman, H. H. Langen, R. H. Munnig Schmidt // *Mechatronics*. – 2010. – Vol. 20, No. 2. – P. 224-235. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.11.010>
19. Han B. Design aspects of a large scale turbomolecular pump with active magnetic bearings / B. Han, Z. Huang, Y. Le // *Vacuum*. – 2017. – Vol. 142. – P. 96-105. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2016.12.010>
20. Palazzolo A. B. Zero Gravity Test of a 40,000 RPM Flywheel / A. B. Palazzolo, E. Thomas, F. Little, J. Preuss, R. Tucker, A. Provenza // 13th International Symposium on Magnetic Bearings. – Arlington: University of Virginia, 2012. – P. 1-14.
21. Jin C. Active Magnetic Bearings Stiffness and Damping Identification from Frequency Characteristics of Control System / C. Jin, Y. Xu, J. Zhou, C. Cheng // *Shock and Vibration*. – 2016. – Vol. 2016. – P. 1-8. <https://doi.org/10.1155/2016/1067506>
22. Sun J. Dynamic Stiffness Analysis and Measurement of Radial Active Magnetic Bearing in Magnetically Suspended Molecular Pump / J. Sun, H. Zhou, Z. Ju // *Scientific Reports*. – 2020. – Vol. 10, No. 1. – P. 1-16. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-57523-8>
23. Li Y. Dynamics of magnetic suspension rotor system of turbo-expander / Y. Li, G. Lei, Y. Sun, L. Wang // *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. – 2017. – Vol. 54, No. 1. – P. 1-12. <https://doi.org/10.3233/JAE-160043>
24. Xu Y. Identification of dynamic stiffness and damping in active magnetic bearings using transfer functions of electrical control system / Y. Xu, J. Zhou, C. Jin // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2019. – Vol. 33, No. 2. – P. 571-577. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0110-y>
25. Tonoli A. Rotors on Active Magnetic Bearings: Modeling and Control Techniques / A. Tonoli, A. Bonfitto, M. Silvagni, L. D. Suarez // *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. – 2012. – P. 1-28. <https://doi.org/10.5772/51298>
26. Mushi S. E. Design, construction, and modeling of a flexible rotor active magnetic bearing test rig / S. E. Mushi, Z. Lin, P. E. Allaire // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. – 2012. – Vol. 17, No. 6. P. 1170-1182. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2011.2160456>
27. Schweitzer G. Magnetic bearings: Theory, design, and application to rotating machinery / G. Schweitzer, E. H. Maslen. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 535 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00497-1>
28. Betancor J. Radial active magnetic bearing design optimization / J. Betancor, M. N. Sahinkaya, Y. H. Zweiri // *Proceedings of the 10th International Conference on Rotor Dynamics – IFToMM. IFToMM 2018. Mechanisms and Machine Science*. – 2019. – Vol. 60. – P. 321-334. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99262-4_23
29. Achkar R. Neural Network's Implementation to Control An Active Magnetic Bearing / R. Achkar, C. Nasr, J. De Miras, A. Charara // *10th International Symposium on Magnetic Bearings*. – Martigny, 2006. – P. 1-6.
30. Skogestad S. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design / S. Skogestad, I. Postlethwaite. – Chichester: Wiley, 2005 – 572 p.
31. Rai S. MIMO Repetitive Control of an Active Magnetic Bearing Spindle / S. Rai, G. Cavalier, J. Simonelli, T.-C. Tsao // *IFAC-PapersOnLine*. – 2016. – Vol. 49, No. 21. – P. 192-199. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.545>
32. Glover K. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity / K. Glover, J.C. Doyle // *Systems & Control Letters*. – 1988. – Vol. 11, No. 3. – P. 167-172. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90055-2)
33. Yue A. Improvement of helicopter handling qualities using H^∞ -optimisation / A. Yue, I. Postlethwaite // *IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. – 1990. – Vol. 137, No. 3. – P. 115. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1990.0016>
34. Gosiewski Z. Robust control of active magnetic suspension: Analytical and experimental results / Z. Gosiewski, A. Mystkowski // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2008. – Vol. 22, No. 6. – P. 1297-1303. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2007.08.005>
35. Gu D.-W. Robust Control Design with MATLAB® / D.-W. Gu, P.H. Petkov, M.M. Konstantinov. – London: Springer London, 2013. – 468 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4682-7>
36. Mushi S. E. Design, Construction, and Modeling of a Flexible Rotor Active Magnetic Bearing Test Rig / S. E. Mushi, Z. Lin, P. E. Allaire // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. – 2012. – Vol. 17, No. 6. – P. 1170-1182. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2011.2160456>
37. Liu Y. Research on Automatic Balance Control of Active Magnetic Bearing-Rigid Rotor System / Y. Liu, S. Ming, S. Zhao, J. Han, Y. Ma // *Shock and Vibration*. – 2019. – Vol. 2019. – P. 1-13. <https://doi.org/10.1155/2019/3094215>
38. Yoon S. Y. Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings / S. Y. Yoon, Z. Lin, P. E. Allaire. – London: Springer London, 2013. – 275 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4240-9>
39. Vollan A. Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method / A. Vollan, L. Komzsik. – Boca Raton: CRC Press, 2012. – 296 p. <https://doi.org/10.1201/b11765>
40. Chiba A. Magnetic Bearings and Bearingless Drives / A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, M. Oshima, M. Takemoto, D.G. Dorrell. – Oxford: Elsevier, 2005. – 381 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5727-3.X5000-7>
41. Polajžer B. Magnetic Bearings, Theory and Applications / B. Polajžer. – Heidelberg: Springer Berlin, 2010. – 535 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00497-1>

References (transliterated)

1. Martynenko G., Chernobryvko M., Avramov K., Martynenko V., Tonkonozhenko A., Kozharin V., Klymenko D. Numerical simulation of missile warhead operation. *Advances in Engineering Software*. 2018, vol. 123, pp. 93-103. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.07.001>
2. Merculov V., Kostin M., Martynenko G., Smetankina N., Martynenko V. Peculiarities of the Modelling of the Bird Dynamic Impact on Fan Blades of an Aircraft Turbojet Engine at Operating Modes. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022, vol. 367, pp. 462-473. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94259-5_39
3. Merculov V., Kostin M., Martynenko G., Smetankina N., Martynenko V. Force Simulation of Bird Strike Issues of Aircraft Turbojet Engine Fan Blades. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022, vol. 305, pp. 129-141. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83368-8_13
4. Merculov V., Kostin M., Martynenko G., Smetankina N., Martynenko V. Improving the accuracy of the behaviour simulation of the material of the turbojet aircraft engine fan rotor blades in the event of a bird strike by using adapted finite element computational models. *Mater Today Proceedings*. 2022, vol. 59, pp. 1797-1803. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.381>
5. Martynenko V. Analysis of Strength and Bearing Capacity of the Auxiliary Mine Ventilation Fan Connected to the Rotor of Its Electrical Drive. *2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology*. Kharkiv, NTU “KhPI”, 2020, P. 19-23. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250078>
6. Martynenko G., Martynenko V. Identification of Computational Models of the Dynamics of Gas Turbine Unit Rotors with Magnetic Bearings by Incomplete Data for Design Automation. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2021, vol. 188, pp. 451-463. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_38

7. Martynenko G., Martynenko V. Computer Modeling and Simulation Analysis of Linear and Nonlinear Phenomena of Rotor Dynamics in Systems with Magnetic Bearings. *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. Kharkiv, NTU "KhPI", 2021, pp. 213-217. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570097>
8. Moon F.C., Chang P.-Z. Superconducting levitation: applications to bearings and magnetic transportation. Weinheim, Wiley, 2008. 310 p.
9. Martynenko G., Martynenko V. Permanent Magnets with Magnetizing Winding for Varying Mechanical Stiffness. *2021 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems*. Kremenchuk, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, 2021, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1109/MEES52427.2021.9598716>.
10. Weise D., Pinckley F. An Introduction and Case History Review of Active Magnetic Bearings. *Proceedings of the Eighteenth Turbomachinery Symposium*. Texas, Texas A&M University, 1989, pp. 121-126.
11. Schweitzer G. Active magnetic bearings-chances and limitations. *6th International Conference on Rotor Dynamics*. Sydney, the University of New South Wales, 2002, pp. 1-14.
12. Masala A., Vannini G., Lacour M., Tassel F.-M., Camatti M. Lateral Rotordynamic Analysis and Testing of a Vertical High Speed 12.5MW Motorcompressor. *12th International Symposium on Magnetic Bearings*. Wuhan, 2010, pp. 8-13.
13. Park H. A study on structural design and analysis of small wind turbine blade with natural fibre(flax) composite. *Advanced Composite Materials*. 2016, vol. 25, no. 2, pp. 125-142. <https://doi.org/10.1080/09243046.2015.1052186>
14. Lee J.-Y. Sound and Vibration Signal Analysis using Improved Short-Time Fourier Representation. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. 2013, vol. 7, pp. 811-819. <https://doi.org/10.15282/ijame.7.2012.1.0066>
15. Duesterhaupt S., Neumann H., Rottenbach T., Vanek C., Worlitz F. High temperature active magnetic bearings in industrial steam turbines. *15th International Symposium on Magnetic Bearings*. Kitakyushu, Mojiko hotel, 2018, pp. 50-57.
16. Khatri R., Hawkins L., Ortiz Neri M., Cangioli F., Biliotti D. Design and Prototype Test Data for a 300 kW AMB-Supported Turbine Generator for Natural Gas Pressure Letdown. *ASME Turbo Expo 2019*. Phoenix, Phoenix Convention Center, 2019, pp. 1-11. <https://doi.org/10.1115/GT2019-91172>
17. Schweitzer G. Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings. *IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics*. New Delhi, Indian Institute of Technology, 2011, pp. 263-273. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0020-8_23
18. Kimman M. H., Langen H. H., Munnig Schmidt R. H. A miniature milling spindle with Active Magnetic Bearings. *Mechatronics*. 2010, vol. 20, no. 2, pp. 224-235. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.11.010>
19. Han B., Huang Z., Le Y. Design aspects of a large scale turbomolecular pump with active magnetic bearings. *Vacuum*. 2017, vol. 142, pp. 96-105. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2016.12.010>
20. Palazzolo A. B., Thomas E., Little F., Preuss J., Tucker R., Provenza A. Zero Gravity Test of a 40,000 RPM Flywheel. *13th International Symposium on Magnetic Bearings*. Arlington, University of Virginia, 2012, pp. 1-14.
21. Jin C., Xu Y., Zhou J., Cheng C. Active Magnetic Bearings Stiffness and Damping Identification from Frequency Characteristics of Control System. *Shock and Vibration*. 2016, vol. 2016, pp. 1-8. <https://doi.org/10.1155/2016/1067506>
22. Sun J., Zhou H., Ju Z. Dynamic Stiffness Analysis and Measurement of Radial Active Magnetic Bearing in Magnetically Suspended Molecular Pump. *Scientific Reports*. 2020, vol. 10, no. 1, pp. 1-16. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-57523-8>
23. Li Y., Lei G., Sun Y., Wang L. Dynamics of magnetic suspension rotor system of turbo-expander. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2017, vol. 54, no. 1, pp. 1-12. <https://doi.org/10.3233/JAE-160043>
24. Xu Y., Zhou J., Jin C. Identification of dynamic stiffness and damping in active magnetic bearings using transfer functions of electrical control system. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2019, vol. 33, no. 2, pp. 571-577. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0110-y>
25. Tonoli A., Bonfitto A., Silvagni M., Suarez L. D. Rotors on Active Magnetic Bearings: Modeling and Control Techniques. *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. 2012, pp. 1-28. <https://doi.org/10.5772/51298>
26. Mushi S. E., Lin Z., Allaire P. E. Design, construction, and modeling of a flexible rotor active magnetic bearing test rig. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2012, vol. 17, no. 6, pp. 1170-1182. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2011.2160456>
27. Schweitzer G., Maslen E. H. *Magnetic bearings: Theory, design, and application to rotating machinery*. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 535 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00497-1>
28. Betancor J., Sahinkaya M. N., Zweiri Y. H. Radial active magnetic bearing design optimization. *Proceedings of the 10th International Conference on Rotor Dynamics – IFTOMM. IFTOMM 2018. Mechanisms and Machine Science*. 2019, vol. 60, pp. 321-334. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99262-4_23
29. Achkar R., Nasr C., De Miras J., Charara A. Neural Network's Implementation to Control An Active Magnetic Bearing. *10th International Symposium on Magnetic Bearings*. Martigny, 2006, pp. 1-6.
30. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Chichester, Wiley, 2005. 572 p.
31. Rai S., Cavalier G., Simonelli J., Tsao T.-C. MIMO Repetitive Control of an Active Magnetic Bearing Spindle. *IFAC-PapersOnLine*. 2016, vol. 49, no. 21, pp. 192-199. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.545>
32. Glover K., Doyle J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*. 1988, vol. 11, no. 3, pp. 167-172. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90055-2)
33. Yue A. Improvement of helicopter handling qualities using H^∞ -optimisation / A. Yue, I. Postlethwaite // IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). – 1990. – Vol. 137, No. 3. – P. 115. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1990.0016>
34. Gosiewski Z., Mystkowski A. Robust control of active magnetic suspension: Analytical and experimental results. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2008, vol. 22, no. 6, pp. 1297-1303. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2007.08.005>
35. Gu D.-W., Petkov P.H., Konstantinov M. M. *Robust Control Design with MATLAB®*. London, Springer London, 2013. 468 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4682-7>
36. Mushi S.E., Lin Z., Allaire P.E. Design, Construction, and Modeling of a Flexible Rotor Active Magnetic Bearing Test Rig. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2012, vol. 17, no. 6, p. 1170-1182. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2011.2160456>
37. Liu Y., Ming S., Zhao S., Han J., Ma Y. Research on Automatic Balance Control of Active Magnetic Bearing-Rigid Rotor System. *Shock and Vibration*. 2019, vol. 2019, pp. 1-13. <https://doi.org/10.1155/2019/3094215>
38. Yoon S. Y., Lin Z., Allaire P. E. *Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings*. London, Springer London, 2013. 275 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4240-9>
39. Vollan A., Komzsik L. *Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method*. Boca Raton, CRC Press, 2012. 296 p. <https://doi.org/10.1201/b11765>
40. Chiba A., Fukao T., Ichikawa O., Oshima M., Takemoto M., Dorrell D.G. *Magnetic Bearings and Bearingless Drives*. Oxford, Elsevier, 2005. 381 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5727-3.X5000-7>
41. Polajžer B. *Magnetic Bearings, Theory and Applications*. Heidelberg, Springer Berlin, 2010. 535 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00497-1>

Надійшло (received) 15.10.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Мартиненко Володимир Геннадійович (Martynenko Volodymyr) – кандидат технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9471-0905>; e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com

Є. О. НЕМАНЕЖИН

АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ УМОВ РОБОТИ СУЧАСНИХ ЛОПАТОК ГАЗОВИХ ТУРБІН ТА ОГЛЯД МЕТОДІВ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЇХ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ МІЦНОСТІ

Предметом дослідження є сучасні методи та матеріали для виготовлення лопаток газових турбін, а також підходи та методи оцінки показників їх динамічної та статичної міцності в умовах високотемпературного навантаження. **Першою метою** статті постає опис основних способів виготовлення лопаток турбін, наведення прикладів використовуваних матеріалів та особливостей їх кристалічної структури. **Другою метою** матеріалу є огляд підходів для забезпечення параметрів динамічної та статичної міцності монокристалічних лопаток турбін, зокрема, відстроювання від небезпечних резонансних режимів, дослідження параметрів анізотропної повзучості, високотемпературної втомної довговічності та довготривалої міцності. **Задачею** статті є виділення основних переваг та недоліків існуючих способів, підходів та методів оцінки та забезпечення параметрів високотемпературної міцності лопаток турбін в умовах статичних та динамічних навантажень, з метою обрання цілей подальших досліджень. **Методи**, що використовувалися про створенні публікації: методи аналізу та порівняння, що застосовувалися при пошуку та співставленні відкритих літературних джерел інформації згідно мети статті, а також метод дедукції, що використовувався при виділенні основних недоліків існуючих методів оцінки високотемпературної міцності лопаток газових турбін в умовах статичних та динамічних навантажень для намічання цілей подальших досліджень. Отримано наступні **результати**. Проаналізовані літературні джерела, що стосуються методів виготовлення лопаток турбін, а саме спрямованої кристалізації та монокристалічного лиття. Підкреслені переваги монокристалічних сплавів для виготовлення лопаток турбін, а саме підвищені жароміцність, жаростійкість, втомна міцність, довговічність та тріщиностійкість. Проаналізовані та описані основні сучасні методи оцінки високотемпературної міцності лопаток газових турбін з урахуванням анізотропних характеристик монокристалічних сплавів. **Висновки**. У наведеній публікації представлено відомості про лопатки газових турбін, зокрема, надано змістовну інформацію про методи їх виготовлення, а також матеріали, що використовуються для їх отримання. У дослідженні проаналізовано та визначено основні пошкоджуючі впливи, що діють на лопатки газових турбін в процесі їх експлуатації. У матеріалі зазначені досягнення науковців, які розробили чисельні та експериментальні методи для оцінювання впливу анізотропних характеристик монокристалічних нікелевих жароміцних сплавів на показники втомної міцності, довговічності та повзучості лопаток турбін.

