



ISSN 2078-9130

ВІСНИК

Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCES OF UKRAINE

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

National technical university
"Kharkiv polytechnic institute"

ВІСНИК

**Національного
технічного університету «ХПІ»
Серія: Динаміка і міцність
машин**

№ 2 2023

BULLETIN

**of the National
Technical University "KhPI"
Series: Dynamics and Strength of
Machines**

No. 2 2023

Збірник наукових праць

Collection of Scientific papers

Видання засноване у 1961 р.

The edition was founded in 1961

**Харків
НТУ «ХПІ», 2023**

**Kharkiv
NTU "KhPI", 2023**

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин : збірник наукових праць. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2023. – № 2. – 117 с. ISSN 2078-9130

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок, виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

Ідентифікатор медіа R30-01543, згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 16.10.2023 № 1075.

Засновник видання Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Мова статей – українська, англійська.

Web-сайт (web-сторінка) наукового видання – <http://jds.m.khpi.edu.ua/>

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України №886 від 02.07.2020 року.

Від 2013 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до довідника періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Від 2014 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до наукометричної бази даних індекс ICV (Index Copernicus Value)

Від 2013 р. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* включено до БД «Наукова періодика України» Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського.

Від 2001 р. статті *Вісника Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин* представлені у репозитарії «Електронний архів Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», у розділі Вісники НТУ «ХПІ» за роками видання

Головний редактор

Морачковський О. К., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Morachkovskiy, O. K.)

Редакційна колегія

Аврамов К. В., доктор технічних наук, професор, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Avramov, K. V.)

Альтенбах Х., доктор технічних наук, професор, Інститут механіки, Університет Отто фон Геріке, Магдебург, Німеччина (Altenbach, H., Prof. Dr.-Ing. habil., Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Барканов Є. М., доктор інженерних наук, професор, Інститут матеріалів і конструкцій, Ризький технічний університет, Латвія (Barkanov, E. N.)

Бреславський Д. В., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Breslavskiy, D. V.)

Воробйов Ю. С., доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Vorobiov, Yu. S.)

Зінковський А. П., доктор технічних наук, професор, Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна (Zinkovskiy, A. P.)

Курпа Л. В., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Kurpa, L. V.)

Ларін О. О., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Larin, O. O.)

Львов Г. І., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Lvov, H. I.)

Мартиненко Г. Ю., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Martynenko, H. Yu.)

Міхлін Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Mikhlin, Yu. V.)

Науменко К., доктор технічних наук, професор, Інститут механіки, Університет Отто фон Геріке, Магдебург, Німеччина (Naumenko, K., Prof. Dr.-Ing. habil., Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Пеллікано Ф., доктор механіки, професор, Університет Модени і Реджо-Емілії, Італія (Pellicano, F., Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italy)

Ткачук М. А., доктор технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Tkachuk, M. A.)

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 11 від 26 грудня 2023 р.

© Національний технічний університет «ХПІ», 2023

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, П. І. ПАЛАМАРЧУК, А. В. СЕНЬКО, О. М. МАРУСЕНКО

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ РОТОРІВ

Розглянуто питання визначення напружено-деформованого стану при повзучості у моделях роторів парових та газових турбін. Формулювання задачі базується на загальному підході механіки суцільного середовища з використанням теорії плинності для опису деформацій повзучості. Як метод розв'язання використано метод скінченних елементів у реалізації професійного інженерного програмного забезпечення. Проаналізовано вплив відцентрового навантаження на напружено-деформований стан, що змінюється протягом 10000 год повзучості матеріалу роторів. Розглянуто дві моделі ротору – спрощену циліндричної форми та ротору барабанного типу, що описано геометрією тіла обертання та який складається з кількох циліндричних частин. Завдяки симетрії моделей розрахункові схеми побудовано на основі використання двовимірних скінченних елементів тіла обертання. Застосовано алгоритми для підготовки вхідних даних, що можуть бути рекомендовані для використання у практиці проектування підприємств енергетичної галузі. Для розрахунків повзучості використано гіпотезу плинності (закон Нортона). Проаналізовано повзучість моделей в різних температурних умовах з застосуванням у якості їхнього матеріалу різних сталей, що використовуються у турбобудуванні. За результатами виконаного комп'ютерного моделювання повзучості моделей роторів встановлено рівні деформування та характер перерозподілу напружень, що виникають при однаковому навантаженні відцентровими силами в різних температурних умовах, які викликані робочими процесами у турбіні. Проаналізовано рівні напружень та деформацій у роторі барабанного типу та встановлено найбільш навантажені та деформовані його області. Відмічається, що за даними проведеного моделювання для розглянутої моделі ротору барабанного типу накопичений за час аналізу рівень деформацій є помірним та не перевищує 0.4%, що є придатним з точки зору аналізу експлуатаційних властивостей.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, повзучість, метод скінченних елементів, напружено-деформований стан, тіло обертання, ротор турбіни.

The issue of determining the stress-strain state during creep in models of rotors of steam and gas turbines is considered. The formulation of the problem is based on the general approach of Solid Mechanics using incremental theory to describe creep strains. The Finite Element Method was used as a solution method in the implementation of professional engineering software. The influence of the centrifugal forces on the stress-strain state, which varies during 10,000 hours of creep of the rotor material, is analyzed. Two models of the rotor are considered: a simplified cylindrical and a drum-type rotor, which is described by the geometry of the body of revolution and which consists of several cylindrical parts. Due to the symmetry of the models, the calculation schemes are built on the basis of the use of a two-dimensional finite element of the body of revolution. Algorithms are applied for the preparation of input data can be recommended for use in the design practice of energy industry enterprises. The Norton law was used for creep calculations. The creep of the models in different temperature conditions with the use of various steels used in turbo-building as their material was analyzed. According to the results of the performed computer simulation of the creep of rotor models, the levels of deformation and the nature of the redistribution of stresses that occur under the same load by centrifugal forces in different temperature conditions caused by the operational processes in the turbine have been established. The stress and strain levels in the drum-type rotor were analyzed and the most loaded and deformed areas of it were determined. It is noted that according to the simulation data for the considered model of the drum-type rotor, the level of accumulated strains, is moderate and does not exceed 0.4%, which is suitable from the point of view of the analysis of operational properties.

Key words: computer simulation, creep, Finite Element Method, stress-strain state, body of revolution, turbine rotor.

Вступ. Сучасна енергетика вимагає постійного підвищення вимог до температурно-силових умов у парових та газових турбінах. Це обумовлює необхідність створення нових їхніх конструкцій. Проектування на сучасному етапі є неможливим без використання потужних САЕ програмних засобів, за допомогою яких відбувається аналіз різних варіантів конструктивного рішення. Одним з важливих факторів, який може обмежити термін працездатності турбіни, є високотемпературна повзучість її матеріалу [1-3]. На теперішній час роботи у напрямку комп'ютерного моделювання елементів конструкцій турбін, серед яких одним із найважливіших є ротор, виконуються, як правило, з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) [4]. Завдяки нелінійності рівнянь стану [3], їхня побудова є досить складним завданням [1], що вимагає аналізу експериментальних та експлуатаційних даних.

Отже, на сьогодні задачі аналізу напружено-деформованого стану роторів в умовах термосилового навантаження продовжують знаходитись у центрі уваги дослідників та інженерів.