Ключові слова: ресурс, чисельні методи, напружено-деформований стан, термонапружений стан, міцність, відстроювання від небезпечних резонансних режимів, руйнування від повзучості, втомне руйнування, довговічність, математична модель, ортотропія властивостей, лопатки турбіни, авіаційний газотурбінний двигун.

Ye. O. NEMANEZHYN

ANALYSIS OF THE FEATURES OF THE OPERATING CONDITIONS OF MODERN GAS TURBINE BLADES AND REVIEW OF METHODS FOR DETERMINING THEIR HIGH-TEMPERATURE STRENGTH PARAMETERS

The subject of the study is modern methods and materials for the manufacture of gas turbine blades, as well as approaches and methods for assessing their dynamic and static strength under high-temperature loading. **The first purpose** of the article is to describe the main methods of manufacturing turbine blades, provide examples of the materials used and the features of their crystal structure. **The second purpose** of the article is to review approaches to ensuring the dynamic and static strength parameters of single-crystal turbine blades, in particular, to avoid dangerous resonance modes, to study the parameters of anisotropic creep, high-temperature fatigue life, and long-term strength. **The goal** of the article is to highlight the main advantages and disadvantages of existing methods, approaches and techniques for assessing and ensuring high-temperature strength parameters of turbine blades under static and dynamic loading, in order to select the objectives of further research. **Methods** used to create the publication: methods of analysis and comparison, which were used to search and compare open literature sources of information in accordance with the purpose of the article, as well as the method of deduction, which was used to identify the main shortcomings of existing methods for assessing the high-temperature strength of gas turbine blades under static and dynamic loading to outline the goals of further research. The following **results** have been obtained. Literature sources related to the methods of manufacturing turbine blades, namely, directional crystallization and single-crystal casting, were analyzed. The advantages of single-crystal alloys for the manufacture of turbine blades, namely increased heat strength, heat resistance, fatigue strength, durability and crack resistance, are emphasized. The main modern methods for assessing the high-temperature strength of gas turbine blades with regard to the anisotropic characteristics of single-crystal alloys are analyzed and described. **Conclusions**. This publication presents information about gas turbine blades, in particular, provides meaningful information about the methods of their manufacture, as well as the materials used to produce them. The study analyses and identifies the main damaging effects on gas turbine blades during their operation. The material describes the achievements of scientists who have developed numerical and experimental methods for assessing the impact of the anisotropic characteristics of single-crystal nickel heat-resistant alloys on the fatigue strength, durability and creep of turbine blades.

Keywords: resource, numerical methods, stress-strain state, thermal stress state, strength, detuning from dangerous resonant modes, creep rupture, fatigue rupture, durability, mathematical model, orthotropy of characteristics, turbine blades, aircraft gas turbine engine.

Вступ. Охолоджувані та не охолоджувані лопатки турбіни є одними з найважливіших деталей авіаційних газотурбінних двигунів, які працюють при високих навантаженнях від відцентрових сил і теплових напруженнях від високих температур [1; 2].

На етапі проектування лопаток газових турбін розглядаються та вводяться в їх конструкцію різні системи охолодження, теплозахисні та зносостійкі покриття, демпферні елементи. Також можуть відбуватися зміни у технології виготовлення лопаток турбін, а саме удосконалюються способи лиття,

зміцнюються хвостові частини, закладаються різні ремонтні технології. Всі ці конструктивні та технологічні особливості мають значний вплив на характеристики міцності лопаток газових турбін. На рис. 1 представлена схема створення та доводки типової сучасної охолоджуваної монокристалічної лопатки турбіни.

Розвиток авіаційних двигунів постійно пов'язаний з підвищенням температури паливо-повітряної суміші на вході в турбіну. Як наслідок, робоче середовище лопаток турбін стає все більш жорстким. Факторами,

що обмежують термін служби лопаток турбін є малоциклова втома, теплова втома, повзучість/втомні напруження, тепла корозія, ерозія та інше. Зокрема, комбінація малоциклової та теплової втоми, повзучості може призвести до термомеханічної втоми, яка є одною з головних причин виходу з ладу лопаток турбін [3; 4]. Лопатки газової турбіни охолоджуються всередині шляхом пропускання охолоджуючого повітря через ребра змієподібних проходів для відведення тепла, проведеного зовнішньою поверхнею. Зовнішнє охолодження лопаток турбін досягається шляхом нагнітання відносно більш холодного повітря з внутрішнього проходу на поверхню лопатки з метою утворення захисного шару між поверхнею лопатки і потоком гарячого газу [5].

Градієнт температур у товщі стінок деталі, фазові перетворення, які можуть виникати при різних

швидкостях нагрівання і охолодження, також критично впливають на стійкість матеріалу при термомеханічному впливі. Розглянемо, зокрема, більш детально ті негативні фактори, які впливають на робочі лопатки турбіни. Газові турбіни використовують різноманітне паливо, включаючи важке та легке, яке містить хімічні елементи, такі як сірка, натрій, кальцій, ванадій, свинець та молібден. Паливо може бути причиною виникнення серйозних проблем, якщо воно забруднене соленою водою, або коли паливо переміщується в турбіну із забруднювачами повітря. Забруднене паливо, що містить сірку та натрій, призводить до утворення шкідливих домішок, які осідають на лопатках. Ці домішки можуть спричинити відкладення лужного сульфату металу на поверхні лопатки, що призводить до теплової корозії [6].

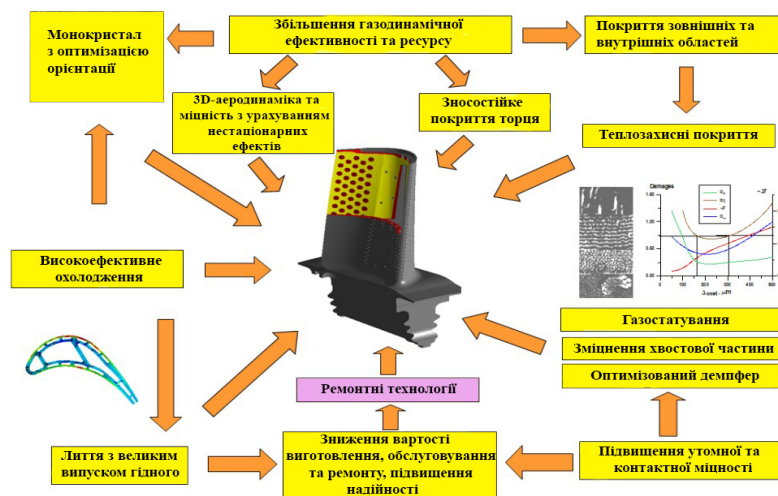


Рис. 1 – Схема створення і модернізації конструкції і технології виготовлення лопатки турбіни [1]

Турбінні лопатки підпадають під дію корозійного впливу. Гаряча корозія в турбінах поділяється на дві частини, а саме високотемпературну і низькотемпературну. Високотемпературна корозія виникає в діапазоні температур 800°C – 900°C, що характеризується морфологічно у вигляді товстих і пористих оксидів з матрицями сплавів, які по суті дренуються в хромі [7]. Гаряча корозія відбувається у два етапи, а саме в інкубаційному періоді, починаючи з низької швидкості корозії і потім швидкої корозійної атаки, що викликає пошкодження оксидного захисного шару лопатки [8].

Ще одним серйозним руйнівним фактором є ерозійний знос. Ерозія виникає через знос матеріалу лопатки твердими частинками абразивного матеріалу, які потрапляють до потоку. Частинки повинні мати діаметр більше 20 мкм, щоб викликати ударну ерозію. Великі частинки потрапляють в турбіну через різні середовища, такі як повітря, потік газу або шматки зламаних компонентів двигуна, які атакують поверхню лопатки і призводять до руйнування [9].

Для більш повної оцінки цілісності конструкції необхідне врахування комбінації впливів різних видів навантажень, яким піддаються лопатки турбіни в процесі своєї роботи, а саме:

– комбінація навантажень «втома – повзучість»: зазвичай вважається, що величина втоми за рахунок повзучості або релаксації збільшується, коли матеріал має низьку міцність при повзучості. Повзучість та пластичність також можна розглядати як обмежувальний параметр «втоми – повзучості»;

– вплив на втомну міцність навколишнього середовища: виникнення тріщин, особливо в разі впливу термічної втоми, має місце на поверхні матеріалу. На розвиток тріщини може впливати середовище на поверхні матеріалу [10].

Способи виготовлення лопаток газових турбін та проблематика вивчення їх характеристик міцності. На сьогоднішній день, у сучасних високотемпературних газових турбінах лопатки виготовляються методами спрямованої кристалізації (Directionally Solidified) та монокристалічного лиття (Single-Crystal Casting). Основними перевагами одержуваних способом монокристалічного лиття сплавів є збільшена міцність при повзучості за рахунок виключення границь між зернами і зменшена, в порівнянні зі матеріалами з полікристалічною структурою, величина модуля пружності в кристалографічному напрямку <001>, що значно

знижує термічні напруження і підвищує довговічність [11] (рис. 2).

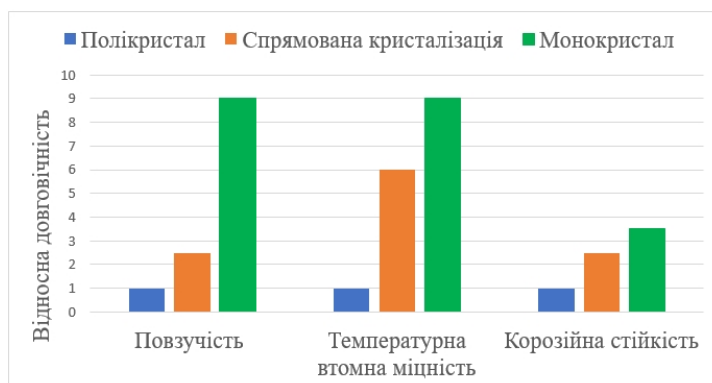


Рис. 2 – Порівняльні властивості полікристалічних, монокристалічних та сплавів спрямованої кристалізації за показником відносної довговічності [11]

Газові турбіни в основному експлуатуються за принципом «безпечного життєвого циклу», згідно якого двигун вилучається з експлуатації для технічного обслуговування задовго до того, як з'явиться імовірна поломка. Опис експериментів для лопаток турбін під дією механічного навантаження та повзучості на даний момент обмежений. Зростаюча суворість умов експлуатації газових турбін для досягнення більш високої ефективності викликала потребу в кращому розумінні характеристик матеріалу в більш реалістичних умовах [12].

Як зазначалося раніше, одним із методів виготовлення лопаток турбін є метод спрямованої кристалізації, або метод Стокбаргера-Бріджмена (Stockbarger-Bridgman method). Цей метод технічно простий і дозволяє вирощувати кристали заданого діаметра підбором відповідного тигля. Кристалізація може здійснюватися переміщенням контейнера через зону плавлення або плавним зниженням температури в умовах постійного градієнта температурного поля (кристалізація у вертикальному напрямку та горизонтальна спрямована кристалізація відповідно). У методі Стокбаргера-Бріджмена (Stockbarger-Bridgman method) найчастіше застосовується кристалізація при вертикальному переміщенні (згори донизу) контейнера з речовиною через зону плавлення. У цьому випадку тигель з шихтою повільно опускається з високотемпературної частини печі T_1 у низькотемпературну T_2 через діафрагму (рис. 3). Цей метод дозволяє вирощувати кристали як внаслідок спонтанного утворення зародків, так і з використанням затравок [13].

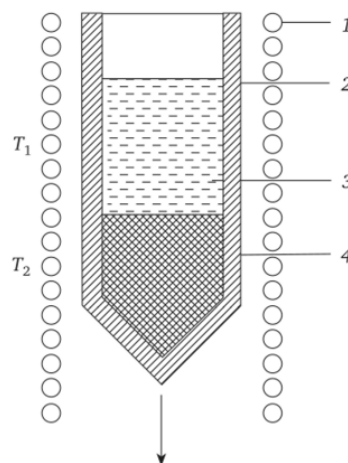


Рис. 3 – Схема методу спрямованої кристалізації: 1 – нагрівач; 2 – тигель; 3 – розплав; 4 – кристал [13]

До прикладів сплавів, виготовлених методом спрямованої кристалізації (СК) можна віднести: MAR-M247, CM 186LC, CM 247LC (США); Rene142 (Франція); ЖС-32ВНК (ЖС-32ВСНК) (Україна).

Більш прогресивним методом виготовлення лопаток турбін є монокристалічне лиття [14]. Завдяки такому способу отримуються лопатки, які містять у своїй структурі один макрокристал. Перевагою такої структури деталі, у порівнянні із полікристалічною, є відсутність границь зерен матеріалу, які являють собою осередок накопичення пошкоджень при динамічних навантаженнях. Також, організована макроструктура має підвищену жароміцність і жаростійкість, більш високу міцність до руйнування при повзучості, меншу чутливість до зародження тріщин (тріщиностійкість). Всі монокристалічні нікелеві жароміцні сплави на макрорівні є анізотропними (ортотропними), а точніше володіють властивостями кубічної симетрії.

При розробці феноменологічних моделей деформування, критеріїв міцності та довговічності матеріалів, монокристали можна умовно розглядати як матеріал з ідеальною гранецентрованою кубічною ґраткою. Прикладами таких матеріалів є сплави різних

поколінь, зокрема, із вітчизняних – матеріали ЖС-26ВІ, ЖС-32ВІ; із зарубіжних – матеріали виробництва американської компанії Canon Muskegon (філіал компанії S.N.E.C.M.A.) CMSX -2, CMSX-10, а також матеріал, розроблений підприємством Pratt & Whitney – PWA-1484 та матеріали японського виробництва TMS-75, TMS-82+.

Поряд із складнощами адекватного опису напружено-деформованого стану лопаток турбін виникають проблеми з експериментальним визначенням необхідних для використання в розрахунках міцності властивостей матеріалів. До них відносяться характеристики, які залежать від температури та кристалографічної орієнтації (КГО):

- 1) Параметри анізотропної пружності.
- 2) Втомна міцність та термічна міцність при змінних навантаженнях.
- 3) Повзучість на різних стадіях.
- 4) Залежності швидкості зростання тріщин від інтенсивності напружень.
- 5) Довготривала міцність та міцність при підвищених температурах.

Лопатки турбін працюють в умовах агресивних середовищ та навантаження відцентровими та газовими силами при високих температурах на стаціонарних та нестаціонарних режимах. Розрахунки напружено-деформованого стану та міцності таких лопаток необхідно проводити з урахуванням деформацій пружності, пластичності, повзучості та температурних деформацій, а також враховуючи зміни властивостей жароміцних сплавів, з яких виготовлені лопатки, у нерівномірному полі температур.

Дослідження питань оцінки динамічної міцності монокристалічних лопаток газових турбін. Динамічна міцність безпосередньо впливає на надійність та термін експлуатації двигуна, тому що більшість дефектів викликані дією динамічних напружень від стрибкоподібних навантажень, які різко зростають в умовах резонансу. Через високу навантаженість лопаток газових турбін існує актуальна необхідність оцінки та пошуку шляхів запобігання небезпечних резонансних режимів їх роботи у складі газотурбінної установки або двигуна [15].

При роботі двигуна на лопатки газових турбін діють сили, які періодично змінюються у часі. Якщо частота збуджуючих коливань співпадає із власною частотою коливань лопатки, то виникає явище, яке називається резонансом. В результаті появи резонансних коливань на будь-якому режимі роботи двигуна, напруження у лопаток різко збільшуються. Як наслідок, дуже важливою характеристикою лопаток є спектр їх власних частот коливань [16].

Проблематика дослідження впливу анізотропних властивостей монокристалічних лопаток (зокрема, різних КГО) на їх характеристики динамічної міцності підіймається у значній кількості публікацій.

Зокрема, можна виділити статті, які присвячені вивченню особливостей пружних характеристик залізо-нікелевих сплавів [17-19]. Авторський колектив у дослідженні [17] привів комплексну добірку пружних

властивостей сплавів на залізо-нікелевій основі. У матеріалі проведено дослідження модуля пружності Юнга, модуля зсуву, об'ємного модуля, коефіцієнту Пуассона монокристалу на залізо-нікелевій основі. Підібрано інформацію щодо зміни пружних констант залежно від вмісту різних хімічних складових матеріалу, температури робочого тіла, тиску, який діє на систему, магнітного поля системи, механічної деформації, термообробки та кристалографічних переходів. Інформація у статті розглядається з точки зору кристалографічної теорії та теорії пружності.