У роботі [5] здійснено порівняльний аналіз динамічних та міцнісних характеристик роторів різної конструкції виробництва АТ «Турбоатом», які визначають надійність їх експлуатації. Обґрунтовано переваги комбінованих «композитних» роторів, які

підтверджені науково-технічними дослідженнями, проведеними АТ «Турбоатом» спільно з ППМаш НАН України та ІЕЗ ім. Є. О. Патона. Результатом науково-технічного співробітництва є розробка зварного комбінованого ротора середнього тиску із різних матеріалів для турбіни нового покоління К-325-23,5.

У роботі [6] для парових турбін типу Т-100/120-130 розроблена математична модель теплового і напружено-деформованого стану. В ході розрахунків, визначені максимально навантажені зони ротора і значення інтенсивностей напружень у них. Отримані дані дозволяють провести оцінку малоциклової втомлюваності і залишкового ресурсу основного металу турбіни.

У роботі [7] проведено розрахункові експерименти для ротора середнього тиску турбін К-200-130 з використанням математичного моделювання для визначення теплового, напружено-деформованого стану та тривалої міцності. Дискретизація розрахункової області проведена на основі методу скінченних елементів. Розрахунок напружено-деформованого стану ротора середнього тиску виконано за сумісної дії температурних напружень, градієнтів температурного поля, відцентрових сил інерції та напружень від тиску.

Авторами роботи [8] для опису повзучості ротора парової турбіни розроблено рівняння стану, що

включають зміцнення та розм'якшення. Далі для моделі ротора виконано розрахунки МСЕ для випадків холодного пуску та наступного гарячого пуску. Метою роботи [9] був аналіз локальних змін напружено-деформованого стану в умовах перехідних процесів нагрівання–охолодження. Створено рівняння стану для опису непружної поведінки вдосконалених жаростійких сталей 9–12% Cr. Використано т. зв. «mechanism-based» еволюційні рівняння для різних параметрів пошкоджуваності. Враховано температури пари та профілі навантаження, які відповідають ідеалізованій послідовності запуску, витримки та зупинки конструктивного елементу турбіни.

Аналіз локальних змін напружено-деформованого стану в роторі парової турбіни в умовах циклічного термомеханічного навантаження від повзучості та втоми представлено у роботі [10]. Застосована модель матеріалу на основі моделі Шабоса для моделювання багатовісного напружено-деформованого стану в роторі. Показано, що як температура, так і відцентрова сила, пов'язана зі швидкістю обертання, впливають на еволюцію основних напружень і деформацій, але ступінь впливу є різною в різних місцях.

В роботі [11] виконано аналіз локальної зміни напружено-деформованого стану та поведінки пошкоджень компонентів турбіни, виготовлених з жаростійкої сталі 9–12% Cr при високій температурі. Температура пари та профілі навантаження відповідають ідеалізованій послідовності запуску, витримки та зупинки турбіни. Проаналізовано тринадцять циклів цієї послідовності.

Дослідження пошкодження від взаємодії повзучості та втоми для ротора парової турбіни, виготовленої зі сплаву 9–12% Cr, під дією циклічних термомеханічних навантажень представлено у роботі [12]. Проаналізовано різні фактори, які впливають на повзучість і втомне пошкодження ротора парової турбіни, включаючи період витримки та швидкість обертання ротора.

Авторами роботи [13] підкреслюється важливість аналізу напруженого стану в області з'єднання лопаті з ротором, що обумовлений втомними пошкодженнями та пошкодженнями від повзучості. Вивчалися елементи з нікелевих сплавів типу IN7926 IN718 та X12CrMoWVNbN10-1-1. Представлено метод оцінки ресурсу, заснований на оцінювання параметру пошкоджуваності. Цей параметр включений у складну модель матеріалу, що враховує статичну, циклічну та в'язкопластичну поведінку матеріалів.

Методику моделювання високотемпературної поведінки ротора газової турбіни з використанням методу скінченних елементів описано у роботі [14]. Використано вдосконалену модель Шабоса–Леметра [3]. Досліджено вплив теплових процесів на розвиток залишкових напружень.

Методику дослідження повзучості та довготривалої міцності статично та циклічно навантажених елементів турбомашин представлено у роботі [15]. Наведено результати чисельного аналізу повзучості та руйнування замкових з'єднань лопаток.

В даній статті міститься опис задачі повзучості роторів турбомашин, що навантажено відцентровими силами при їхньому обертанні. За допомогою МСЕ отримано характеристики напружено-деформованого стану для двох моделей роторів.

Постановка задачі. Сформулюємо задачу визначення напружено-деформованого стану ротору при повзучості.

Розглянемо 3D область Ω , що обмежена поверхнею S . Для опису процесів деформування матеріалу при повзучості застосуємо систему диференціальних рівнянь рівноваги

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = \bar{X}_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\vec{\varphi}), \quad (1)$$

де $\vec{\varphi}$ – вектор переміщень;

σ_{ij} – компоненти тензору напружень;

$\bar{X}$ – вектор об'ємних навантажень, до яких віднесемо відцентрові сили.

Індексація $i, j = 1, 2, 3$ відповідає просторовим координатам x, y, z .

Обмежимося випадком малих деформацій, які мають місце у роторах. Для визначення тензору деформацій застосовуються геометричні рівняння Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Вважається, що тензор повних деформацій є адитивною величиною тензорів пружних деформацій та деформацій повзучості:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + e_{ij}^{Creep}, \quad (3)$$

та для кожного моменту часу є справедливим формулювання узагальненого закону Гуку

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - e_{kl}^{Creep}) = D_{ijkl}e_{kl}, \quad (4)$$

Тут введено позначення компонентів: ε_{ij} – компонент тензору повних деформацій, D_{ijkl} – тензору пружних констант, e_{kl}^{Creep} – тензору деформації повзучості.

Рівняння стану для опису деформацій повзучості оберемо у формі закону плинину (Нортону):

$$e_{kl}^{Creep} = \frac{3}{2} B(\sigma_i)^{n-1} S_{ij}, \quad (5)$$

Тут S_{ij} – компоненти девіатора тензору напружень, σ_i – інтенсивність напружень Мізеса, B та n – константи, що визначаються експериментально за точками другої ділянки кривої повзучості [1].

Як прийнято у МСЕ, за переходом до варіаційної

постановки задачі формулюється система диференціальних рівнянь відносно вузлових переміщень, розв'язок якої й визначає поточний розподіл компонент переміщень, деформацій та напружень на кожному кроці за часом. Для проведення комп'ютерного моделювання використано програмний комплекс ANSYS [16].

Аналіз результатів комп'ютерного моделювання повзучості роторів.

Спочатку розглянемо спрощену модель. Аналізується задача повзучості суцільного циліндру, що обертається навколо своєї осі. Це дозволяє проаналізувати напружено-деформований стан при врахуванні навантаження відцентровими силами.

Як розрахункову схему, використаємо меридіанальний переріз довгого суцільного циліндру радіусом 1 м.

Розглядається повзучість протягом 10000 год, швидкість обертання циліндру 25 об/с. Матеріал сталь 20Х3МВФА при $T=450^{\circ}\text{C}$. Матеріальні константи: модуль пружності $E=1.8 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассону $\nu=0.3$, константи до закону повзучості (5) при даній температурі $n=11.5$, $B=5.35 \cdot 10^{-35}$ МПа $^{-n}$ /год.

Результати розрахунку у вигляді розподілу за радіусом компонент тензору напружень – при пружному деформуванні та після 10000 год повзучості представлено на рис. 1. З них видно, що для цього матеріалу перерозподіл напружень є несуттєвим та не перевершує 0.5%. Максимальні деформації повзучості не перевершують $2.5 \cdot 10^{-4}$.

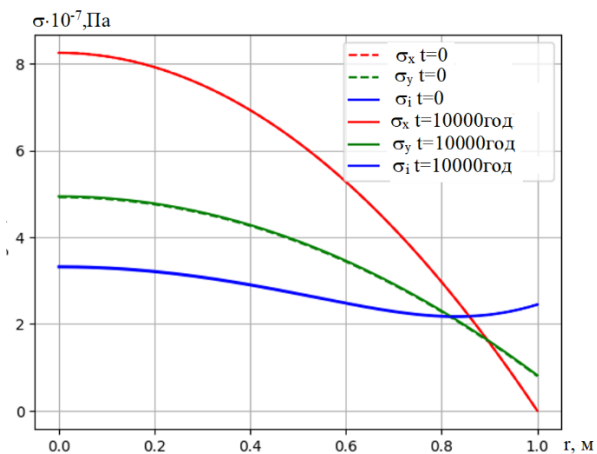


Рис. 1 – Розподіл напружень за радіусом суцільного циліндру. Врахування відцентрових сил. Сталь 20Х3МВФА при $T=450^{\circ}\text{C}$

Тепер проаналізуємо ту ж саму задачу повзучості з урахуванням відцентрових сил, але для циліндру, виготовленого зі сталі 45Х14Н14В2М та рівномірно нагрітого до $T=600^{\circ}\text{C}$. Константи до закону повзучості (5) при даній температурі $n=3$, $B=2 \cdot 10^{-10}$ МПа $^{-n}$ /год.

Аналогічно отриману залежність представлено на рис. 2. Для даної сталі при температурі 600°C вже спостерігається істотний перерозподіл напружень, на внутрішньому радіусі змінення напружень складає

приблизно 10%. Максимальні деформації повзучості не перевершують $4.0 \cdot 10^{-4}$.

Отже, температурні умови та матеріал, з якого виготовлено ротор, можуть суттєво обумовлювати наявність повзучості з перерозподілом напружень.

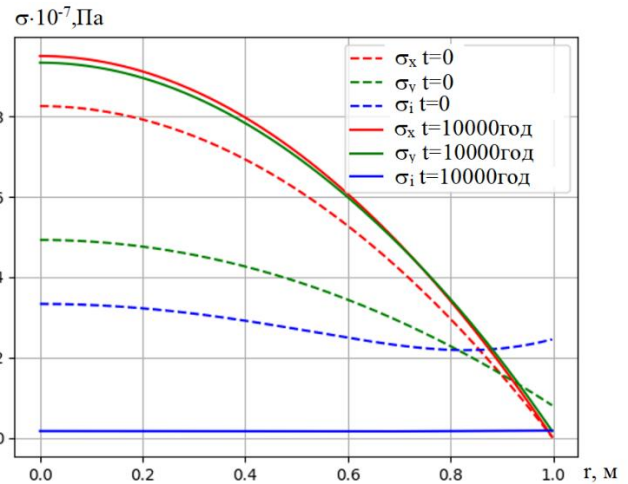


Рис. 2 – Розподіл напружень за радіусом суцільного циліндру. Врахування відцентрових сил. Сталь 45Х14Н14В2М при $T=600^{\circ}\text{C}$

Далі розглянемо повзучість ротору барабанного типу, що представляє собою суцільне тіло обертання складної геометрії (рис. 3). Після досліджень збіжності до моделювання було прийнято сітку з 417000 елементів. У розрахунках задано значення швидкості обертання 25 об/с, час аналізу повзучості 10000 год.

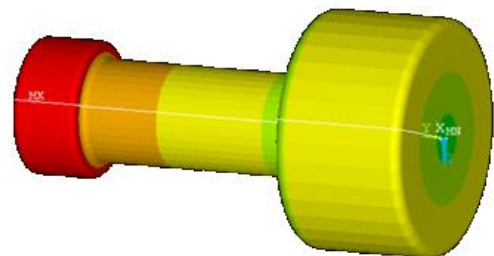


Рис. 3 – Загальний вигляд моделі ротору

Результати розрахунків представлено на рис. 4–6. На рис. 4 та рис. 5 наведено розподіл за перерізом значень інтенсивності напружень, рис. 4 містить дані початкового навантаження при $t=0$, а рис. 5 – після 10000 год навантаження при повзучості. Відмітимо, що найбільший рівень напружень має місце у найбільш масивній частині, максимум спостерігається у галтельному переході до більш тонкої області. Внаслідок повзучості має місце незначна релаксація напружень, максимальні значення зменшуються з 61.4 до 56.6 МПа.

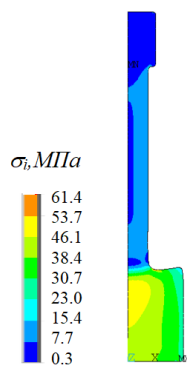


Рис. 4 – Розподіл за перерізом моделі ротору значень інтенсивності напружень, $t=0$

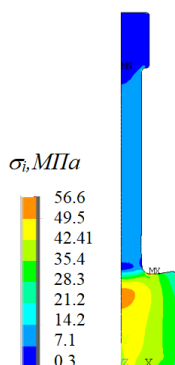


Рис. 5 – Розподіл за перерізом моделі ротору значень інтенсивності напружень, $t=10000$ год

На рис. 6 наведено розподіл значень інтенсивностей деформацій c_i після 10000 год повзучості. Як видно з мапи розподілу, у жодній точці моделі ротору деформації не перевершують 1%, що є вимогою безпечної експлуатації. Вони є навіть суттєво меншими, максимальні, які так само, як й напруження, зосереджені в області гальтельного переходу, не перевищують 0.36 %.

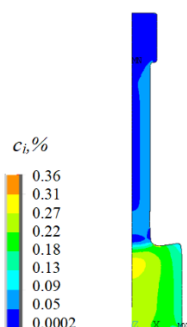


Рис. 6 – Розподіл за перерізом моделі ротору значень інтенсивності деформацій, $t=10000$ год

Отже, аналіз напруженого та деформованого стану ротору після 10000 год повзучості дозволяє зробити висновок, що в даних умовах навантаження відцентровими силами повзучість саме даного матеріалу може вважатись незначною, що й є вимогою при проектуванні.

Висновки. Представлено постановку задачі та надано опис результатів розрахунку напружено-деформованого стану при повзучості для моделей роторів барабанного типу. Моделі мають геометричну форму тіл обертання – канонічної та складної геометрії. Для комп'ютерного моделювання використано метод скінченних елементів. Для двох марок сталей при різних температурах показано роль повзучості при тривалій експлуатації протягом 10000 год. Встановлено якісні та кількісні дані з перерозподілу напружень та загального рівня деформацій.

Подяка. Ця робота була частково підтримана (Д.В.Бреславський) Фондом Фольксваген "Visiting research program for refugee Ukrainian scientists" (Az. 9C184).