Дуже змістовна інформація надана у джерелах [18; 19]. Мова там йде про сплави на основі Ni_3Al , які мають відмінні механічні властивості і широко використовуються в військових і цивільних сферах. У цих дослідженнях приводяться дані, щодо конкретних механічних властивостей гранецентрованої кубічної структури Ni_3Al , які були отримані за допомогою вивчення принципів, заснованих на теорії функціоналу густини, а в якості обмінно-кореляційної функції використовувалася узагальнена градієнтна апроксимація. Об'ємний модуль, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга розраховано за допомогою використання методу апроксимації Фойгта-Ройса (Voight-Reuss).

Колектив авторів у статті [20] представив метод отримання пружних констант монокристалів на основі розрахунку із застосуванням лінійно-незалежних деформацій зв'язку у кристалі та одночасному виділенні повного набору констант пружності. За допомогою даного методу обчислювальні зусилля для отримання повного набору пружних констант (21 компонента для анізотропного тіла) кристала в заданому деформованому стані подібні до обчислювальних затрат на визначення об'ємного модуля. В якості прикладу апробації методики наведено обчислення монокристалічних пружних констант гексагонального осмію, кубічного алмазу, моноклінного сполучення Mg_2Si_6 та орторомбічного сполучення TiSi_2 .

У відкритих джерелах інформації містяться певні відомості про чисельні та експериментальні методи щодо відмежування від небезпечних резонансних частот та форм коливань, наприклад, як у джерелі [21]. В таких дослідженнях описується використання різноманітних способів відстроювання від резонансів для пом'якшення їх можливих шкідливих наслідків. Хоча ці публікації досить актуальні, у цілому вони не містять пропозицій щодо вирішення проблеми резонансу. Теоретично існує кілька варіантів запобігання резонансних коливань з великою амплітудою. Насамперед, зміна робочої швидкості обертання роторів двигуна може сприяти запобіганню небажаних форм коливань, але цей метод є дуже обмежувальним. Альтернативним шляхом виступає використання демпфера, який можна прикріпити до лопатки турбіни, щоб знизити загальний рівень напружень і амплітуду коливань [22]. У промисловому виробництві широко використовуються різні типи демпферів. Однак їх ефективність на високих частотах

сильно знижується. Ще одним способом уникнення резонансу є зміна конструкції самої лопатки, як запропоновано авторами публікації [23]. Цей метод досить ефективний і часто використовується на виробництві. Зворотною стороною його ефективності є те, що специфіка процесів модернізації лопаток майже повністю відсутня у відкритих джерелах у зв'язку з тим, що ці технології є комерційною таємницею спеціалізованих підприємств та виробництв. Методика керованого настроювання лопаток, описана у публікаціях [24; 25], використовує загальні відомі результати розв'язку проблеми небезпечних частот та форм коливань, і пропонує власну стратегію процесу модернізації конструкції лопатки. Але застосування цього методу обмежене для лопаток компресорів та вхідних пристроїв (вентиляторів) з ізотропними властивостями й тому не може бути застосоване до складних охолоджуваних жаростійких турбінних лопаток з анізотропними механічними характеристиками. Аналіз публікацій показав, що існує значний пробіл у застосуванні сучасних методів скінченно-елементного аналізу для визначення власних частот турбінних лопаток, виготовлених з монокристалічних сплавів. Зокрема, майже відсутні публікації по дослідженню впливу орієнтації кристалографічних осей на спектр власних частот охолоджуваних лопаток турбін [26].

Враховуючи, що використання скінченно-елементних програмних комплексів стає основним напрямком у практиці провідних виробників газових турбін, виникає нагальна потреба у розробці методів дослідження залежності впливу пружних властивостей монокристалічних лопаток турбін на їх власні частоти та форми коливань, а також розробка чисельних методів відмежування від небезпечних резонансів.

Основні підходи до аналізу анізотропної повзучості монокристалічних сплавів. Базовими характеристиками під час ресурсного проектування робочих лопаток авіаційних газотурбінних двигунів (АГТД) і енергетичних газотурбінних установок (ГТУ) є межі тривалої міцності та повзучості. Саме тому, безсумнівний інтерес представляє вивчення закономірностей зміни анізотропії механічних характеристик, які залежать від часу. Враховуючи умови експлуатації, що включають дуже високі температури та температурні градієнти, руйнування внаслідок накопичення деформацій повзучості стає однією з найважливіших проблем для турбінних лопаток [27].

Високотемпературні характеристики монокристалічних жароміцних матеріалів є результатом комбінованого впливу низки факторів, серед яких можна відмітити відсутність меж зерен та матрицю, яка складається з великої об'ємної частки кубічної γ' -фази у твердому розчині та зміщеної γ -матриці. Таке поєднання двофазної структури в межах одного кристала призводить до складних анізотропних властивостей повзучості. Моделювання анізотропії повзучості монокристалічних жароміцних матеріалів має велике значення для прогнозування перерозподілу

напружень та терміну служби деталей з цих матеріалів [28].

Численні роботи в областях повзучості анізотропних матеріалів, а також оцінки напружено-деформованого стану матеріалів можна знайти у багатьох публікаціях сучасних дослідників.

У наступних наукових трудах [29-33] наведено змістовні підходи до оцінки деформування матеріалу при повзучості:

1) У публікаціях [29-31] описуються математичні формулювання мікромеханічної моделі деформування анізотропних матеріалів при повзучості. Сформульовані для цієї моделі рівняння стосуються циклічних багатовісьових навантажень. У статтях особлива увага приділяється дослідженню металів та металічних сплавів. Процес формулювання моделі включає процес локалізації, який складається із оцінки напружень та деформацій у кожній октаедричній системі ковзання в процесі повзучості. Співвідношення між напруженнями і деформаціями досліджуються на мікромасштабі для кожної системи ковзання. Усі чисельні значення, отримані на мікрорівні, підсумовуються для отримання швидкості деформації матеріалу на макрорівні. Мікромеханічна модель деформування, описана авторами, може враховувати ефект накопичення деформацій у матеріалі, а також додаткове зміцнення, пов'язане з циклічністю та непропорційністю навантаження.

2) У публікації [32] авторами запропонована уніфікована феноменологічна модель циклічної в'язкопластичної деформації для анізотропних матеріалів. Стаття складається з двох частин. У першій частині обговорюються термодинамічні процеси при навантаженні, внаслідок яких проходять зміни внутрішнього стану матеріалу. Дослідники запропонували спеціальну форму представлення функції вільної енергії, отримали визначальні рівняння для загального класу пружних/пластичних матеріалів. Теорія анізотропної в'язкопластичності впливає з визначення рівнянь еволюції для непружної деформації та внутрішнього стану матеріалу. У другій частині статті автори запропонували в'язкопластичну модель кубічної кристалічної анізотропії, на прикладі жароміцного нікелевого сплаву. Пропонована модель застосована для розрахунків монокристалічного сплаву CMSX-2 при циклічному навантаженні в умовах повзучості.

3) У дослідженні [33] авторів французької школи механіки та матеріалів наведено інформацію про поведінку матеріалу при нелінійному одновісьовому навантаженні. Також науковцями запропоновано моделі пластичності та в'язкопластичності для невеликих деформацій. У публікації наведено відомості про елементи механіки пошкоджуваності. Окрема увага приділяється обговоренню парного впливу пластичності та пошкоджуваності, і феномену «активації-деактивації».

Одна із перших феноменологічних моделей пружно-пластичного деформування, застосованих до матеріалів із властивостями кубічної симетрії, була

запропонована Хіллом (Hill R.) [34]. Він ввів модифікацію плинності по Мізесу (von Mises R.) у вигляді квадратичної форми довільного вигляду у просторі напружень, яку можна застосувати до матеріалів з трьома ортогональними площинами симетрії. Зазначена функція початку плинності з використанням асоційованого закону плинності описують деформацію ортотропного матеріалу з ізотропним зміцненням. Згідно моделі Хілла (Hill R.), еквівалентні напруження та еквівалентне приращення пластичних деформацій, для матеріалів із властивостями кубічної симетрії, можуть бути виражені у системі координат, пов'язаній з кристалографічними осями [001], [010], [100] [35].

При аналізі літературних джерел можна зазначити, що для моделювання повзучості монокристалічних сплавів при високих температурах на сучасному етапі розроблено різноманітні конститутивні моделі, що використовують мікроструктурні або феноменологічні підходи. Феноменологічні моделі описують повзучість з макроскопічної точки зору, тобто за допомогою аналізу та обробки різноманітних кривих повзучості. Одним із прикладів феноменологічних підходів є модель матеріалу, яка заснована на моделі Кайлето (Cailletaud) з ізотропним гартуванням [36]. Це феноменологічна мікро-макроскопічна модель, що базується на пластичності монокристалів [36; 37].

Мікроструктурні підходи, в свою чергу, базуються на тому, що під час повзучості механізми деформації в матеріалах тісно пов'язані з рухом дислокацій. Мікроструктурні підходи враховують дислокаційні механізми і використовують рівняння еволюції для визначення густини дислокацій на системах ковзання (наприклад, [27; 37; 38]). Істотною проблемою у використанні мікроструктурних моделей систем ковзання для прогнозування анізотропної повзучості при високих температурах є також їх нездатність пояснення більш низького спротиву повзучості монокристалічної орієнтації [111] порівняно з орієнтацією [001] [28].

Слід зазначити, що багато сучасних колективів авторів зробили свій внесок у питання дослідження процесів повзучості монокристалічних нікелевих сплавів, зокрема лопаток газових турбін, виготовлених із цих матеріалів. Так, у дослідженнях [39; 40] зроблено огляд основних причин руйнування лопаток турбін та наведено прикладі таких явищ із експлуатації. Особлива увага приділена вивченню особливостей пошкоджуваності лопаток при повзучості.

У статті [41] науковці проводили дослідження із використанням пластинчастих зразків з отворами (в якості натурних моделей охолоджуваних монокристалічних лопаток турбін), і без отворів. В процесі випробувань, використовувалися зразки, відлиті в двох різних кристалографічних орієнтаціях [001] і [111]. Також авторами у роботі була використана модифікована форма закону пошкоджуваності Качанова–Работнова (Kachanov-Rabotnov). В результаті скінченно-елементного аналізу

з'ясовано, що наявність охолоджуючих отворів сприяє появі концентрації деформацій в районі цих отворів і має значний вплив на параметри повзучості.

Авторами у джерелі [42] розглядаються сучасні розробки в моделюванні конститутивної поведінки монокристалічних сплавів з пам'яттю форми (Smart Memory Alloys). Основними властивостями таких сплавів є ефект «пам'яті» форми, а також високі показники довговічності та втомної міцності. Публікація зосереджена на розгляді хімічного складу цих матеріалів і їх термомеханічних властивостей. Окремо розглядається моделювання поведінки монокристалічної повзучості на основі різних підходів.

Автори публікації [43] зазначають, що властивості повзучості нікелевих жароміцних монокристалічних сплавів сильно залежать від швидкості деградації γ/γ' мікроструктури з початком руху дислокацій у цих мікроструктурах. У дослідженні описано, що прикладені напруження та температура сильно впливають на рух дислокацій та починають виділятися різні механізми повзучості при низькій ($\sim 750^\circ\text{C}$), середній ($\sim 950^\circ\text{C}$) та високій ($\sim 1100^\circ\text{C}$) температурах.

Тобто, можна зробити висновок, що існуючі підходи до оцінки анізотропної повзучості монокристалічних жароміцних сплавів є неуніверсальними. Багато підходів потребують значного доопрацювання та мають суттєві обмеження у сфері свого використання. Тому, актуальною задачею є моделювання повзучості монокристалічних сплавів для подальшого прогнозування працездатності деталей, які виготовляються з цих сплавів, зокрема, лопаток турбін авіаційних двигунів.

Основні підходи та критерії оцінки довготривалої міцності монокристалічних лопаток газових турбін. При оцінюванні «ефективного життєвого циклу» монокристалічних лопаток газових турбін особлива увага, зазвичай, приділяється дослідженню особливостей довготривалої міцності нікелевих жароміцних сплавів з різними КГО при змінах температурних навантажень в широкому діапазоні, оскільки ці фактори є найбільш впливовими при ресурсному проектуванні авіаційних газотурбінних двигунів.

Відомі підходи до оцінки довговічності лопаток газових турбін, що виготовляються з нікелевих жароміцних сплавів, описані у публікаціях [35; 44]:

1) Перший підхід базується на застосуванні коефіцієнту запасу циклічної довготривалої міцності. При цьому, для наближеної оцінки циклічної довговічності при нестационарному циклічному навантаженні приймається наступне припущення: розмахи напружень і деформацій у кожному циклі навантаження однакові, а середнє напруження в кожному наступному циклі навантаження змінюється внаслідок накопичення деформацій повзучості на стаціонарних ділянках кожного циклу. Розмах еквівалентних напружень і пластичних деформацій стабільного циклу визначається вирішенням задачі циклічної пластичності для монокристалічних сплавів на основі використання теорії Хілла (Hill R.).

Зміна середнього еквівалентного напруження після кожного циклу навантаження дорівнює зміні еквівалентного напруження на стаціонарній ділянці з максимальною температурою газу в конкретному циклі. Також робиться припущення, що на перехідних режимах у кожному циклі, а також на ділянках зупинки між циклами, додаткові деформації не накопичуються.

Для чисельного моделювання малоциклової втомної міцності монокристалічної лопатки при нестационарному навантаженні необхідно володіти деякими експериментальними даними. Зокрема, потрібна інформація про характеристики малоциклової втоми монокристалічного сплаву за різної асиметрії циклу навантаження зразків в умовах одноосового напруженого стану для різних кристалографічних орієнтацій монокристалу [35].

2) Наступний підхід спирається на застосування деформаційного критерію руйнування в основу якого покладено лінійне підсумовування пошкоджень, що обумовлюються наступними чинниками [44; 45]:

- зміною пластичної деформації у рамках циклу;
- зміною деформації повзучості в межах циклу;
- однобічним накопиченням пластичної деформації;
- однобічним накопиченням деформацій повзучості.

У якості еквівалентної деформації, за цим підходом, для монокристалічних матеріалів можуть розглядатися різноманітні інваріанти тензору деформації:

- максимальна деформація на зсув у системі ковзання з нормаллю $n_{\{111\}}$ до площини ковзання і напрямком ковзання $I_{<011>}$;
- головна деформація;
- інтенсивність деформацій за Хіллом (Hill R.);
- максимальна деформація зсуву.

Показники розмаху в межах одного циклу та односторонні накопиченні деформації отримують на основі аналізу кривих циклічного деформування.

3) В основу наступного підходу покладено застосування відношення максимальної довготривалої міцності сплаву при розтягуванні у напрямку $\langle 001 \rangle$ до еквівалентних напружень при повзучості [26, 45].

Відомою математичною моделлю оцінки довговічності монокристалічних сплавів виступає модель Мізеса (Von Mises R.) [46], де еквівалентні напруження при повзучості для матеріалів з кубічною симетрією можуть бути виражені через компоненти тензора напружень, пов'язані з кристалографічними напрямками $\langle 100 \rangle$, $\langle 010 \rangle$, $\langle 001 \rangle$. Зокрема, у цьому підході враховується коефіцієнт анізотропії довготривалої міцності, який залежить від максимальних меж довготривалої міцності при розтягуванні зразків у площинах різних кристалографічних напрямків [44].

Сучасні дослідники також пропонують свої підходи до оцінки впливу анізотропії монокристалів на їх довготривалу міцність. У публікаціях [47–50] описується процес дослідження довговічності лопаток турбіни високого тиску при комбінованому впливі

повзучості та втомного навантаження. В цих публікаціях запропоновано багатоосову модель прогнозування довговічності з використанням нового критичного параметра пошкоджуваності по площині. На основі аналізу зв'язку термічних та конструкційних параметрів лопаток турбін високого тиску отримано закон розподілу напружень і деформацій при комплексному навантаженні (відцентровий, температурний та аеродинамічний впливи).

Зважаючи на проаналізовані літературні джерела, можна прийти до висновку, що питання оцінки впливу анізотропних характеристик монокристалічних сплавів на довговічність лопаток турбін, що виготовляються з них, є досить суттєвою та актуальною задачею.

Висновки. У цьому дослідженні представлено основні відомості про лопатки газових турбін. Зокрема, наведено змістовну інформацію про основні методи виготовлення лопаток турбін, такі як метод спрямованої кристалізації та метод монокристалічного лиття, а також матеріали, які прийнято застосовувати для виготовлення лопаток газових турбін. Зазначено, що на сучасному етапі найбільше застосування отримали монокристалічні лопатки турбін, через те, що вони володіють високими показниками міцності, зокрема, спротивом повзучості, мають значну тріщиностійкість і демонструють високі показники жароміцності та жаростійкості.