Список літератури

1. Penny R.K., Marriott D.L. *Design for creep*. London: Chapman and Hall, 1995. 430 p.
2. Подгорный А.Н., Бортовой В.В., Морачковский О.К. и др. *Ползучесть элементов машиностроительных конструкций*. Київ: Наук. думка, 1984. 262 с.
3. Lemaître J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: University press, 1994. 556 p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann. Elsevier, 2013. 672 p.
5. Гришин Н. Н., Зайцев Б. Ф., Пальков И. А. Кантор А. Г., Пашенко Ю. Г. Сварной комбинированный ротор паровой турбины К-325-23,5. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: *Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування*. Харків: НТУ «ХП». 2019. № 3(1328). С. 66–75.
6. Черноусенко О. Ю., Пешко В. А. Розрахункове дослідження теплового і напружено-деформованого стану ротору високого тиску турбіни Т-100/120-130 ст. № 1 ПАТ «Харківська ТЕЦ-5». *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: *Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування*. Харків: НТУ «ХП». 2017. № 9(1231). С. 34–40.
7. Черноусенко О. Ю., Риндюк Д. В., Пешко В. А. Аналіз можливості продовження експлуатації ротора середнього тиску з урахуванням тріщин критичного розміру. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: *Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування*. 2019. № 1. С. 4–9.
8. Eisenträger, J., Naumenko, K., Kostenko, Y., Altenbach, H. Analysis of a Power Plant Rotor Made of Tempered Martensitic Steel Based on a Composite Model of Inelastic Deformation. In: Naumenko, K., Krüger, M. (eds) *Advances in Mechanics of High-Temperature Materials. Advanced Structured Materials*. 2020. Vol 117. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23869-8_1.
9. Konstantin Naumenko, Andreas Kutschke, Yevgen Kostenko, Thorsten Rudolf. Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature. *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. Volume 78, Issue 8. Pages 1657–1668. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2010.12.002>
10. Yang Liu, Weizhe Wang. Evolution of principal stress of a turbine rotor under cyclic thermo-mechanical loading. *Engineering Failure Analysis*. 2020. Volume 109. 104242, ISSN 1350-6307, <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.104242>.
11. Shifang Wu, Ming Kang, Zhenwei Cai, Weizhe Wang. Multi-axial creep-fatigue analysis of a cracked groove structure subjected to cyclic thermal loading. *Engineering Failure Analysis*. 2022. Volume 131. 105826.

<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105826>.

12. Xuanchen Zhu, Haofeng Chen, Fuzhen Xuan, Xiaohui Chen. On the creep fatigue and creep rupture behaviours of 9–12% Cr steam turbine rotor. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2019. Volume 76. Pages 263–278. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.04.017>.

13. Rauch M., Roos E. Life assessment of multiaxially cyclic loaded turbine components. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2008. Volume 31. Issue 6. Pp. 441–451.

14. Benaarbia A., Rae Y., Sun W. Unified viscoplasticity modelling and its application to fa-tigue-creep behaviour of gas turbine rotor. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 136. Pp. 36–49.

15. Anishchenko G.O., Breslavskii D.V., Morachkovskii O.K. Creep and long-term strength of herringbone lock joints of gas-turbine engines under the combined action of static and cyclic loads. *Strength of Materials*. 1998. 30(1). Pp. 25–30.

16. Lee H. H. *Finite element simulations with ANSYS Workbench 18*. SDC publications, 2018.

References (transliterated)

1. Penny R.K., Marriott D.L. *Design for creep*. London: Chapman and Hall, 1995. 430 p.

2. Podgornyj A. N., Bortovoj V.V., Morachkovskij O.K. [i dr.]. *Polzuchest' jelementov mashinostroitel'nyh konstrukcij* [Creep of elements of mechanical engineering structures]. Ky'yiv: Nauk. dumka, 1984. 262 p.

3. Lemaître J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: University press, 1994. 556 p.

4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann. Elsevier, 2013. 672 p.

5. Grishin N. N., Zajcev B. F., Pal'kov I. A., Kantor A. G., Pashhenko Ju. G. Svarnoj kombinirovannyj rotor parovoj turbiny K-325-23,5 [Welded combined rotor of steam turbine K-325-23.5]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Energetychni ta teplotexnichni procesy` j ustakuvannya*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2019, no. 3(1328), pp. 66–75.

6. Chernousenko O. Yu., Peshko V. A. Rozrakhunkove doslidzhennya teplovogo i napruzhenno-deformovanogo stanu rotoru vy`sokogo ty'sku turbiny` T-100/120-130 st. no. 1 PAT «Kharkivs'ka TECz-5» [Computational study of the thermal and stress-strain state of the high-pressure rotor of the T-100/120-130 century turbine. No. 1 PAT "Kharkivska HPS-5]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Energetychni ta teplotexnichni procesy` j ustakuvannya*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2017, no. 9(1231), pp. 34–40.

7. Chernousenko O. Yu., Ry'ndyuk D. V., Peshko V. A.

Analiz mozhy`vosti prodovzhennya ekspluatatsiyi rotora seredn'ogo ty'sku z uraxuvannyam trishhy'n kry`ty'chnogo rozmiru [Analysis of the possibility of continuing the operation of the medium-pressure rotor, taking into account cracks of critical size]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Energetychni ta teplotexnichni procesy` j ustakuvannya*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2019, no 1, pp. 4–9.

8. Eisentragger, J., Naumenko, K., Kostenko, Y., Altenbach, H. Analysis of a Power Plant Rotor Made of Tempered Martensitic Steel Based on a Composite Model of Inelastic Deformation. In: Naumenko, K., Krüger, M. (eds) *Advances in Mechanics of High-Temperature Materials. Advanced Structured Materials*, 2020, Vol 117. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23869-8_1

9. Konstantin Naumenko, Andreas Kutschke, Yevgen Kostenko, Thorsten Rudolf. Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, Volume 78, Issue 8, Pages 1657–1668, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.002>

10. Yang Liu, Weizhe Wang. Evolution of principal stress of a turbine rotor under cyclic ther-mo-mechanical loading. *Engineering Failure Analysis*, 2020, Volume 109, 104242, ISSN 1350-6307, <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.104242>.

11. Shifang Wu, Ming Kang, Zhenwei Cai, Weizhe Wang. Multi-axial creep-fatigue analysis of a cracked groove structure subjected to cyclic thermal loading. *Engineering Failure Analysis*, 2022, Volume 131, 105826. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105826>.

12. Xuanchen Zhu, Haofeng Chen, Fuzhen Xuan, Xiaohui Chen. On the creep fatigue and creep rupture behaviours of 9–12% Cr steam turbine rotor. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2019, Volume 76, Pages 263–278, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.04.017>.

13. Rauch M., Roos E. Life assessment of multiaxially cyclic loaded turbine components. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2008, Volume 31, no. 6, pp. 441–451.

14. Benaarbia A., Rae Y., Sun W. Unified viscoplasticity modelling and its application to fa-tigue-creep behaviour of gas turbine rotor. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, Vol. 136, pp. 36–49.

15. Anishchenko G.O., Breslavskii D.V., Morachkovskii O.K. Creep and long-term strength of herringbone lock joints of gas-turbine engines under the combined action of static and cyclic loads. *Strength of Materials*, 1998, 30(1), pp. 25–30.

16. Lee H. H. *Finite element simulations with ANSYS Workbench 18*. SDC publications, 2018.

Надійшла (received) 1.12.2023

Біомосі про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khipi.edu.ua.