Також у наведеному матеріалі проаналізовано та визначено основні впливи, що пошкоджують, а саме комбіновані високотемпературні, статичні та динамічні навантаження. Серед зазначених шкідливих впливів можна виділити руйнівний вплив комбінованого статичного навантаження та руйнування в умовах резонансу; повзучість, яка викликається механічним та високотемпературним механізмом навантаження на перехідних режимах роботи двигуна (при еволюціях польоту). У наведеному матеріалі за наявними літературними джерелами проаналізовано стан вивчення питань оцінки динамічної та статичної міцності лопаток газових турбін. Наведені основні досягнення науковців, які відзначилися теоретичними та експериментальними роботами при дослідженні проблеми оцінки впливу анізотропної повзучості матеріалів на довговічність деталей двигунів.

Загалом можна зазначити, що існує чисельна кількість підходів до оцінки міцності лопаток турбін при високотемпературному, статичному та динамічному навантаженні. Аналіз літературних джерел показав, що існуючі методи, зокрема, по відстроюванню від небезпечних резонансних частот коливань, по вивченню залежностей анізотропної повзучості, встановленню закономірностей довготривалої міцності монокристалічних лопаток турбін, не можуть розцінюватися в якості універсальних. Зазвичай, всі ці методи мають обмежене певними рамками застосування і потребують великої кількості даних експериментальних досліджень. Враховуючи вищеперераховане, дуже актуальною є задача створення методів оцінки

характеристик високотемпературної міцності лопаток турбін із монокристалічних жароміцних сплавів в умовах статичних та динамічних навантажень, які б враховували анізотропію їх властивостей та їх складні конструкційні особливості.

Список літератури

1. Неманежін Є. О., Івко В. М., Торба Ю. І. Теоретичні та експериментальні методи визначення характеристик міцності лопаток турбін при термомеханічному навантаженні. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*, 2021, № 4 спецвипуск 1(173), с. 93-101. DOI: 10.32620/akt.2021.4sup1.13
2. Lepeshkin A., Remchukov S., Yaroslavtsev N., Guanghua Z., Meng Z., Fetisov M., Ilinskaya O., Fedin M., Kuleshov A. Test technique for turbine cooled blades of gas turbine engines. *Journal of physics: conference series*, 2021, vol. 1925, pp. 1-7. DOI: 10.1088/1742-6596/1925/1/012086
3. Beghini M., Bertini L., Santus C., Monelli B. D., Scrinzi E., Pieroni N., Giovannetti I. High temperature fatigue testing of gas turbine blades. *Procedia structural integrity*, 2017, vol. 7, pp. 206-213. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.11.079
4. Rongqiao W., Fulei J., Dianyin H. In-phase thermal-mechanical fatigue investigation on hollow single-crystal turbine blades. *Chinese journal of aeronautics*, 2013, vol. 26, no. 6, pp. 1409-1414. DOI: 10.1016/j.cja.2013.07.026
5. Han J.-C. Recent studies in turbine blade cooling. *International journal of rotating machinery*, 2004, vol. 10, no. 6, pp. 443-457. DOI: 10.1155/S1023621X04000442
6. Puspitasari P., Andoko A., Kurniawan P. Failure analysis of a gas turbine blade: a review. *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2021, vol. 1034, pp. 1-9. DOI: 10.1088/1757-899X/1034/1/012156
7. Swain B., Mallick P., Patel S., Roshan R., Mohapatra S. S., Bhuyan S., et al. Failure analysis and materials development of gas turbine blades. *Materials today: proceedings*, 2020, vol. 33, no. 8, pp. 5143-5146. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.02.859
8. Ali R., Shehbaz T., Bemporad E. Investigation on failure in thermal barrier coatings on gas turbine first-stage rotor blade. *Journal of failure analysis and prevention*, 2018, vol. 18, pp. 1062-1072. DOI: 10.1007/s11668-018-0530-5
9. Asadikouhanjani S., Torfeh M., Ghorbanf R. Failure analysis of a heavy duty gas turbine blade. *Strength of materials*, 2014, vol. 46, pp. 608-612. DOI: 10.1007/s11223-014-9589-8
10. Couturier R., Escaravage C. High temperature alloys for the HTGR gas turbine: required properties and development needs. *International Atomic Energy Agency. Technical committee meeting on gas turbine power conversion systems for modular HTGRs*, 2001, pp. 163-176.
11. Gell M., Duhl D. N., Gupta D. K., et al. Advanced superalloy airfoils. *Journal of metals*, 1987, vol. 39, pp. 11-15. DOI: 10.1007/BF03258033
12. Shi D., Yang X., Li Z. Accelerated LCF-creep experimental methodology for durability life evaluation of turbine blade. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 2018, vol. 41, no. 5, P. 1196-1207. DOI: 10.1111/ffe.12763
13. Cormier J., Gandin C.-A. Chapter 7 - Processing of directionally cast nickel-base superalloys: solidification and heat treatments. In (eds): Caillaud G., Cormier J., Eggeler G., Maurel V., Nazé L. *Nickel base single crystals across length scales*. Elsevier, 2022, pp. 193-222. DOI: 10.1016/B978-0-12-819357-0.00015-9
14. Kim E.-H., Park H. Ye., Lee C.-L., Park J. B., Yang S. C., Jung Y.-G. Single crystal casting of gas turbine blades using superior ceramic core. *Journal of materials research and technology*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 3348-3356. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.01.029
15. Ibrahim T. K., Mohammed M. K., Al-Door W. H. A., Al-Sammarraye A. T., Basrawi F. Study of the performance of the gas turbine power plants from the simple to complex cycle: a technical review. *Journal of advanced research in fluid mechanics and thermal sciences*, 2019, vol. 57, pp. 228-250.
16. Madhavan S., Jain R., Sujatha C., Sekhar A. S. Vibration based damage detection of rotor blades in a gas turbine engine. *Engineering failure analysis*. 2014. Vol. 46. P. 26-39. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2014.07.021
17. Ledbetter, H. M., Reed, R. P. Elastic properties of metals and alloys. I. Iron, nickel, and iron-nickel alloys. *Journal of physical and chemical reference data*, 1973, vol. 2, no. 3, pp. 531-618. DOI: 10.1063/1.325341
18. Luan, X., Qin, H., Liu, F., Dai, Z., Yiand, Y., Li, Q. The mechanical properties and elastic anisotropies of cubic Ni₃Al from first principles calculations. *Crystals*, 2018, vol. 8, no. 8, pp. 307-317. DOI: 10.3390/cryst8080307
19. Fatmi, M., Ghebouli, M. A., Ghebouli, B., Chihi, T., Boucetta, S., Heiba, Z. K. Study of structural, elastic, electronic, optical and thermal properties of Ni₃Al. *Romanian journal of physics*, 2011, vol. 56, pp. 935-951.
20. Yu, R., Zhu, J., Ye, H. Q. Calculations of single-crystal elastic constants made simple. *Computer physics communications*, 2010, vol. 181, no. 3, pp. 671-675. DOI: 10.1016/j.cpc.2009.11.017
21. Hemberger, D., Filsinger, D., Bauer, H.-J. Investigations on maximum amplitude amplification factor of real mistuned bladed structures. *Proceedings of the ASME turbo expo 2012: turbine technical conference and exposition*, 2012, vol. 7, pp. 1041-1052. DOI: 10.1115/GT2012-68084
22. Sanliturk, K. Y., Ewins, D. J., Stanbridge, A. B. Underplatform dampers for turbine blades: theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 919-929. DOI: 10.1115/1.1385830
23. Ewins, D. J. Control of vibration and resonance in aero engines and rotating machinery - an overview. *International journal of pressure vessels and piping*, 2010, vol. 87, no. 9, pp. 504-510. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2010.07.001
24. Duong, L., Murphy, K. D., Kazerounian, K. Guided tuning of turbine blades: a practical method to avoid operating at resonance. *Journal of vibration and acoustics*, 2013, vol. 135, no. 5, pp. 1-5. DOI: 10.1115/1.4024761
25. Зінковський, А. П., Меркулов, В. М., Деркач, О. Л., Токар, І. Г., Савченко, К. В. Дослідження напруженого стану міжпазових виступів диска робочого колеса компресора з урахуванням впливу відцентрових сил та розладу частот коливань лопаток. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*, 2021, №4 спец випуск 1(173), с. 47-54. DOI: 10.32620/akt.2021.4sup1.07
26. Nemanzhyn, Y., Lvov, G., Torba, Y. Numerical simulation of the natural frequencies dependence of turbine blade vibrations on single-crystal anisotropy. In: Tonkonogiy, V., Ivanov, V., Trojanowska, J., Oborskyi, G., Pavlenko, I. (eds). *Advanced manufacturing processes V. InterPartner 2023. Lecture notes in mechanical engineering*. Springer. Cham, 2024, pp. 485-497. DOI: 10.1007/978-3-031-42778-7_45
27. Xu, R., Li, Y., Yu, H. Creep behavior and deformation mechanism of a third-generation single crystal Ni-based superalloy at 980 °C. *Metals*, 2023, vol. 13, no. 9, pp. 1-14. DOI: 10.3390/met13091541
28. Knowles, D. M., MacLachlan, D. W. Anisotropic creep of single crystal superalloys. In: Murakami, S., Ohno, N. (eds). *IUTAM symposium on creep in structures. Solid mechanics and its applications*. Springer. Dordrecht, 2001, vol. 86, pp. 31-40. DOI: 10.1007/978-94-015-9628-2_4
29. Grishchenko, A. I., Semenov, A. S., Getsov, L. B. Modeling inelastic deformation of single crystal superalloys with account of γ/γ' phases evolution. *Materials physics and mechanics*, 2015, vol. 24, no. 4. pp. 325-330.
30. Semenov, A. S., Getsov, L. B. Thermal fatigue fracture criteria of single crystal heat-resistant alloys and methods for identification of their parameters. *Strength of materials*, 2014, vol. 46, pp. 38-48. DOI: 10.1007/s11223-014-9513-2
31. Caillaud G. A micromechanical approach to inelastic behavior of metals. *International journal of plasticity*, 1992, vol. 8, no. 1, pp. 55-73. DOI: 10.1016/0749-6419(92)90038-E
32. Nouailhas D., Freed A. D. A viscoplastic theory for anisotropic materials. *Journal of engineering materials and technology – transactions of the ASME*, 1992, vol. 114, pp. 97-104. DOI: 10.1115/1.2904149
33. Besson J., Caillaud G., Chaboche J.-L., Forest S. Non-linear mechanics of materials. Springer. Verlag. Dordrecht, 2010, no. 1, 433 p. DOI: 10.1007/978-90-481-3356-7
34. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of royal society of London. Series A*, 1948, vol. 193, p. 281-297. DOI: 10.1098/rspa.1948.0045
35. Nissley D. M., Meyer T. G., Walker K. P. Life prediction and constitutive models for engine hot section anisotropic materials program. *NASA technical reports server*, 1992, 316 p.

36. Meric, L., Poubanne, P., Cailletaud, G. Single crystal modeling for structural calculations: part I – model presentation. *Transactions of the ASME. Journal of engineering materials and technology*, 1991, vol. 113, no.1, pp. 162-170. DOI: 10.1115/1.2903374
37. Vladimirov, I. N., Reese, S., Eggeler, G. Constitutive modelling of the anisotropic creep behaviour of nickel-base single crystal superalloys. *International journal of mechanical sciences*, 2009, vol. 51, no. 4, pp. 305-313. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2009.02.004
38. Fedelich, B. A microstructural model for the monotonic and the cyclic behaviour of single crystals of superalloys at high temperatures. *International journal of plasticity*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 1-49. DOI: 10.1016/S0749-6419(00)00045-0
39. Liu, D., Li, H., Liu, Y. Numerical simulation of creep damage and life prediction of superalloy turbine blade. *Mathematical problems in engineering*, 2015, vol. 2015, pp. 1-10. DOI: 10.1155/2015/732502
40. Zhang, G., Zhao, Y., Xue, F., et al. Creep-fatigue interaction damage model and its application in modified 9Cr-1Mo steel. *Nuclear engineering and design*, 2011, vol. 241, no. 12, pp. 4856-4861. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2011.08.076
41. Yu, Q. M., Yue, Z. F., Wen, Z. X. Creep damage evolution in a modeling specimen of nickel-based single crystal superalloys air-cooled blades. *Materials science and engineering: A*, 2008, vol. 477, no. 1-2, pp. 319-327. DOI: 10.1016/j.msea.2007.05.080
42. Patoor, E., Lagoudas, D. C., Entchev, P. B., Brinson, L. C., Gao, Xi. Shape memory alloys. Part I: general properties and modeling of single crystals. *Mechanics of materials*, 2006, vol. 38, no. 5-6, pp. 391-429. DOI: 10.1016/j.mechmat.2005.05.027
43. Xia, W., Zhao, X., Yue, L., Zhang, Z. Microstructural evolution and creep mechanisms in Ni-based single crystal superalloys: a review. *Journal of alloys and compounds*, 2020, vol. 819, pp. 2-32. DOI: 10.1016/j.jallcom.2019.152954
44. Getsov, L. B., Semenov, A. S., Besschetnov, V. A., et al. Long-term strength determination for cooled blades made of monocrystalline superalloys. *Thermal engineering*, 2017, vol. 64, pp. 280-287. DOI: 10.1134/S0040601517040048
45. Немакежин С. О., Львов Г. І., Торба Ю. І. Оцінка впливу анізотропних властивостей монокристалічних лопаток турбін авіаційних газотурбінних двигунів на їх довготривалу міцність. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*, 2024, №4 спецвипуск 2 (198), с. 39-51. DOI: 10.32620/aktt.2024.4sup2.06
46. Von Mises, R. Mechanics of plastic shape change of crystals. *ZAMM - Journal of applied mathematics and mechanics*, 1928, vol. 8, no. 3, pp. 161-185. DOI: 10.1002/zamm.19280080302 (in German).
47. Kolagar, A. M., Tabrizi, N., Cheraghzadeh, M., Shahriari, M. S. Failure analysis of gas turbine first stage blade made of nickel-based superalloy. *Case studies in engine failure analysis*, 2017, vol. 8, pp. 61-68. DOI: 10.1016/j.csefa.2017.04.002
48. Gao H. F., Fei C. W., Bai G. C., Ding, L. Reliability-based low-cycle fatigue damage analysis for turbine blade with thermo-structural interaction. *Aerospace science and technology*, 2016, vol. 49, pp. 289-300. DOI: 10.1016/j.ast.2015.12.017
49. Huo J., Sun D., Wu H., Wang W., Xue L. Multi-axis low-cycle creep/fatigue life prediction of high-pressure turbine blades based on a new critical plane damage parameter. *Engineering failure analysis*, 2019, vol. 106. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2019.104159
50. Bychkov N. G., Lukash V. P., Nozhnitsky Y. A., Perchin A. V., Rekin A. D. Investigations of thermomechanical fatigue for optimization of design and production process solutions for gas-turbine engine parts. *International journal of fatigue*, 2008, vol. 30, no. 2, pp. 305-312. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.01.046
3. Beghini M., Bertini L., Santus C., Monelli B. D., Scrinzi E., Pieroni N., Giovannetti I. High temperature fatigue testing of gas turbine blades. *Procedia structural integrity*, 2017, vol. 7, pp. 206-213. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.11.079
4. Rongqiao W., Fulei J., Dianyin H. In-phase thermal-mechanical fatigue investigation on hollow single-crystal turbine blades. *Chinese journal of aeronautics*, 2013, vol. 26, no. 6, pp. 1409-1414. DOI: 10.1016/j.cja.2013.07.026
5. Han J.-C. Recent studies in turbine blade cooling. *International journal of rotating machinery*, 2004, vol. 10, no. 6, pp. 443-457. DOI: 10.1155/S1023621X04000442
6. Puspitasari P., Andoko A., Kurniawan P. Failure analysis of a gas turbine blade: a review. *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2021, vol. 1034, pp. 1-9. DOI: 10.1088/1757-899X/1034/1/012156
7. Swain B., Mallick P., Patel S., Roshan R., Mohapatra S. S., Bhuyan S., et al. Failure analysis and materials development of gas turbine blades. *Materials today: proceedings*, 2020, vol. 33, no. 8, pp. 5143-5146. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.02.859
8. Ali R., Shehbaz T., Bemporad E. Investigation on failure in thermal barrier coatings on gas turbine first-stage rotor blade. *Journal of failure analysis and prevention*, 2018, vol. 18, pp. 1062-1072. DOI: 10.1007/s11668-018-0530-5
9. Asadikouhanjani S., Torfeh M., Ghorbanfar R. Failure analysis of a heavy duty gas turbine blade. *Strength of materials*, 2014, vol. 46, pp. 608-612. DOI: 10.1007/s11223-014-9589-8
10. Couturier R., Escaravage C. High temperature alloys for the HTGR gas turbine: required properties and development needs. *International Atomic Energy Agency. Technical committee meeting on gas turbine power conversion systems for modular HTGRs*, 2001, pp. 163-176.
11. Gell M., Duhal D. N., Gupta D. K., et al. Advanced superalloy airfoils. *Journal of metals*, 1987, vol. 39, pp. 11-15. DOI: 10.1007/BF03258033
12. Shi D., Yang X., Li Z. Accelerated LCF-creep experimental methodology for durability life evaluation of turbine blade. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 2018, vol. 41, no. 5, P. 1196-1207. DOI: 10.1111/ffe.12763
13. Cormier J., Gandin C.-A. Chapter 7 - Processing of directionally cast nickel-base superalloys: solidification and heat treatments. In (eds): Cailletaud G., Cormier J., Eggeler G., Maurel V., Nazé L. *Nickel base single crystals across length scales. Elsevier*, 2022, pp. 193-222. DOI: 10.1016/B978-0-12-819357-0.00015-9
14. Kim E.-H., Park H. Ye., Lee C.-L., Par J. B., Yang S. C., Jung Y.-G. Single crystal casting of gas turbine blades using superior ceramic core. *Journal of materials research and technology*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 3348-3356. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.01.029
15. Ibrahim T. K., Mohammed M. K., Al-Door W. H. A., Al-Sammarraie A. T., Basrawi F. Study of the performance of the gas turbine power plants from the simple to complex cycle: a technical review. *Journal of advanced research in fluid mechanics and thermal sciences*, 2019, vol. 57, pp. 228-250.
16. Madhavan S., Jain R., Sujatha C., Sekhar A. S. Vibration based damage detection of rotor blades in a gas turbine engine. *Engineering failure analysis*. 2014. Vol. 46. P. 26-39. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2014.07.021
17. Ledbetter H. M., Reed R. P. Elastic properties of metals and alloys. I. Iron, nickel, and iron-nickel alloys. *Journal of physical and chemical reference data*, 1973, vol. 2, no. 3, pp. 531-618. DOI: 10.1063/1.325341
18. Luan X., Qin H., Liu F., Dai Z., Yiand Y., Li Q. The mechanical properties and elastic anisotropies of cubic Ni₃Al from first principles calculations. *Crystals*, 2018, vol. 8, no. 8, pp. 307-317. DOI: 10.3390/cryst8080307
19. Fatmi M., Ghebouli M. A., Ghebouli B., Chihi T., Boucetta S., Heiba Z. K. Study of structural, elastic, electronic, optical and thermal properties of Ni₃Al. *Romanian journal of physics*, 2011, vol. 56, pp. 935-951.
20. Yu R., Zhu J., Ye H. Q. Calculations of single-crystal elastic constants made simple. *Computer physics communications*, 2010, vol. 181, no. 3, pp. 671-675. DOI: 10.1016/j.cpc.2009.11.017
21. Hemberger D., Filsinger D., Bauer H.-J. Investigations on maximum amplitude amplification factor of real mistuned bladed structures. *Proceedings of the ASME turbo expo 2012: turbine technical conference and exposition*, 2012, vol. 7, pp. 1041-1052. DOI: 10.1115/GT2012-68084

References(transliterated)

1. Nemaneshyn Y. O., Ivko V. M., Torba Yu. I. Teoretychni ta eksperymental'ni metody vyznachennya kharakterystyk mitnosti lopatok turbin pry termomekhanichnomu navantazhenni [Theoretical and experimental methods for determining the strength characteristics of turbine blades under thermomechanical loading]. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnolohiya – Aerospace technic and technology*, 2021, no. 4 special issue 1(173), pp. 93-101. DOI: 10.32620/aktt.2021.4sup1.13 (In Ukrainian).
2. Lepeshkin A., Remchukov S., Yaroslavtsev N., Guanghua Z., Meng Z., Fetisov M., Ilinskaya O., Fedin M., Kuleshov A. Test technique for turbine cooled blades of gas turbine engines. *Journal of physics: conference series*, 2021, vol. 1925, pp. 1-7. DOI: 10.1088/1742-6596/1925/1/012086

22. Sanliturk K. Y., Ewins D. J., Stanbridge A. B. Underplatform dampers for turbine blades: theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 919-929. DOI: 10.1115/1.1385830
23. Ewins D. J. Control of vibration and resonance in aero engines and rotating machinery - an overview. *International journal of pressure vessels and piping*, 2010, vol. 87, no. 9, pp. 504-510. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2010.07.001
24. Duong L., Murphy K. D., Kazerounian K. Guided tuning of turbine blades: a practical method to avoid operating at resonance. *Journal of vibration and acoustics*, 2013, vol. 135, no. 5, pp. 1-5. DOI: 10.1115/1.4024761
25. Zinkovskii A. P., Merkulov V. M., Derkach O. L., Tokar I. G., Savchenko K. V. Doslidzhennya napruzhenoho stanu mizhpazovykh vystupiv dyska robochoho kola kompresora z urakhuvannyam vplyvu vidtsentrovkyh syl ta rozladu chastot kolyvan lopatok [Stress state analysis of compressor blade-disk joint with the influence of centrifugal forces and blade mistuning]. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnologiya – Aerospace technic and technology*, 2021, no. 4 special issue 1(173), pp. 47-54. DOI: 10.32620/akt.2021.4sup1.07 (In Ukrainian)
26. Nemaneshyn Y., Lvov G., Torba Y. Numerical simulation of the natural frequencies dependence of turbine blade vibrations on single-crystal anisotropy. In: Tonkonogiy, V., Ivanov, V., Trojanowska, J., Oborskyi G., Pavlenko I. (eds). *Advanced manufacturing processes V. InterPartner 2023. Lecture notes in mechanical engineering*. Springer. Cham, 2024, pp. 485-497. DOI: 10.1007/978-3-031-42778-7_45
27. Xu R., Li Y., Yu H. Creep behavior and deformation mechanism of a third-generation single crystal Ni-based superalloy at 980 °C. *Metals*, 2023, vol. 13, no. 9, pp. 1-14. DOI: 10.3390/met13091541
28. Knowles D. M., MacLachlan D. W. Anisotropic creep of single crystal superalloys. In: Murakami, S., Ohno, N. (eds). *IUTAM symposium on creep in structures. Solid mechanics and its applications*. Springer. Dordrecht, 2001, vol. 86, pp. 31-40. DOI: 10.1007/978-94-015-9628-2_4
29. Grishchenko A. I., Semenov A. S., Getsov L. B. Modeling inelastic deformation of single crystal superalloys with account of γ/γ' phases evolution. *Materials physics and mechanics*, 2015, vol. 24, no. 4, pp. 325-330.
30. Semenov A. S., Getsov L. B. Thermal fatigue fracture criteria of single crystal heat-resistant alloys and methods for identification of their parameters. *Strength of materials*, 2014, vol. 46, pp. 38-48. DOI: 10.1007/s11223-014-9513-2
31. Cailletaud G. A micromechanical approach to inelastic behavior of metals. *International journal of plasticity*, 1992, vol. 8, no. 1, pp. 55-73. DOI: 10.1016/0749-6419(92)90038-E
32. Nouailhas D., Freed A. D. A viscoplastic theory for anisotropic materials. *Journal of engineering materials and technology – transactions of the ASME*, 1992, vol. 114, pp. 97-104. DOI: 10.1115/1.2904149
33. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. Non-linear mechanics of materials. *Springer. Verlag. Dordrecht*, 2010, no. 1, 433 p. DOI: 10.1007/978-90-481-3356-7
34. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of royal society of London. Series A*, 1948, vol. 193, p. 281-297. DOI: 10.1098/rspa.1948.0045
35. Nissley D. M., Meyer T. G., Walker K. P. Life prediction and constitutive models for engine hot section anisotropic materials program. *NASA technical reports server*, 1992, 316 p.
36. Meric L., Poubanne P., Cailletaud G. Single crystal modeling for structural calculations: part I – model presentation. *Transactions of the ASME. Journal of engineering materials and technology*, 1991, vol. 113, no.1, pp. 162-170. DOI: 10.1115/1.2903374
37. Vladimirov I. N., Reese, S., Eggeler G. Constitutive modelling of the anisotropic creep behaviour of nickel-base single crystal superalloys. *International journal of mechanical sciences*, 2009, vol. 51, no. 4, pp. 305-313. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2009.02.004
38. Fedelich B. A microstructural model for the monotonic and the cyclic behaviour of single crystals of superalloys at high temperatures. *International journal of plasticity*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 1-49. DOI: 10.1016/S0749-6419(00)00045-0
39. Liu., Li H., Liu Y. Numerical simulation of creep damage and life prediction of superalloy turbine blade. *Mathematical problems in engineering*, 2015, vol. 2015, pp. 1-10. DOI: 10.1155/2015/732502
40. Zhang G., Zhao Y., Xue F., et al. Creep-fatigue interaction damage model and its application in modified 9Cr-1Mo steel. *Nuclear engineering and design*, 2011, vol. 241, no. 12, pp. 4856-4861. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2011.08.076
41. Yu Q. M., Yue Z. F., Wen Z. X. Creep damage evolution in a modeling specimen of nickel-based single crystal superalloys air-cooled blades. *Materials science and engineering: A*, 2008, vol. 477, no. 1-2, pp. 319-327. DOI: 10.1016/j.msea.2007.05.080
42. Patoor E., Lagoudas D. C., Entchev P. B., Brinson L. C., Gao Xi. Shape memory alloys. Part I: general properties and modeling of single crystals. *Mechanics of materials*, 2006, vol. 38, no. 5-6, pp. 391-429. DOI: 10.1016/j.mechmat.2005.05.027
43. Xia W., Zhao X., Yue L., Zhang Z. Microstructural evolution and creep mechanisms in Ni-based single crystal superalloys: a review. *Journal of alloys and compounds*, 2020, vol. 819, pp. 2-32. DOI: 10.1016/j.jallcom.2019.152954
44. Getsov L. B., Semenov A. S., Besschetnov V. A., et al. Long-term strength determination for cooled blades made of monocrystalline superalloys. *Thermal engineering*, 2017, vol. 64, pp. 280-287. DOI: 10.1134/S0040601517040048
45. Nemaneshyn Y. O., Lvov G. I., Torba Yu. I. Otsinka vplyvu anizotropnykh vlastyvostey monokrystalichnykh lopatok turbin aviatsiynykh hazoturbinnnykh dvyhuniv na yikh dovyhotryvalu mitsnist' [Evaluation of the influence of anisotropic properties of single-crystal turbine blades of aircraft turbofan engines on their long-term strength]. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnologiya – Aerospace technic and technology*, 2024, no. 4 special issue 2(198), pp. 39-51. DOI: 10.32620/akt.2024.4sup2.06 (In Ukrainian)
46. Von Mises R. Mechanics of plastic shape change of crystals. *ZAMM - Journal of applied mathematics and mechanics*, 1928, vol. 8, no. 3, pp. 161-185. DOI: 10.1002/zamm.19280080302 (in German).
47. Kolagar A. M., Tabrizi N., Cheraghzadeh M., Shahriari M. S. Failure analysis of gas turbine first stage blade made of nickel-based superalloy. *Case studies in engine failure analysis*, 2017, vol. 8, pp. 61-68. DOI: 10.1016/j.csefa.2017.04.002
48. Gao H. F., Fei C. W., Bai G. C., Ding L. Reliability-based low-cycle fatigue damage analysis for turbine blade with thermo-structural interaction. *Aerospace science and technology*, 2016, vol. 49, pp. 289-300. DOI: 10.1016/j.ast.2015.12.017
49. Huo J., Sun D., Wu H., Wang W., Xue L. Multi-axis low-cycle creep/fatigue life prediction of high-pressure turbine blades based on a new critical plane damage parameter. *Engineering failure analysis*, 2019, vol. 106. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2019.104159
50. Bychkov N. G., Lukash V. P., Nozhnitsky Y. A., Perchin A. V., Rekin, A. D. Investigations of thermomechanical fatigue for optimization of design and production process solutions for gas-turbine engine parts. *International journal of fatigue*, 2008, vol. 30, no. 2, pp. 305-312. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.01.046

Надійшло (received) 24.09.2024

Відомості про авторів / About authors

Неманешин Євген Олександрович (Nemaneshyn Yevhen) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії»; м. Харків, Україна; інженер-дослідник ДП «Івченко-Прогрес»; м. Запоріжжя, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5855-508X>; Scopus Author ID: 58598957200; e-mail: Yevhen.Nemaneshyn@infiz.khpi.edu.ua

Ю. А. ПЛАКСІЙ

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ НА СФЕРИЧНІЙ МОДЕЛІ КУТОВОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Стаття присвячена проблемі підвищення точності визначення орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації рухомих об'єктів за рахунок удосконалення існуючих алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації. Розглядається задача чисельно-аналітичної оптимізації трьох алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації за рахунок уточнення коефіцієнтів в структурі алгоритмів. З них два алгоритми використовують в якості «проміжного параметра» вектор орієнтації, третій алгоритм заснований на розкладенні розв'язку кінематичного кватерніонного рівняння в ряд по степеням вектора позірної повороту. Уточнення коефіцієнтів в алгоритмах відбувається на основі комп'ютерного моделювання і програмно-чисельної мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу із застосуванням в якості модельного тестового руху аналітичної еталонної моделі обертового руху твердого тіла в послідовності кутів Крилова, що змінюються в часі за лінійним законом. Для цього модель тестового руху доповнюється моделюванням ідеальної інформації з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат з використанням аналітичних формул для вектора позірної повороту. Експериментально показано, що похибка накопиченого обчислювального дрейфу на застосованій еталонній моделі обертового руху має лінійний закон зростання з часом для всіх неоптимізованих алгоритмів, що розглядаються. В результаті чисельного експерименту отримані нові значення коефіцієнтів в структурах алгоритмів, що мінімізують похибку накопиченого дрейфу і покращують характеристики тренду цієї похибки. Проведена оптимізація призводить до зменшення на порядок максимального модуля похибки накопиченого дрейфу і змінення лінійно-зростаючого характеру залежності величини похибки обчислювального дрейфу від часу на коливально-незростаючий характер. Наводяться результати проведеного обчислювального експерименту

Ключові слова: кути Крилова, вектор орієнтації, кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, алгоритм орієнтації, чисельно-аналітичне моделювання, обчислювальний дрейф.

Yu. PLAKSIY

NUMERICAL-ANALYTICAL OPTIMIZATION OF ORIENTATION ALGORITHMS ON A SPHERICAL MODEL OF ANGULAR MOTION OF A RIGID BODY

The paper is devoted to the problem of increasing the accuracy of determining the orientation in strapdown attitude control systems for moving objects by improving the existing algorithms for determining orientation quaternions. The problem of numerical and analytical optimization of three algorithms for determining orientation quaternions by refining the coefficients in the structure of the algorithms is considered. Two of them use the orientation vector as an intermediate parameter, the third algorithm is based on the expansion of the solution of the kinematic quaternion equation in a series in powers of the apparent rotation vector. The coefficients in the algorithms are refined based on computer modeling and software-numerical minimization of the error of the accumulated computational drift using an analytical model of the rotational motion of a rigid body in a sequence of Krylov angles changing in time according to a linear law as a model test motion. For this purpose, the test motion model is supplemented by modeling ideal information at the outputs of the angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates using analytical formulas for the apparent rotation vector. It is experimentally shown that the accumulated computational drift error on the applied reference model of rotational motion has a linear growth law over time for all considered non-optimized algorithms. As a result of the numerical experiment, new values of the coefficients in the algorithm structures are obtained, minimizing the accumulated drift error and improving the characteristics of the trend of this error. The optimization performed leads to a decrease in the maximum modulus of the accumulated drift error by an order of magnitude and a change in the linearly increasing nature of the dependence of the computational drift error on time to an oscillatory non-growing nature. The results of the computational experiment are presented.

Keywords: Krylov angles, orientation vector, quaternion, reference model, test motion, quasi-coordinates, orientation algorithm, numerical analytical modeling, computational drift.

Вступ. Розглядається задача точного аналізу і оптимізації алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації (БІСО), яка зазвичай має місце на етапі проектування системи орієнтації рухомого об'єкта. На теперішній час розроблено велику кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації на основі ідеальної інформації з тріади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат [1-6]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ на осі зв'язаної з рухомих об'єктом системи координат. Роботи з розробки і удосконалення математичних формул відомих алгоритмів велися і тривають дотепер [7;8].