Паламарчук Павло Ігорович (Palamarchuk Pavlo) – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; Pavlo.Palamarchuk@infiz.khipi.edu.ua

Сенько Альона Володимирівна (Senko Alyona) – доктор філософії, старший викладач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Alyona/Senko@khipi.edu.ua

Марусенко Олексій Миколайович (Marusenko Oleksii) – асистент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6911-2500>; e-mail: Oleksii.Marusenko@khipi.edu.ua

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, В. В. ЛИСЕНКО, В. О. МЕТЕЛЬОВ, О. А. ТАТАРІНОВА, О. В. ФЕСЮКОВ

КОНСТРУКЦІЯ, АПАРАТНА ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ТЕПЛОВИМ РЕЖИМОМ УСТАНОВКИ ДЛЯ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИХ ВИПРОБУВАНЬ

Надано опис конструкції, системи управління та програмної реалізації управління тепловим режимом експериментальної установки для випробувань на повзучість, яку розроблено в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут». В результаті проведення тестування автоматизованої системи управління та контролю температури було встановлено основні характеристики системи. Визначено, що діапазон завдання регулювання температури від 0 до 999°C. Робочий діапазон нагрівання від 100 до 500°C. Встановлено, що при виконанні умов розміщення зразку і забезпеченні потрібної термоізоляції камери нагрівання, абсолютне значення середньої похибки регулювання температури має значення, що не перевищує $\pm 2^\circ\text{C}$. Середнє-квадратичне значення похибки регулювання не більш $\pm 1,6^\circ\text{C}$. Визначено, що стабільність підтримання температури залежить від місця розміщення зразку: в центральній зоні камери значення коливань температури є меншими, ніж при нижньому розміщенні зразку. Час циклу вимірювання і регулювання температурного режиму 1,0012 сек. Потужність нагрівачів складає 2x1200 Вт (при фазному включенні) і 2x3500 Вт (при лінійному). Мікроконтролер, задіяний у системі, має ресурси для підключення додаткових модулів і первинних перетворювачів, що надає змогу розширення функціональних можливостей системи шляхом організації додаткових вимірювальних каналів. Наведено перші результати тестування при дослідженні повзучості плоских зразків з алюмінієвих сплавів. Характер отриманої за вимірами деформації зразків кривої повзучості повністю відповідає класичним її формам з трьома ділянками. Надано вигляд фрагменту зруйнованого зразку. Модульна конструкція, універсальність і високі технічні характеристики системи та установки у цілому дозволяють її використання при проведенні різноманітних експериментів у наукових дослідженнях і в навчальному процесі.

Ключові слова: експериментальна установка, високотемпературні випробування, повзучість, управління тепловим режимом, апаратне забезпечення, мікроконтролер, програмне забезпечення, зразки.

A description of the design, control system, and software implementation of the thermal mode control of the experimental creep testing machine developed at the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" is given. As a result of testing the automated temperature control system, the main characteristics of the system were established. It was determined that the range of the temperature regulation task is from 0 to 999°C. The working range of heating is from 100 to 500°C. It was established that when the conditions for placing the specimen and ensuring the required thermal insulation of the heating chamber are met, the absolute value of the average temperature adjustment error has a value that does not exceed $\pm 2^\circ\text{C}$. The root-mean-square value of the adjustment error is no more than $\pm 1.6^\circ\text{C}$. It was determined that the stability of temperature maintenance depends on the location of the specimen: in the central zone of the chamber, the values of temperature fluctuations are smaller than when the specimen is placed at the bottom. The cycle time of measuring and adjusting the temperature regime is 1.0012 seconds. The power of the heaters is 2x1200 W (in phase switching) and 2x3500 W (in linear mode). The microcontroller used in the system has resources for connecting additional modules and primary converters, which enables expanding the functionality of the system by organizing additional measurement channels. The first results of testing in the study of creep of plane specimens made from aluminum alloys are presented. The character of the creep curve obtained from the strain measurements of the specimens fully corresponds to its classical forms with three sections. A view of a fragment of the destroyed specimen is provided. The modular design, versatility and high technical characteristics of the system and the testing machine as a whole allow its use in various experiments in research projects and in the educational process.

Key words: testing machine, high temperature testing, creep, thermal control, hardware, microcontroller, software, specimens.

Вступ. Математичне моделювання процесів деформування та руйнування сучасних конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах, вимагає побудови рівнянь стану, які адекватно описуватимуть такі процеси. У свою чергу, така побудова вимагає наявності даних щодо деформування та довготривалої міцності матеріалів, що описуються. Ці дані є можливим отримати тільки завдяки проведенню експериментальних випробувань. Для них використовується спеціалізоване експериментальне обладнання.

Більшість сучасних установок, що призначені для вивчення процесів високотемпературного деформування та руйнування, побудовано для проведення експериментів при простому напруженому стані на одновимірних зразках [1, 2]. Такі установки є стандартизованими та промислово випускаються відносно великими партіями [1, 3]. Також в останні роки інтенсивно розвивається технологія випробувань на повзучість з використанням серій зразків малого розміру [4].

Дані, отримані при одновісних експериментах, є вкрай необхідними для побудови рівнянь стану, що й

виконується у переважній більшості випадків [5]. Але з кожним роком збільшується кількість матеріалів з новими, досить складними властивостями, що характеризують їхню поведінку при складному напруженому стані. У зв'язку з цим виникає потреба в проведенні експериментальних випробувань при дво- або тривимірному напруженому стані. Це, безумовно, ускладнює як саме експериментальне устаткування, так й методику проведення досліджень.

У теперішній час існує декілька реалізацій установок для випробувань на повзучість при високих температурах.

Стандартом [6] описуються основні підходи та методи для побудови експериментального обладнання та проведення експериментів на повзучість, в тому числі й при складному напруженому стані, який реалізується у судинах високого тиску, елементах з концентраторами напружень тощо.

Авторами монографії [7] описано підходи до аналізу повзучості при складному напруженому стані. Аналізуються постановки та результати проведення досліджень у зразках з надрізами та тріщинами, компонентів під тиском зі зварними швами тощо.

В роботі С. Холдсворта [8] проаналізовано експериментальні процедури визначення опору повзучості з урахуванням циклічності навантаження з витримками. Авторами роботи [9] обговорюються питання впливу структури металу та взаємодії пов'язаних з нею механічних властивостей у зварному виробі під впливом багатоосових напружень. Аналізуються питання врахування розглянутої взаємодії при оцінюванні існуючого конструктивного елементу.

Одним з найбільш ефективних типів експериментів є аналіз багатовісної повзучості трубок, які можуть бути навантажені внутрішнім тиском, розтягом та крутінням. Дослідженням таких зразків з різними діаметрами трубчастих складових, що моделюють елементи ядерного реактору, присвячено роботу [10]. У роботі [11] наведено результати експериментального дослідження повзучості трубчастих зразків із феритної сталі при складному напруженому стані. Визначено залежність швидкості сталої повзучості й межі повзучості від типу напруженого стану.

Дану статтю присвячено опису конструкції, системи управління, програмної реалізації управління тепловим режимом експериментальної установки для випробувань на повзучість зразків та моделей, яку розроблено в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут».

Конструкція експериментальної установки.

На першому етапі робіт з розробки та апробації експериментальної установки для випробувань зразків та моделей на повзучість та довготривалу міцність було прийнято рішення обмежитись виготовленням установки для проведення випробувань одновимірних зразків. Модульна конструкція нагрівальної печі з чотирьох бокових стінок, що незалежно монтуються, дозволяє їхню заміну на дві таких, в яких передбачено додаткові отвори для системи навантаження, наприклад, для розтягу у двох напрямках. Загальний вигляд розробленої установки представлено на рис. 1.



Рис.1 — Експериментальна установка. Момент монтажу зразку перед встановленням останньої стінки печі

В установці реалізовано пряме навантаження зразку при розтязі набором масивних елементів заданої маси. Переміщення зразку або моделі, розташованих в електричній нагрівальній печі та навантажених розтягом, вимірюються за допомогою стандартної системи екстензометрів. Дані отримуються за допомогою датчиків годинникового типу з роздільною можливістю 0.01 мм. Вимірювання температури виконується за допомогою трьох термопар, які прикріплені на зразку.

Апаратна та програмна реалізація системи управління тепловим режимом

Основною проблемою при виготовленні експериментальної установки було створення надійної сучасної системи вимірювання та підтримки температурного режиму у печі. Для її вирішення було створено автоматизовану систему.

Автоматизована система вимірювання та контролю температури у печі «ТЕРМО-2022» (рис. 2) призначена для використання при проведенні експериментальних досліджень зразків та моделей з метою визначення їхніх механічних властивостей (насамперед, повзучості та довготривалої міцності) в різноманітних температурних умовах. Важливими особливостями системи є спроможність отримання високих температур нагрівання дослідного зразка, висока точність встановлення і підтримування потрібної температури, достатньо значна потужність безконтактних нагрівачів.



Рис. 2 — Зовнішній вигляд системи управління нагріванням та підтримки температури печі експериментальної установки

До основних технічних характеристик належать наступні:

Інформаційні канали вимірювання температури у кількості 5 одиниць, з яких 3 призначені для вимірювання температури зразку, що досліджується. До цих каналів відносяться первинні температурні перетворювачі (ППП) – термопари типу К (ТХА) [12], схеми компенсації «холодного спаю» і аналого-цифрові перетворювачі (АЦП). Діапазон вимірювання температур від 0 до 800° С. Похибка вимірювань, не більш 2°С. Відстань від точок вимірювань до основного блока системи 2 м.

Датчик значень потрібної температури нагріву (ЦЗТ) – цифровий. Діапазон значень від 0 до 999°С, крок завдання – 1°С.

Відображення значень заданої і вимірюваних температур, стану і потужності нагрівачів проводиться на рідкокристалічному індикаторі РКІ (2 рядки по 16 символів).

Передача значень заданої і вимірюваних температур, стану ТЕН відбувається до персонального комп'ютера (ПК) по послідовному інтерфейсу RS-232 (USB) зі швидкістю 9600 бод, без контролю паритету з 1 стоп-бітом при символному кодуванні в коді ASCII. Інтервал передачі блока даних складає 1 с.

Електричний пристрій нагрівання (ТЕН) складається з двох керамічних нагрівачів типу ЕНКк 160-200. Для забезпечення потрібної температури нагрівання була вибрана напруга живлення 380 В. Спосіб управління процесом нагрівання – широтно-імпульсна модуляція (ШІМ) з забезпеченням гальванічної розв'язки сигналів керування від силових кіл. Стан включення ТЕН має світлову індикацію.

Силова частина кіл включення ТЕН має елементи захисту від аварійних ситуацій (перевантажень, коротких замикань).

Обробка вимірюваних даних, управління процесом нагрівання, забезпечення потрібної індикації і передачі даних здійснюється за допомогою засобів мікропроцесорної техніки.

Програмне забезпечення системи має відкритий код і можливість подальшого корегування і модифікації. Мова програмування – С. Алгоритм роботи програми виконує функцію ПІ - регулювання.

Живлення мікроконтролерного модуля МК, а також плат АЦП і РКІ здійснюється від інтерфейсу USB або за допомогою зовнішнього блоку живлення (постійна напруга в діапазоні 7 - 12 В). Струм споживання: не більш 400 мА.

Відповідно до технічних вимог на систему, у якості первинного температурного перетворювача ПТП застосовані термопар типу ТХА (міжнародне позначення - К). При цьому вихідний сигнал – напруга, при температурі точки вимірювання 800°C - 33.275 мВ (при температурі вільних кінців 0°C), що потребує попереднього підсилення. Другою особливістю використання термопар є необхідність застосування елементів компенсації температури холодного спаю ПТП [13].

Для забезпечення вимірювань температури зі застосуванням термопар типу К, використовуються модулі на базі мікросхем MAX6675 [13].

Відмінні особливості модулів:

- компенсація холодного спаю;
- простий, сумісний із SPI, послідовний інтерфейс;
- 12-розрядна роздільна здатність ($0,25^{\circ}\text{C}$);
- діапазон температур, що вимірюються: 0 - 1024 градуси Цельсія;
- точність вимірювання температури: ± 1.5 градуси Цельсія.

Використання модулів одного типу дає змогу об'єднання сигналів управління CS і SCK для всіх п'яти модулів. Це надає можливість суттєвого зменшення кількості портів МК для підключення.

Сервісні та управляючі елементи системи. У зв'язку з необхідністю забезпечення відображення незначного об'єму вимірювальної і службової інформації, до складу системи входить 16x2 LCD модуль РКІ з блакитним підсвічуванням екрану. Контролер модуля – мікросхема HD44780 [14].

В силовій частині системи для регулювання потужністю нагрівачів ТЕН використовуються силові семістори з елементами оптичної гальванічної розв'язки. Відповідно до вимог технічного завдання, такими є твердотільні реле SSR-40DA [15], які забезпечують включення навантаження з максимальним струмом 40 А при напрузі до 400 В.

Додатковою перевагою модулів SSR є наявність світлодіоду, розміщеного на верхній кришці, який дає змогу візуально стежити за процесом включення цього елемента.

Для забезпечення високої швидкодії і функціональності у якості плати МК з вбудованим перетворювачем інтерфейсу, елементами вторинного живлення і інше, було вибрано модуль Arduino-ATmega2560 [16] з характеристиками:

- мікроконтролер ATmega2560;
- цифрові входи/виходи - 54;
- цифрові / аналогові входи – 16;
- Flash-пам'ять 256 КБ (ATmega2560), з яких 8 КБ використовуються завантажувачем;
- SRAM 8 КБ (ATmega2560);
- EEPROM 4 КБ (ATmega2560);
- тактова частота 16 МГц;
- наявність вбудованого USB інтерфейсу.

Структурну схему системи управління представлено на рис.3.

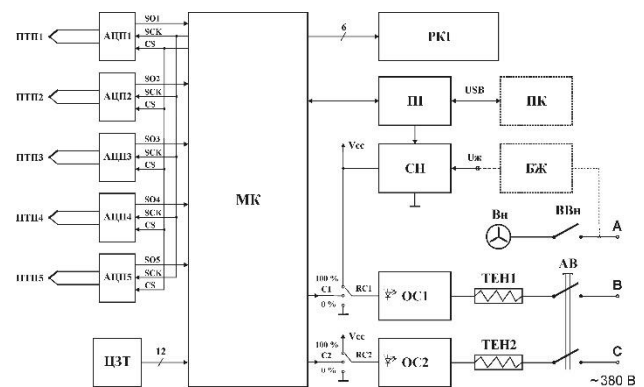


Рис. 3 – Структурна схема системи управління тепловим режимом печі

Канали вимірювання температури складаються з первинних температурних перетворювачів (ПТП) - термопар, які підключені до аналого-цифрових перетворювачів (АЦП) типу MAX6675. Отримання вимірювальної інформації мікроконтролером МК від модулів MAX6675 здійснюється одночасно в послідовному коді по лініях SO1 - SO5. При цьому МК забезпечує відповідно до часової діаграми видачу сигналів вибору АЦП - CS і сигналу стробування - SCK. З метою підвищення швидкодії вимірювань

запуск АЦП і послідовна видача кодів виконується одночасно для всіх АЦП за сигналом стробування SCK.

Значення заданої температури задається на цифровому задавачі ЦЗТ і поступає у двійково-десятичному коді на цифрові входи мікроконтролера.