Найбільш поширене застосування в алгоритмах безплатформеної орієнтації рухомих об'єктів в якості параметрів орієнтації отримали кватерніони, для яких

кінематичне рівняння є лінійним, має перший інтеграл, а операції перетворення векторів легко виконуються за допомогою алгебри кватерніонів. Однак, розкладення кватерніонного кінематичного рівняння в ряд в термінах квазікоординат (1) призводить до низки однокрокових алгоритмів, які практично обмежуються четвертим порядком точності. При цьому алгоритми третього і четвертого порядку вимагають спеціальної «розгонки». Ці обставини, а також жорсткі вимоги до точності алгоритмів призвели до використання в якості «проміжного параметра» вектора орієнтації [1;2;7-12]. Значний доробок в розробку алгоритмів обчислення вектора орієнтації різного порядку в Україні належить А. Панову [5;9;10;12;13]. Використання вектора орієнтації теоретично дозволяє підвищити точність визначення поточної орієнтації за рахунок використання додаткової інформації про квазікоординати всередині такту обчислень, що є особливо важливим для високодинамічних об'єктів

[14]. Більшість розроблених алгоритмів визначення приросту вектора орієнтації на такті обчислень заснована на поліноміальній апроксимації вектора кутової швидкості всередині такту обчислень з використанням наближеного рівняння Борца [15] для моделі кінчного руху твердого тіла. Відомо, що оптимізовані під кінчний рух алгоритми втрачають певний порядок точності в умовах інших обертових рухів. Практичний інтерес для точного аналізу алгоритмів орієнтації представляють розробки тестових рухів, відмінних від кінчного. В роботах [16-22] запропоновані формальні аналітичні моделі обертового руху твердого тіла, які засновані на представленнях модельного кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій кутів, що змінюються з часом за лінійним законом і не є кутами в послідовності Ейлера.

В даній роботі наводяться результати оптимізації трьох відомих алгоритмів орієнтації на формальній моделі сферичного руху твердого тіла, яка побудована на послідовності кутів Крилова, що змінюються з часом за лінійним законом.

Модель сферичного руху твердого тіла в послідовності кутів Крилова. Розглянемо модель обертового руху твердого тіла, яка відповідає послідовності елементарних поворотів навколо координатних осей у випадку Крилова. Кватерніон результуючого повороту має вигляд:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3, \quad (2)$$

$$\text{де } \Lambda_1 = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\Lambda_2 = \left(\cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_2 \sin \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\Lambda_3 = \left(\cos \frac{v}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{v}{2} \right),$$

φ, ψ, v - кути курсу, крену і тангажу.

У випадку, коли кути змінюються лінійно за часом: $\varphi(t) = k_1(t)$, $\psi(t) = k_2(t)$, $v(t) = k_3(t)$, компоненти кватерніона (2) мають вигляд [17]:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \\ \lambda_1 &= c_1 \cdot c_2 \cdot s_3 - s_1 \cdot s_2 \cdot c_3, \\ \lambda_2 &= c_1 \cdot s_2 \cdot c_3 + s_1 \cdot c_2 \cdot s_3, \\ \lambda_3 &= s_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \end{aligned} \quad (3)$$

де позначено: $c_i = \cos\left(\frac{k_i t}{2}\right)$, $s_i = \sin\left(\frac{k_i t}{2}\right)$, $i = 1, 2, 3$, k_i - постійні величини, які можна інтерпретувати як деякі частоти.

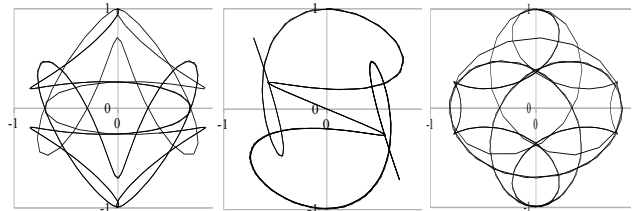
Кватерніону орієнтації (3) згідно кінематичного рівняння відповідають наступні залежності для проєкцій вектора кутової швидкості на зв'язані осі:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 - k_1 \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cos(k_2 t) \sin(k_3 t) + k_2 \cos(k_3 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t). \end{aligned} \quad (4)$$

Представлені аналітичні залежності від часу для компонент кватерніону орієнтації (3) і проєкцій вектора кутової швидкості (4) можна інтерпретувати, як відповідні аналітичні розв'язки системи динамічного і кінематичного рівнянь обертового руху твердого тіла. Але при цьому модель (3), (4), як і відома модель кінчного руху, є формальною, оскільки не можна наперед вказати моменти інерції твердого тіла, для якого ці розв'язки мають місце. В роботі [17] на основі аналізу побудованих траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації показано, що модель в лінійних кутах Крилова описує більш складний обертовий рух, ніж відома модель кінчного руху.

На рис.1 представлені траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ в конфігураційному просторі параметрів орієнтації, які побудовані на основі чисельного експерименту для кінематичної моделі (2) на інтервалі часу $t \in [0, 200]$ с при значеннях частот

$$k_1 = 0.15, k_2 = 0.25, k_3 = 0.05.$$



$\lambda_1(\lambda_0)$

$\lambda_2(\lambda_0)$

$\lambda_3(\lambda_0)$

Рис. 1 - Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі сферичного руху твердого тіла

Алгоритми орієнтації, вибрані для оптимізації на моделі сферичного руху в кутах Крилова

1. Алгоритм А1 (R. Miller [1]). В цьому алгоритмі приріст вектора орієнтації

$$\vec{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2}, \theta_{n3})$$

на такті $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^{(3)}) + \beta \vec{\theta}_n^{(2)} \times (\vec{\theta}_n^{(3)} - \vec{\theta}_n^{(1)}), \quad (5)$$

$$\vec{\theta}_n^{(1)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(2)} = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(3)} = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$$

- вихідні сигнали гіроскопів, що формуються всередині такту обчислень в моменти часу

$$t_{n-1} + 1/3 \Delta T, t_{n-1} + 2/3 \Delta T, t_{n-1} + \Delta T,$$

ΔT - величина такту обчислень,

$$\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*).$$

R. Miller на основі оптимізації під кінчний рух отримав, що

$$\alpha + \beta = 90/80, \alpha = 33/80, \beta = 57/80.$$

2. Алгоритм А2 (А. Панов [5]). В цьому двокроковому алгоритмі приріст вектора орієнтації на такті обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^{(4)} \times \vec{\theta}_n^*), \quad (6)$$

$$\text{де } \vec{\theta}_n^{(4)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/2\Delta T} \vec{\omega}(t)dt, \alpha = 2/3.$$

Для знаходження числового значення поточного кватерніона орієнтації Λ_n^* за допомогою алгоритмів А1 і А2, використаємо формулу додавання поворотів

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^*,$$

де скалярна $\Delta\lambda_{n0}^*$ і векторна $\vec{\Delta\lambda}_n^*$ частини кватерніону повороту $\Delta\Lambda_n^*$ обчислюються на такті $[t_{n-1}, t_n]$ за формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4,$$

$$\vec{\Delta\lambda}_n^* = (1/2)\vec{\theta}_n(1 - \theta_n^2/24), i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\text{де } \theta_n^2 = \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2.$$

Зазначимо, що формули (7) забезпечують разом з алгоритмами А1 і А2 4-й порядок точності визначення кватерніона повороту.

3. Алгоритм 3 [6]. Цей двокроковий степеневий алгоритм має 4 порядок точності, не використовує проміжні параметри і має наступні робочі формули для визначення компонент кватерніону повороту на такті $[t_{n-1}, t_n]$:

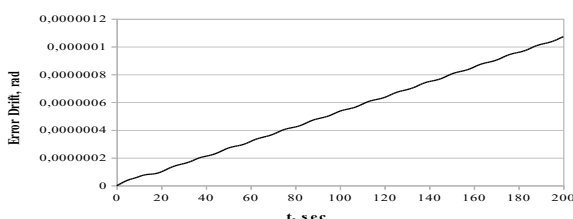
$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - (1/8)\theta_n^{*2} + (1/384)\theta_n^{*4},$$

$$\vec{\Delta\lambda}_n^* = (1/2)\vec{\theta}_n^*(1 - \theta_n^{*2}/24) + \alpha(\vec{\theta}_n^{(4)} \times \vec{\theta}_n^*), \quad (8)$$

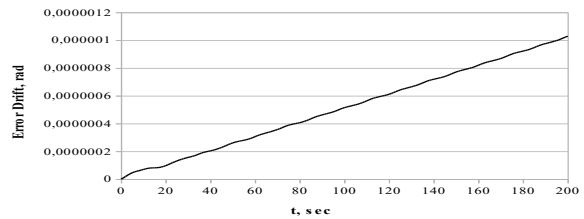
$$\text{де } \alpha = 1/3.$$

Оптимізація алгоритмів орієнтації на моделі сферичного руху в кутах Крилова. Розглянемо чисельну реалізацію аналітичної моделі обертового руху, яка описується формулами (3), (4) при значеннях частот $k_1 = 0.15$, $k_2 = 0.25$, $k_3 = 0.05$. На рис.2 представлені графіки залежностей від часу накопиченої похибки дрейфу для алгоритмів А1, А2, А3 на інтервалі часу $t \in [0, 200]$ с, такт обчислень

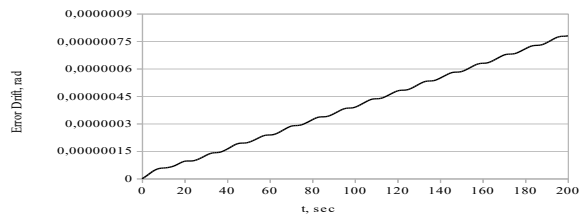
$$\Delta t = 0.1 \text{ с.}$$



a



b



c

Рис. 2 – Залежність накопиченої похибки дрейфу від часу (а – для Алгоритму 1; б – для Алгоритму 2; в – для Алгоритму 3)

Експериментально отримано, що для всіх алгоритмів, що розглядаються, похибка накопиченого обчислювального дрейфу має тренд лінійного зростання з часом. В таблиці 1 представлені максимальні значення похибки накопиченого дрейфу для алгоритмів А1, А2, А3 на інтервалі $t \in [0, 200]$ с.

Таблиця 1 - Максимальне значення похибки накопиченого дрейфу, рад

Алгоритм 1	Алгоритм2	Алгоритм 3
1.073E-06	1.029E-06	0.78E-06

Оптимізація алгоритмів, що розглядаються, на основі мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу проводилася за рахунок уточнення коефіцієнтів в формулах алгоритмів. При цьому отримано, що для алгоритму А1, на відміну від інших алгоритмів, значення уточнених коефіцієнтів суттєво відрізняються від початкових. Значення уточнених коефіцієнтів для опрацьованих алгоритмів наведені в таблиці 2.

Таблиця 2 - Значення уточнених коефіцієнтів в алгоритмах

Алгоритм 1	Алгоритм2	Алгоритм 3
$\alpha = -\frac{151}{20}, \beta = \frac{347}{40}$	$\alpha = \frac{4000321}{6000000}$	$\alpha = \frac{99994}{300000}$

На рис.3 представлений графік залежності від часу похибки накопиченого обчислювального дрейфу для оптимізованих алгоритмів.

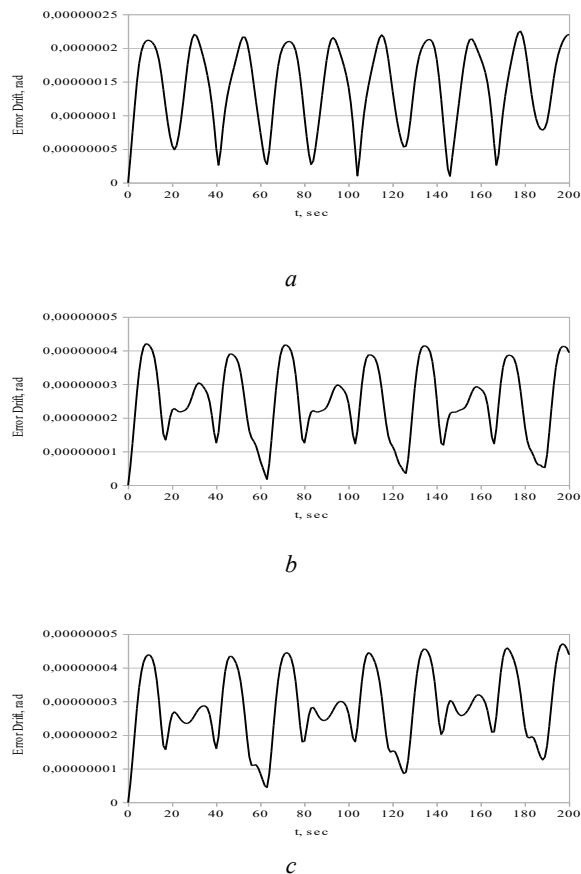


Рис. 3 - Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для оптимізованих алгоритмів (а – для алгоритму А1; б – для алгоритму А2; с – для алгоритму А3)

Проведений чисельний експеримент показав, що похибка накопиченого обчислювального дрейфу для всіх оптимізованих алгоритмів має коливальний характер на відміну від лінійно зростаючої похибки для неоптимізованих алгоритмів. При цьому максимальне значення похибки практично не зростає з часом.

В таблиці 3 представлені максимальні значення похибки накопиченого дрейфу для оптимізованих алгоритмів на інтервалі часу $t \in [0, 200]$ с. Отримано, що в результаті оптимізації під конкретний рух, спостерігається суттєве зменшення похибки орієнтації

Таблиця 3 - Максимальне значення похибки накопиченого дрейфу, рад.

алгоритм 1	алгоритм2	алгоритм 3
0.225E-06	0.421E-07	0.471E-07

Висновки. Розроблена комп'ютерна програма, яка дозволяє отримувати з заданим тактом обчислень сферичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритма орієнтації і отримувати оцінку накопиченого дрейфу. На основі чисельного експерименту з використанням аналітичної моделі сферичного руху твердого тіла в послідовності кутів Кривола, що змінюються лінійно з часом, проведений точносний аналіз представлених

алгоритмів орієнтації і отримані оцінки похибки накопиченого обчислювального дрейфу. На основі мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу були знайдені уточнені значення коефіцієнтів в алгоритмах. Експериментально доведено, що проведена оптимізація призводить до зменшення на порядок максимального значення похибки накопиченого обчислювального дрейфу і покращення тенденції змінення цієї похибки з часом. При цьому залежність вказаної похибки від часу приймає коливальний характер на відміну від лінійно зростаючої з часом похибки для неоптимізованих алгоритмів.