Рідкокристалічний індикатор РКІ має стандартне (6-ти дрітове) підключення і забезпечує якісне відображення вимірювальної і сервісної інформації. Перетворювач інтерфейсу ПІ забезпечує апаратну реалізацію USB інтерфейсу між МК і персональним комп'ютером ПК при виконанні операцій програмування МК і передачі даних. Елементи силової частини мають два канали включення елементів нагрівання. До складу них входять: трьохпозиційний перемикач управління потужністю (100%, 0% і автоматичний режим – С), оптосемістор ОС зі світлодіодом індикації включення. Термоелектричний нагрівач ТЕН підключається до силової мережі послідовно через ОС. Канали нагрівання включаються на різні фази через автоматичний вимикач АВ, який забезпечує захист силових кіл.

Живлення всіх низьковольтних модулів системи може забезпечуватися від персонального комп'ютеру (по інтерфейсу USB) або зі зовнішнього блока БЖ (+9–12 В) через вбудований стабілізатор напруги СН.

Загальний алгоритм роботи системи враховує вимоги повного автоматизованого управління процесом нагрівання дослідного зразка, забезпечення завдання потрібної температури, інформативності даних про температури у контрольних точках, передачі даних про задані і виміряні параметри і додаткової службової інформації. У зв'язку з запропонованим методом управління (ПІ-регулювання) і відповідно до вимог технічного завдання, алгоритм роботи складається з основної частини, яка побудована на послідовному циклічному виконанні потрібних операцій і дій, та підпрограми обробки переривань, яка забезпечує безпосереднє управління силовими елементами ТЕН. Час виконання робочого циклу T_c програми повинен складати 1 секунду. Тривалість цього часу забезпечується апаратними (таймером – лічильником, налаштованим на внутрішні переривання) і програмними засобами.

При проведенні доведення установки було визначено, що варіант управління температурою нагрівання зразка по даним температури ТЕН є недоцільним, тому новий алгоритм роботи програми має лише один варіант управління – по значенню середньої температури зразку. Блок-схема алгоритму показана на рис. 4. Стисло наведемо пояснення змісту основних модулів.

Програмний модуль 1 – виконання операцій початкового налаштування: призначення портів на введення/виведення, налаштування таймеру-лічильника переривань ТС2, налаштування універсального прийомо-передавача УАПІ, налаштування контролера РКІ.

Програмний модуль 2 – виконання операцій отримання значення заданої температури зі цифрового задавача.

Програмний модуль 3 – виконання операцій вимірювання температури: отримання даних о температурі 5 точок зі модулів MAX6675.

Програмний модуль 4 – розрахунок значення широтно-імпульсного управління ШІМ по значеннях середньої температури зразку.

Програмний модуль 5 – запис значення t_{on} нагрівача, перезавантаження таймера-лічильника переривань, включення ТЕН при умові що $t_{on} > 0$.

Програмний модуль 6 – індикація на РКІ даних щодо результатів вимірювання температури (ТЕН і зразок), значення заданої температури, відхилення температури зразку від заданого значення, потужність ТЕН у відсотках.

Програмний модуль 7 – передача до ПК даних щодо результатів завдання і вимірювання температури, стану управління ТЕН.

Програмний модуль 8 – процедура очікування завершення циклу процесу управління, який дорівнює 1 секунді. Це визначається таймером-лічильником переривань і передається програмним шляхом.

Основний цикл роботи повторюється без кінця.

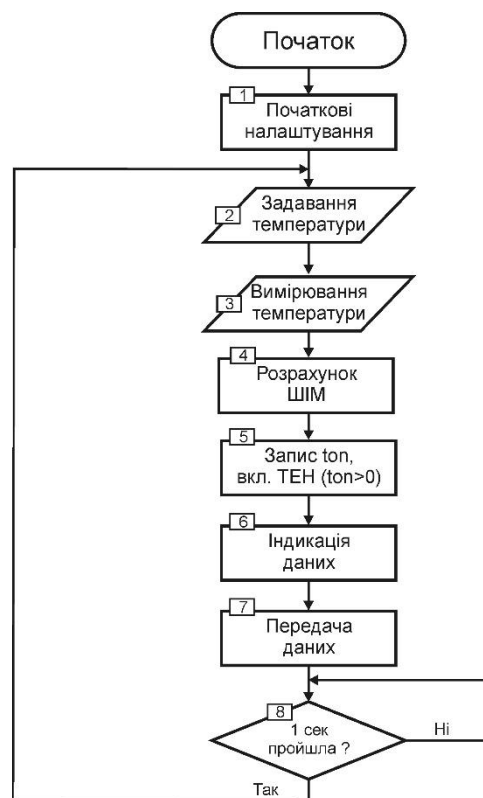


Рис. 4 – Блок-схема алгоритму основної програми

При доведенні системи виконано тестування розроблених програмних модулів (функцій) забезпечення роботи з модулями АЦП MAX6675, цифровим задавачем температури, налаштування і організація переривань, розрахунку значення широтно-імпульсного управління ШІМ.

Функції програми складені з урахуванням архітектури мікроконтролера ATmega2560 [16].

Наведемо лише опис однієї, але важливої, функції - функції опитування 5 модулів АЦП MAX6675. Для зменшення кількості портів для роботи з 5 термопарами і прискорення часу отримання результатів вимірювання температури, функція виконує дії відповідно до часової діаграми [13] з єдиною для всіх модулів видачею сигналів вибору АЦП - CS і сигналу стробування - SCK. Отримання вимірювальної інформації мікроконтролером МК від модулів MAX6675 здійснюється в послідовному коді по лініям SO1 - SO5.

В опису MAX6675 [13] наведено порядок дій для управління процесом вимірювання: видачу низького рівня сигналу CS і видачу тактового сигналу SCK, для зчитування результатів на лінії SO, для виведення першого біта на вивід SO. Повне зчитування послідовного інтерфейсу потребує 16 тактів синхронізації. Перший біт, D15, є фіктивним бітом знаку і завжди дорівнює 0. Біти D14-D3 містять перетворені в код значення температури в послідовності від MSB до LSB. Біт D2 зазвичай низький і стає високим, коли вхід термопари відкритий. D1 є низьким, щоб забезпечити ідентифікатор пристрою для MAX6675, а при передаванні біта D0 лінія SO переходить у третій-високоімпедансний стан.

Склад і порядок виконання робочої програми системи відповідає алгоритму (рис. 4), технічним і функціональним вимогам на систему. При цьому основний алгоритм роботи і текст головної функції мають прямий зв'язок з викликами спеціальних функцій. При тестуванні головної функції програми було проведено аналіз її працездатності при вимірюваннях, отриманні і відображенні інформації на екрані індикатора при різних режимах управління, виконання протоколу передачі даних до персонального комп'ютера.

Для забезпечення відображення інформації на РКІ з контролером HD44780 використані функції з бібліотек *alcd.h* і *stdio.h*. Видача даних про результати вимірювань температур, задану температуру, похибку встановлення температури, ступень регулювання потужності нагрівання, проводиться зі використанням стандартних функцій бібліотеки *stdio.h*. Налаштування прийомо-передавача УАПП (швидкість передачі і формат даних, паритет) виконується відповідно до функціональних вимог.

Далі було проведено перевірку правильності функціонування елементів системи і її програмного забезпечення, налаштування коефіцієнтів ПІ-регулятора, визначення отриманих технічних характеристик.