Список літератури

1. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. Pp.287–291.
2. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.13. No 2, 1990. Pp.363–369.
3. Tang C., Chen J., Chen L., Jiang H., Cui B. An Efficient Angular Rate Coning Algorithm for SINS// 2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference, Xiamen, China, 2018, Pp. 1-5. doi: 10.1109/GNCC42960.2018.9019067.
4. Zhang Z., Geng L., Fan Y. Performance Analysis of Three Attitude Algorithms for SINS// Academic Journal of Computing & Information Science (2022), Vol. 5, Issue 12: Pp.1-5. <https://doi.org/10.25236/AJCIS.2022.051201>.
5. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной навигации. Київ.: Наук. Думка. 1995. 280 с.
6. Плаксий Ю. А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. №58 (1031). Харків. 2013. С.168–177.
7. Tang C., Chen J. A Class of Coning Algorithms Based on a Half-Compressed Structure//Sensors 2014. 14(8). Pp.14289–14301. <https://doi.org/10.3390/s140814289>.
8. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm //International Journal of Innovative Computing, Information and Control. Vol.9. No 8, 2013. Pp. 3449-3462.
9. Панов А. П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гироскоп. систем. Вып. 3. Киев. 1984. С. 105–112.
10. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. Вып. 73. Киев. 1987. С. 3–9.
11. Guo X., Liu X., Yan J., Wang Y., Zeng J., Pan S. New rotation vector algorithm based on a high-order polynomial //IET Radar, Sonar & Navigation. Volume 14, Issue 1. 2020. Pp. 133-137. <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2019.0286>
12. Панов А. П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. Вып. 47. Киев. 1980. С. 59-71.
13. Панов А. П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. Вып. 77. Киев. 1988. С.47–52.
14. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. New High-Precision Strapdown Navigation Attitude Algorithm under Angular-Rate Input Condition //Appl. Math. Inf. Sci. 9. No. 2L. 2015. Pp.283-290. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/092L02>.
15. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.7. No.1. 1971. Pp.61-66.
16. Плаксий Ю. А. Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла /Ю. А. Плаксий, І. О. Гомозкова // Вісник НТУ «ХПІ». №22 (1347). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2019. С.81–88.
17. Плаксий Ю. А. Еталонна модель обертання твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації в функціях кутів

- Крилова, що змінюються у часі //Вісник НТУ «ХПІ». № 18(1127). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2015. С. 120-130.
18. *Плаксію Ю. А.* Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі // Вісник НТУ «ХПІ». № 41(1150). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2015. С. 111-119.
 19. *Плаксію Ю. А.* Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі //Вісник НТУ «ХПІ». №6(1178). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2016. С.96-104.
 20. *Плаксію Ю. А.* Мультиплікативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». №16 (1188). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2016. С.72–80.
 21. *Plakisy Yu.* Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ D. Breslavsky, I. Homozkova, K. Naumenko// *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. 33(4). Pp. 1141–1160.
 22. *Плаксію Ю. А.* Аналітично-чисельне моделювання процесу орієнтації твердого тіла в кватерніонах через послідовність ейлерових кутів для точного аналізу алгоритмів орієнтації в БІНС/ Ю. А. Плаксію, Ю. О. Кузнецов //Вісник НТУ «ХПІ». №2. Серія: «Динаміка і міцність машин». Харків. 2023. С.58-64.
- References (transliterated)**
1. *Miller R. B.* A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. Pp.287–291.
 2. *Ignagni M. B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.13. No 2, 1990.Pp.363–369.
 3. *Tang C., Chen J., Chen L., Jiang H., Cui B.* An Efficient Angular Rate Coning Algorithm for SINS// 2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference, Xiamen, China, 2018, Pp. 1-5. doi: 10.1109/GNCC42960.2018.9019067.
 4. *Zhang Z., Geng L., Fan Y.* Performance Analysis of Three Attitude Algorithms for SINS// Academic Journal of Computing & Information Science (2022), Vol. 5, Issue 12: Pp.1-5. <https://doi.org/10.25236/AJCIS.2022.051201>.
 5. *Panov A. P.* Matematicheskie osnovy teorii inercial'noj navigacii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation.] Kyiv.: Nauk. Dumka. 1995. 280 s.
 6. *Plakisy Yu. A.* Stepenevi alhorytmy vyznachennia kvaternioniv oriantatsii ta yikh interpolatsiini modyfikatsii [Power algorithms for determining orientation quaternions and their interpolation modifications]// Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. No. 58 (1031). Kharkiv. 2013. Pp.168–177.
 7. *Tang C., Chen J.* A Class of Coning Algorithms Based on a Half-Compressed Structure//*Sensors* 2014. 14(8). Pp.14289-14301. <https://doi.org/10.3390/s140814289>.
 8. *Huang I., Liu J., Zeng Q., Xiong Z.* A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm //International Journal of Innovative Computing, Information and Control. Vol.9. No 8. 2013. Pp. 3449-3462.
 9. *Panov A. P.* Optimizaciya metodov vychisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyah tverdogo tela [Optimizing methods for calculating quaternions for conical vibrations of a rigid body] // Mech. gyrosc systems. Issue 3. Kyiv. 1984. Pp. 105–112.
 10. *Panov A. P.* Optimizaciya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for calculating quaternions in the case of precession of a rigid body]// Cybernet. and calculated technical. Issue 73. Kyiv. 1987. Pp. 3–9.
 11. *Guo X., Liu X., Yan J., Wang Y., Zeng J., Pan S.* New rotation vector algorithm based on a high-order polynomial //IET Radar, Sonar & Navigation. Volume 14, Issue 1. 2020. Pp. 133-137. <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2019.0286>
 12. *Panov A. P.* Dvushagovye algoritmy vychislenij parametrov orientacii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]// Space research in Ukraine. Issue 5. Kyiv: Nauk. Dumka. 1974. Pp. 76–82.
 13. *Panov A. P.* Asimptoticheskie ocenki pogreshnostej metodov vychisleniya parametrov orientacii tverdogo tela [Asymptotic estimates of errors in methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]// Cybernetics and Computational Technology. Issue 47. Kyiv. 1980. Pp. 59-71.
 14. *Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z.* New High-Precision Strapdown Navigation Attitude Algorithm under Angular-Rate Input Condition //Appl. Math. Inf. Sci. 9. No. 2L. 2015. Pp.283-290. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/092L02>.
 15. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.7. No.1. 1971. Pp.61-66.
 16. *Plakisy Yu. A.* Analiz tochnosti alhorytma oriantatsii R. Millera na chotyrokhhastotnii etalonni modeli obertannia tverdoho tila [Analysis of the accuracy of R. Miller's orientation algorithm on the four-frequency reference model of rigid body rotation] /Yu.A.Plakisy, I.O.Homozkova // Bulletin of NTU "KhPI". No. 22 (1347). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2019. Pp.81–88.
 17. *Plakisy Yu. A.* Etalonna model obertannia tverdoho tila na osnovi predstavleniia kvaterniona oriantatsii v funktsiakh kutiv Krylova, shcho zminiuiutsia u chasi [Reference model of rotation of a rigid body based on the representation of the orientation quaternion in functions of Krylov angles changing in time] // Bulletin of KhPI National Technical University. No. 18(1127). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2015. Pp. 120-130.
 18. *Plakisy Yu. A.* Uzahalnennia trokhchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdoho tila. Pershyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of rigid body rotation. The first type of model] // Bulletin of NTU "KhPI". No. 41(1150). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2015. Pp. 111-119.
 19. *Plakisy Yu. A.* Uzahalnennia trokhchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdoho tila. Druhyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of rigid body rotation. The second type of model] // Bulletin of NTU "KhPI". No. 6 (1178). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2016. Pp.96-104.
 20. *Plakisy Yu. A.* Mulytyplikatyvni trokhchastotni modeli obertannia tverdoho tila [Multiplicative three-frequency models of solid body rotation] // Bulletin of NTU "KhPI". No.16(1188). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2016. Pp.72–80.
 21. *Plakisy Yu. A.* Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ Yu. Plakisy, D.Breslavsky, I.Homozkova, K.Naumenko// *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. 33(4). Pp.1141–1160.
 22. *Plakisy Yu. A.* Analitychno-chyselne modeliuvannia protsesu oriantatsii tverdoho tila v kvaternionakh cherez poslidovnist eilerovykh kutiv dlia tochnosnoho analizu alhorytmiv oriantatsii v BINS [Analytical-numerical modeling of the process of solid body orientation in quaternions through a sequence of Euler angles for accurate analysis of orientation algorithms in BINS] / Yu. A. Plakisy, Yu. O. Kuznetsov // Bulletin of NTU "KhPI". No. 2. Series: "Dynamics and strength of machines". Kharkiv. 2023. Pp.58-64.

Надійшла (received) 04.10.2024

Відомості про автора / About the Author

Плаксію Юрій Андрійович(Plakisy Yuriy) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-36; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9487-8444>; e-mail: plakisy.yu@gmail.com

*К. А. БАРБІН, Д. В. ЛАВІНСЬКИЙ***ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ОБРОБКИ. ЧАСТИНА І: РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ**

У статті розглянуто проблему чисельного моделювання при розрахунках розповсюдження електромагнітного поля у системах електромагнітної формовки. З проведеного аналізу відкритих інформаційних джерел випливає, що проблема чисельного моделювання при створенні нових технологічних операцій електромагнітної формовки або при удосконаленні вже існуючих є актуальною у науковому та практичному сенсі. Це пов'язано із необхідністю виконувати адекватний чисельне моделювання розрахунковий аналіз технологічних систем і технологічних операцій на етапі створення та удосконалення. Стосовно технологічних систем електромагнітної обробки розрахункові схеми і моделі повинні надавати змогу досліджувати розповсюдження нестационарного електромагнітного поля та досліджувати процеси нелінійного деформування технологічних елементів, яке викликано силовою взаємодією наведеного електромагнітного поля із полем джерела. Адекватне чисельне моделювання повинно спиратись на відповідні розрахункові процедури, основою для яких є чисельні методи. У статті обґрунтовано необхідність використання чисельних методів для проведення розрахункового аналізу, які дозволяють створювати розрахункові схеми наближені до реальності у більшій мірі у порівнянні із випадком використання аналітичних підходів та методів. Найбільш ефективним чисельним методом є метод скінченних елементів, який дозволяє проводити аналіз нестационарного електромагнітного поля та деформування в рамках однієї і тієї ж розрахункової схеми. У цьому випадку в рамках методу скінченних елементів можуть бути створені ітераційні схеми, що дозволяють враховувати нелінійні ефекти. Тут нелінійні ефекти можуть бути обумовлені залежністю механічних та електрофізичних властивостей матеріалу від температури, пластичним характером деформування, а також необхідністю обліку контактних явищ. Наведено результати з моделювання розповсюдження електромагнітного поля однофазного індуктора.

Ключові слова: чисельне моделювання, розрахунковий аналіз, електромагнітне поле, деформування, електромагнітна формовка, метод скінченних елементів.

*K. BARBIN, D. LAVINSKY***NUMERICAL SIMULATION IN CALCULATIONS OF TECHNOLOGICAL SYSTEMS OF ELECTROMAGNETIC PROCESSING. PART I: PROPAGATION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD**

The article deals with the problem of numerical modeling when calculating electromagnetic field propagation in electromagnetic molding systems. From the analysis of open information sources, it follows that the problem of numerical modeling when creating new technological operations of electromagnetic molding or when improving existing ones is relevant in a scientific and practical sense. This is due to the need to perform adequate numerical modeling and computational analysis of technological systems and technological operations at the stage of creation and improvement. With regard to technological systems of electromagnetic processing, calculation schemes and models should make it possible to study the propagation of a non-stationary electromagnetic field and to study the processes of nonlinear deformation of technological elements, which is caused by the force interaction of the induced electromagnetic field with the field of the source. Adequate numerical modeling must be based on appropriate calculation procedures based on numerical methods. The article substantiates the need to use numerical methods for calculation analysis, which allow creating calculation schemes closer to reality to a greater extent compared to the case of using analytical approaches and methods. The most effective numerical method is the finite element method, which allows the analysis of the non-stationary electromagnetic field and deformation within the same calculation scheme. In this case, within the framework of the finite element method, iterative schemes can be created that allow taking into account nonlinear effects. Here, nonlinear effects can be caused by the dependence of the mechanical and electrophysical properties of the material on temperature, the plastic nature of the deformation, as well as the need to account for contact phenomena. The results of modeling the propagation of the electromagnetic field of a single-turn inductor are presented.

Keywords: numerical modeling, computational analysis, electromagnetic field, deformation, electromagnetic molding, finite element method.

Вступ. Електромагнітне поле (ЕМП) є невід'ємним чинником експлуатації та функціонування багатьох технічних та технологічних об'єктів. У технологічних процесах на сучасному етапі розвитку все більш охоплюючими стають операції електромагнітної обробки (ЕМО). ЕМО – це технологічний процес, у якому для зміни властивостей матеріалів або конструкцій використовують енергію ЕМП. ЕМО має широке застосування в різних галузях, таких як металургія, машинобудування, електроніка та інші.

Застосування ЕМО має декілька глобальних напрямків: дія на матеріал з метою зміни його структури (зменшення внутрішніх напружень, підвищення міцності та пластичності); вплив на електрофізичні характеристики; комбінована дія – поєднання впливу ЕМП із традиційними методами

обробки для досягнення комплексного ефекту. ЕМО має низку переваг порівняно із іншими методами обробки. Тут слід відзначити: безконтактність (немає безпосереднього контакту інструмента з матеріалом, що зменшує зношування та пошкодження); точність (контрольованість параметрів ЕМП дозволяє прецизійно регулювати процес); енергоефективність.

Одним з прикладів ЕМО, де застосовується силовий вплив ЕМП є електромагнітне формування (магнітно-імпульсна обробка металів, магнітно-імпульсна штамповка), яка використовується для безконтактного формування металів або інших провідних матеріалів шляхом взаємодії ЕМП джерела (індуктора) із індуктованим ЕМП у заготовці.

Чисельне моделювання при розробці нових операцій електромагнітного формування (ЕМФ) або при удосконаленні вже існуючих має велике значення

в сучасній інженерії. Актуальність цього підходу пояснюється низкою причин, пов'язаних з особливостями ЕМФ та складністю процесів, які важко передбачити за допомогою традиційних методів аналізу.

Серед причин актуальності чисельного моделювання при ЕМФ можна виділити наступні: складність фізичних процесів, можливість оптимізації вибору технологічних параметрів, зниження витрат на натурні експерименти, можливість прогнозувати якість готових виробів та інше.

Таким чином, чисельне моделювання при розрахунках технологічних систем ЕМО є актуальною науково-практичною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Фундамент з використання енергії сильних та надсильних ЕМП, в тому числі й у системах ЕМО, викладені у роботах [1-4]. Теоретичні засади створення технологічних операцій ЕМФ викладені у класичній праці [5]. Сучасний стан справ у розробці технологічних систем ЕМФ висвітлено у роботах [6-8].

Спираючись на аналіз представлених інформаційних джерел можна зробити висновок, що ЕМФ поєднує декілька взаємопов'язаних фізичних явищ: електромагнітні поля, індукційні струми, пластична деформація матеріалу, динамічні напруження. Аналітичні методи розрахунку не можуть точно описати ці процеси. Натомість чисельне моделювання дозволяє відтворити всі етапи взаємодії магнітного поля з матеріалом, що включає взаємодію індуктованих струмів з металом, розвиток механічних напружень та їх розподіл під впливом сили Лоренца.

Докладний аналіз щодо застосування і особливостей використання чисельних методів для дослідження розповсюдження ЕМП наведено у монографії [9].

У тому випадку, коли виникає необхідність вивчення процесу деформування технологічних систем ЕМО, найбільш ефективним є використання методу скінченних елементів (МСЕ), оскільки він не накладає практично ніяких обмежень на можливості побудови розрахункових моделей найбільш наближених до реальності. Також відзначимо, що МСЕ дозволяє враховувати різноманітні нелінійні явища (залежність електро-фізико-механічних властивостей матеріалів від температури, великі деформації, непружне деформування, контактні явища) за рахунок побудови відповідних ітераційних процедур. Застосування та особливості використання МСЕ для аналізу деформування за умов технологічних операцій ЕМФ представлено у роботах [10;11].

Мета статті. На сучасному етапі розвитку техніки знаходять застосування нові технологічні процеси ЕМФ, наприклад, спрямовані на притягнення тонких заготовок з різних матеріалів. Практичне застосування технологій даного спрямування пов'язане із проведенням ремонтних робіт корпусних

елементів транспортних засобів [12;13]. Важливою науковою задачею є проведення чисельного моделювання при аналізі технологічних систем ЕМФ з метою визначення раціональних експлуатаційних та конструкційних параметрів. Першим етапом такого моделювання є дослідження розповсюдження ЕМП у елементах систем.

Аналіз результатів. У статті [12] запропоновано використання одновиткового індуктора із конічною робочою зоною. Він виконується з немагнітних матеріалів, призначений він для притягнення плоских феромагнітних заготовок з метою подальшого деформування.

У роботах [14;15] представлено повну математичну постановку задачі аналізу нестационарного ЕМП та пружно-пластичного деформування систем провідних тіл, що може використовуватись для чисельного моделювання технологічних систем ЕМФ. Там же наведені підходи до чисельного розрахункового аналізу. Вони були застосовані для дослідження розповсюдження нестационарного ЕМП у системі, що містить одновитковий індуктор та тонку заготовку. Геометрія, особливості навантаження та закріплення дозволяють розглядати задачу у вісесиметричній постановці. На рис. 1 представлена розрахункова схема задачі, а на рис. 2 – геометрична та скінченно-елементна модель індуктора.

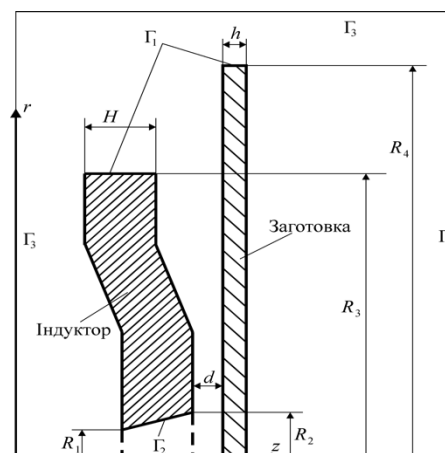


Рис. 1 – Розрахункова схема розрахункова схема складеного одновиткового індуктора та плоскої заготовки

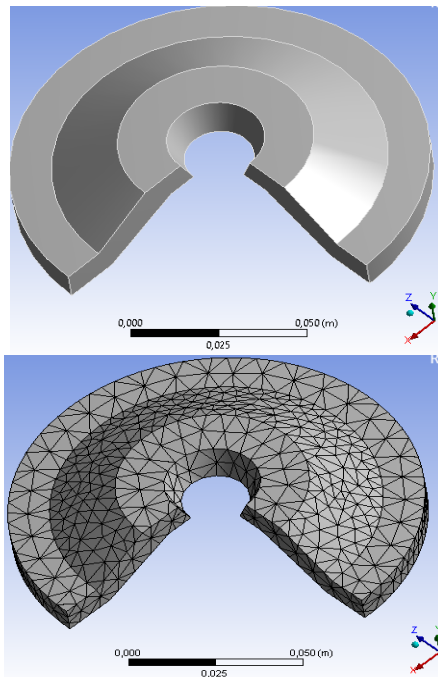


Рис. 2 – Геометрична та скінченно-елементна модель індуктора

Розв'язання було проведено для наступних геометричних параметрів:

$$R_1 = 0,0075 \text{ м},$$

$$R_2 = 0,02 \text{ м},$$

$$R_3 = 0,05 \text{ м},$$

$$R_4 = 0,1 \text{ м},$$

$$H = 0,0144 \text{ м},$$

$$h = 0,0005 \text{ м},$$

$$d = 0,0005 \text{ м}.$$

Розміри повітряного середовища, що оточує систему, варіювались з метою визначення таких, при яких компоненти ЕМП затухають на віддаленні від джерела ЕМП (індуктора).

В якості джерела ЕМП розглядався електричний струм, рівномірно розподілений по внутрішній похилій поверхні отвору індуктора (поверхня Γ_2). Окружна (нетривіальна) компонента вектору густини струму змінювалась у часі за законом:

$$j(t) = I_m e^{-\delta 2\pi f t} \cdot \sin(2\pi f t),$$

де амплітуда сили струму

$$I_m = 30 \text{ кА},$$

частота

$$f = 2 \text{ кГц},$$

відносний коефіцієнт загасання

$$\delta = 0,3.$$

Граничні умови задавались на поверхнях, які обмежують розрахункову область, заповнену повітрям, такими, що моделюють затухання ЕМП на віддаленні від його джерела, для ненульової компоненти векторного магнітного потенціалу

$$A_0 = A$$

вони мають вигляд:

$$A|_{\Gamma_3} = 0.$$

Таблиця 1 – Електрофізичні параметри елементів системи

	індуктор, мідь	заготовка, сталь	повітря
$\mu_r \mu_r$	1	1,3	1
$\gamma, (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$	$7 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	0

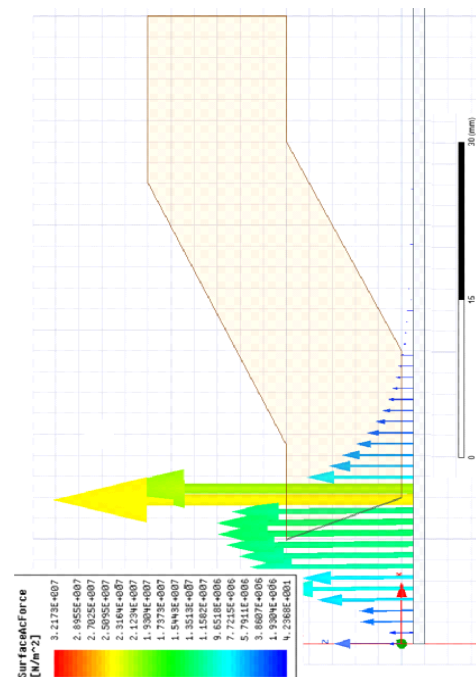


Рис. 3 – Розподіл електромагнітного тиску уздовж поверхні заготовки

Достовірність результатів чисельного розв'язання на першому етапі встановлювалась шляхом зміни кількості СЕ індуктора та заготовки та порівняння максимальних значень напруженості магнітного поля. При кожному розрахунку кількість СЕ збільшувалась удвічі – відповідна інформація наведена у табл. 2, звідки видно, що вже у випадку подвоєння кількості СЕ результат, що перевіряється залишився сталим, і саме така кількість СЕ

розглядалась при подальших розрахунках. Також необхідно відзначити, що максимальне відхилення результатів в залежності від кількості СЕ спостерігалось у зонах, де фіксуються максимальні значення компонент напруженості магнітного поля.

Таблиця 2 – Вплив кількості СЕ моделі на значення напруженості магнітного поля

Кількість СЕ, шт.	640	1280	1280	2560
Максимальне відхилення, %	≈ 8		≈ 2,25	
Кількість СЕ, шт.	2560	6120	6120	12240
Максимальне відхилення, %	≈ 1,35		≈ 1	

Також відслідковувалось, який вплив здійснює величина кроку за часом на результати розв'язання, були проведені розрахунки, у яких крок обирався рівним: 0,0003 с; 0,00003 с та 0,000075 с. Виявилось, що при зменшенні кроку у десять разів результати змінюються на 4,3%, при подальшому зменшенні у 5 разів результати змінюються лише приблизно на 0,1%. Таким чином, з'ясовано, що для подібних розрахункових схем крок по часу, який становить 0,01 від часового інтервалу є таким, що забезпечує достатню точність результатів.

Далі розглянемо деякі результати розв'язку. Максимальні значення основних кількісних характеристик ЕМП, у тому числі й напруженості магнітного поля на поверхні заготовки, фіксуються безпосередньо у її центрі

$$r = \frac{R_2}{2}.$$

Відзначимо, що якісно зміна напруженості у часі подібна до зміни у часі густини сили струму джерела, вона має яскраво виражений максимум на початку імпульсу (приблизно 0,00015 с) та швидко загасає у часі. Взагалі, подібна залежність від часу в даному випадку є справедливою для усіх основних характеристик ЕМП, і це надає нам можливість у подальшому при розрахунковому аналізі пружно-пластичного деформування користуватись квазістаціонарним наближенням і враховувати електромагнітні сили, що відповідають максимальним значенням у часі компонент ЕМП. Що стосується просторового розподілу, то максимальні значення нормальної компоненти напруженості магнітного поля на поверхні заготовки виникають безпосередньо навпроти центру індуктора, а дотична компонента навпаки тут дорівнює нулю і набуває максимальних значень приблизно в околі точки із радіальною координатою. Так само і максимальні значення електромагнітного тиску виникають на поверхні заготовки безпосередньо навпроти робочого отвору індуктора (рис. 3).

Висновки. У роботі розглянуті питання чисельного моделювання та розрахункового аналізу при дослідженні технологічних операцій

електромагнітної формовки. Запропонована загальна розрахункова стратегія, яка передбачає використання методу скінченних елементів для послідовного розв'язання задач з визначення розподілу електромагнітного поля та аналізу пружно-пластичного деформування. Наведені розрахункові результати з розподілу електромагнітного поля для технологічної системи із одновитковим індуктором та заготовкою. Дані результати у подальшому будуть використані для дослідження нелінійного деформування.

Список літератури

1. Lange K. Handbook of metal forming / K. Lange, K. Pöhlndt // New York et al.: McGraw-hill. – London. – 1985. – Vol. 8. – 900 p.
2. Herlach F. Strong and ultrastrong magnetic fields and their applications / Herlach F. // Berlin. – 1985. – Vol. 57. – 367 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-13504-9>
3. Mamalis A. G. Electromagnetic forming and powder processing: trends and developments / A. G. Mamalis, D. E. Manolacos, A. G. Kladas, A. K. Koumoutsos // Applied Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57, No. 4. P. 299–324. <https://doi.org/10.1115/1.1760766>
4. Rudnev V. Handbook of induction heating / V. Rudnev, D. Loveless, R. L. Cook // New York. – 2017. – 772p. <https://doi.org/10.1201/9781315117485>
5. Білий І. В. Довідник з магнітно-імпульсної обробки металів / І. В. Білий, С. М. Фертик, Л. Т. Хіменко // Харків. – 1977. – 188 з.
6. Psyk V. Electromagnetic forming – a review / V. Psyk, D. Risch, B. L. Kinsey, A. E. Tekkaya, M. Kleiner // Journal of Materials Processing Technology. – 2011. – vol. 211. – no. 5. – P. 787–829. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.12.012>
7. Thomas J. D. On electromagnetic forming processes in finitely strained solids: Theory and examples / J. D. Thomas, N. Triantafyllidis // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009. No. 57(8). P. 139–1416. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2009.04.004>
8. Mamalis A. G. Electromagnetic forming tools and processing conditions: numerical simulation / A. G. Mamalis, D. E. Manolacos, A. G. Kladas, A. K. Koumoutsos // Materials and Manufacturing Processes. 2006. No. 21(4). P. 411–423. <https://doi.org/10.1080/10426910500411785>
9. Подольцев А. Д. Элементы теории и чисельного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах / А. Д. Подольцев, И. Н. Кучерява // Київ. – 1999. – 362с.
10. Stieme M. Algorithmic formulation and numerical implementation of coupled electromagnetic-inelastic continuum models for electromagnetic metal forming / M. Stieme, J. Unger, B. Svendsen, H. Blum // International journal for numerical methods in engineering. – 2006. – no. 68 (13). – P. 1301–1328. <https://doi.org/10.1002/nme.1738>
11. Stieme M. An arbitrary Lagrangian Eulerian approach to the three-dimensional simulation of electromagnetic forming / M. Stieme, J. Unger, B. Svendsen, H. Blum // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2009. No. 198 (17–20). P. 1535–1547. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.014>
12. Batygin Y. V. Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – fundamentals and perspective applications / Y. V. Batygin, S. F. Golovashchenko, A. V. Gnatov // Journal of Materials Processing Technology. – 2013. – vol. 213. – no. 3. – P. 444–452. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2012.10.003>
13. Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals / Y. V. Batygin, S. F. Golovashchenko, A. V. Gnatov // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – vol. 214. – no. 2. – P. 390–401. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.09.018>
14. Altenbach H. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, D. Lavinsky // Continuum Mechanics and Thermodynamic. – 2016. – vol. 28. – no. 5. – P. 1421–1433. <https://doi.org/10.1007/s00161-015-0484-8>
15. Lavinskii D. V. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field/

D. V. Lavinskii, O. K. Morachkovskii // Strength of Materials. – 2016. – vol. 48. – No. 6. – P. 760–767. <https://doi.org/10.1007/s11223-017-9822-3>

References (transliterated)

1. Lange K., Pöhlant K. (Eds.). *Handbook of metal forming*. New York et al.: McGraw-hill. London, 1985. Vol. 8. 900 p.
2. Herlach F. *Strong and ultrastrong magnetic fields and their applications*. Berlin, 1985. Vol. 57. 367 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-13504-9>
3. Mamalis A. G., Manolakis D. E., Kladas A. G., Koumoutsos A. K. Electromagnetic forming and powder processing: trends and developments. *Applied Mechanics Reviews*. 2004, vol. 57, no. 4, pp. 299–324. <https://doi.org/10.1115/1.1760766>
4. Rudnev V., Loveless D., Cook R. L. *Handbook of induction heating*. New York, 2017. 772 p. <https://doi.org/10.1201/9781315117485>
5. Belyi I. V., Fertik S. M., Khimenko L. T. *Spravochnik po magnitno-impul'snoy obrabotke metallov*. [Handbook on magnetic-pulse processing of metals.] Kharkov, 1977. 188 p.
6. Psyk V., Risch D., Kinsey B. L., Tekkaya A. E., Kleiner M. Electromagnetic forming – a review. *Journal of Materials Processing Technology*. 2011, vol. 211, no. 5, pp. 787–829. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.12.012>
7. Thomas J. D., Triantafyllidis N. On electromagnetic forming processes in finitely strained solids: Theory and examples. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, no. 57(8), pp. 139–1416. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2009.04.004>
8. Mamalis A. G., Manolakis D. E., Kladas A. G., Koumoutsos A. K. Electromagnetic forming tools and processing conditions: numerical simulation. *Materials and Manufacturing Processes*. – 2006. – no. 21(4). – pp. 411–423. <https://doi.org/10.1080/10426910500411785>
9. Podol'cev A. D., Kucheryavaya I. N. Elementy teorii i chislenogo analiza elektromagnitnykh processov v provodyaschikh sredakh [Elements of the theory and numerical calculation of electromagnetic processes in conducting media]. Kiev, 1999. 362 p.
10. Stiemer M., Unger J., Svendsen B., Blum H. Algorithmic formulation and numerical implementation of coupled electromagnetic-inelastic continuum models for electromagnetic metal forming. *International journal for numerical methods in engineering*. 2006, no. 68 (13), pp. 1301–1328. <https://doi.org/10.1002/nme.1738>
11. Stiemer M., Unger J., Svendsen B., Blum H. An arbitrary Lagrangian Eulerian approach to the three-dimensional simulation of electromagnetic forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2009. – no. 198 (17–20). – pp. 1535–1547. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.014>
12. Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals—fundamentals and perspective applications. *Journal of Materials Processing Technology*. 2013, vol. 213, no. 3, pp. 444–452. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2012.10.003>
13. Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014, vol. 214, no. 2, pp. 390–401. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.09.018>
14. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamic*. 2016, vol. 28, no. 5, pp. 1421–1433. <https://doi.org/10.1007/s00161-015-0484-8>
15. Lavinskii D. V., Morachkovskii O. K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. *Strength of Materials*. 2016, vol. 48, no. 6, pp. 760–767. <https://doi.org/10.1007/s11223-017-9822-3>

Надійшло (received) 31.10.2024

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Барбін Костянтин Андрійович (Barbin Kostiantyn) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-1152-4950>; e-mail: kostiantyn.barbin@infiz.khpi.edu.ua

Лавінський Денис Володимирович (Lavinsky Denys) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів; м. Харків, Україна; тел.: (050) 566-42-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1380-3131>; e-mail: Denys.Lavinskiy@khpi.edu.ua

ЗМІСТ

Шакало Р. Ю., Ларін О. О., Савченко К. В. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу початкового параметру спряження бандажних полиць попарно бандажованих лопаток на статичні напруження у пері лопатки.....	3
Лавченко Руслан Ровшан огли, Львов Г. І. Огляд застосування Data-Driver підходу для аналізу тепло-фізичних властивостей композитів.....	9
Успенський В. Б., Догадайло О. С Реалізація оптимальної реконфігурації рою БПЛА.....	17
Трубаєв О. І., Ларін А. О., Приходько Н. П. Про моделювання граничних умов у задачі визначення власних частот труби.....	26
Бреславський Д. В., Броварник О. О. Використання методу зважених відхилів у формі МСЕ для апроксимації двовимірних розподілів.....	33
Любицька К. І., Морачковська І О., Тимченко Г. М. Геометрично нелінійний згин функціонально-градієнтних пологих оболонок на пружній основі.....	38
Мартиненко В. Г. Пошук оптимальних параметрів активних конструктивних елементів підвищування шляхом визначення їхніх інтегральних жорсткісних та демпфувальних характеристик	44
Неманежин Є. О. Аналіз особливостей умов роботи сучасних лопаток газових турбін та огляд методів визначення параметрів їх високотемпературної міцності.....	52
Плаксий Ю. А. Чисельно-аналітична оптимізація алгоритмів орієнтації на сферичній моделі кутового руху твердого тіла.....	62
Барбін К. А., Лавінський Д. В. Чисельне моделювання при розрахунках технологічних систем електромагнітної обробки. Частина 1: Розповсюдження електромагнітного поля.....	67

CONTENTS

Shakalo R., Larin O., Savchenko K. Computational and experimental impact study initial pairing parameter of bandage shelves pairs of banded blades for static stresses in the feather of the shoulder blades.....	3
Lavshchenko R., Lvov G. Review of the data-driven approach applications for analyzing thermophysical properties of composites.....	9
Uspenskyi V., Dohadailo O. Implementation of optimal reconfiguration of uav swarm.....	17
Trubayev O., Larin A., Prykhodko N. On the modeling of boundary conditions in the problem of determining the natural frequencies of a pipe.....	26
Breslavsky D., Brovarnyk O. Using the method of weighted residuals in the fem form for the approximation of two-dimensional distributions.....	33
Liubyt'ska K., Morachkovska I., Timchenko G. Geometricly nonlinear bending of functional-gradient shallow shells on an elastic foundation.....	38
Martynenko V. Search for optimal parameters of active structural suspension elements by determining their integral stiffness and damping characteristics.....	44
Nemanezhyn Ye. Analysis of the features of the operating conditions of modern gas turbine blades and review of methods for determining their high-temperature strength parameters.....	52
Plak'siy Yu. Numerical-analytical optimization of orientation algorithms on a spherical model of angular motion of a rigid body.....	62
Barbin K., Lavinsky D. Numerical simulation in calculations of technological systems of electromagnetic processing. Part 1: Propagation of the electromagnetic field.....	67

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»
СЕРІЯ: ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН

Збірник наукових праць

№ 1 2024

Головний редактор: Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор
Технічний редактор: Щепкін О.В., наук. співр.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
НТУ «ХПІ», Фіз. корп. 1-й пов., каф. ДММ.
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: lvovdpm@ukr.net

Підп. до друку 28.11.2024 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,95. Облік.-вид. арк. 9,10.
Тираж 100 пр. 1-й завод 1-100. Зам. № 23. Ціна договірна.