Працездатність системи оцінювалась по даних, що відображаються на індикаторі РКІ і фіксуються у лог-файлах спеціалізованої програми Terminal. При обробці результатів вимірювання температури використовувались данні записані у даних лог-файлах. Також за протоколом лог-файлів було визначено реальний час одного циклу вимірювання і управління за формулою:

$$T_c = \frac{t_k - t_n}{n_e}, \quad (1)$$

де t_k – кінцевий час запису лог-файлу;

t_n – початковий час;

n_e – кількість вимірювань зафіксованих за час від t_n до t_k .

Про результатах розрахунків з даних лог-файлів було встановлено що T_c МК з кварцом 16 МГц, складає 1,0012 секунди – при значенні кількості кроків управління $nT_c = 243$.

В процесі обробки результатів досліджень данні з лог-файлів оброблялися за допомогою Microsoft Excel (рис. 5) і спеціалізованої програми CALIBR 2.0 [17], яка допомагає автоматизувати процес розрахунку абсолютної та відносної похибки, невизначеностей по типу А, В та розширену невизначеність. Головне призначення цієї програми – автоматичне отримання заданої кількості вимірюваних значень безпосередньо від вимірювальної системи по інтерфейсу RS-232, або завантаження вже отриманих значень з файлу, та подальша обробка інформації для отримання значень похибок та невизначеностей вимірювання.

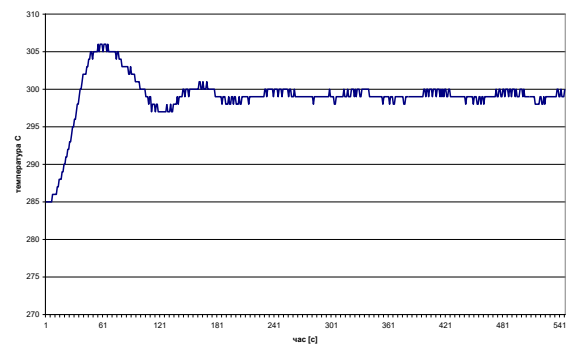


Рис. 5 – Приклад графіку середньої температури зразку у часі

При проведенні досліджень для визначення механічних властивостей конструкційних матеріалів і моделей елементів конструкцій пропонується наступна методика і порядок виконання вимірювань:

1. Виконання підготовчих операцій з розміщення термопар на дослідному зразку, матеріал якого потребує досліджень.

2. Стенд кабелем підключається до роз'єму USB комп'ютера (з попередньо встановленим драйвером порту CH341). Повідомлення «TERMO SYSTEM 2022-2023» на екрані LCD свідчить про наявність живлення і справність модулів МК і LCD.

3. Через 10 секунд на індикаторі з'являється повідомлення про початок роботи. Процес вимірювання і передавання даних супроводжується спалахуванням світлодіоду TX на платі модуля МК.

4. Перевіряється, що при включенні системи нагрівання у холодному стані покази всіх ПТП приблизно відповідають значенню температури повітря у приміщенні.

5. Значення температури нагрівання зразку виставляється на цифровому задавачі температури ЦЗТ.

6. Після завершення підготовчих операцій здійснюється включення живлення силової частини – автоматичним вимикачем АВ в положення «ON».

7. Для забезпечення одночасного спостереження за даними з усіх вимірювальних каналів і запису цих даних у файл застосовується універсальна програма роботи з портами комп'ютера (Terminal).

Тестування при експерименті на повзучість.

Після завершення проведення випробувань основних вузлів та складових частин експериментальної установки було проведено тестові випробування. Для дослідів було обрано зразки з алюмінієвих сплавів (рис. 6), температура випробувань складала 275°C .

Метою тестування була якісна перевірка основних характеристик установки та встановлення можливості отримання кривих повзучості.

Перевірка можливостей роботи установки показала цілком задовільну якість її роботи. Розроблена система управління тепловим режимом зразку при випробуваннях надавала можливість підтримки температури з точністю $\pm 2^{\circ}\text{C}$ (рис. 7).



Рис.6 – Зразки для досліджень на повзучість

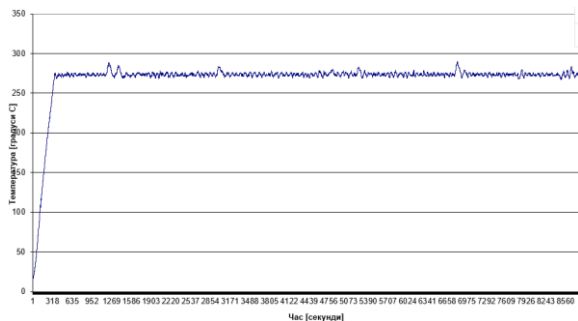


Рис. 7 – Експериментальне визначення значення температури на зразку в залежності від часу

Як приклад, опишемо один з експериментів. При проведенні експерименту зі зразком, наведеним на рис.6 а), він навантажувався напруженням розтягу 20

МПа. При випробуваннях за допомогою відео фіксації показань переміщень двох індикаторів годинникового типу визначались переміщення захвату установки. Ці осереднені по двох індикаторах показання використано для визначення залежності осової деформації зразку від часу. Відповідний графік наведено на рис. 8. Його якісний аналіз свідчить, що деформування зразку відбулось зі збереженням основних відомих закономірностей перебігу кривих повзучості [4]. Графік має три ділянки: перша, невідомої повзучості є малою (до 2 хв.) та нею можна знехтувати. Друга, з постійною швидкістю, продовжується приблизно 30 хв, після неї розпочинається третя, прискореної повзучості. Вона закінчується руйнуванням зразку з набутою деформацією 27%. Фрагмент робочої частини зразку після руйнування представлено на рис. 9.

Експеримент на повзучість з використанням зразку, представленого на рис. 6 б) (ліва частина) підтвердив працездатність створеної установки. На правій частині рисунку представлено вигляд продеформованого зразку. За час експерименту 3 год видовження зразку складало 16%, мало місце істотне витончення його робочої частини, що також відповідає класичним уявленням щодо повзучості легких сплавів [4].

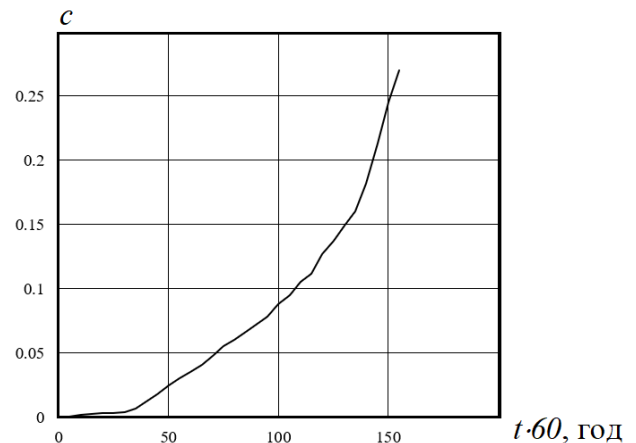


Рис. 8 – Залежність деформації повзучості від часу



Рис. 9 – Фрагмент робочої частини зразку після руйнування

Висновки

У статті надано опис конструкції, системи управління та програмної реалізації управління тепловим режимом експериментальної установки для випробувань на повзучість, яку розроблено в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут». Наведено перші результати тестування, що підтвердили працездатність установки.

В результаті проведення тестування автоматизованої системи управління та контролю температури було встановлено основні характеристики системи. Їх наведено нижче.

Діапазон завдання регулювання температури від 0 до 999°C, крок завдання – 1°C. Робочий діапазон нагрівання від 100 до 500°C.

При виконанні умов розміщення зразку і забезпеченні потрібної термоізоляції камери нагрівання, абсолютне значення середньої похибки регулювання температури має значення, що не перевершує $\pm 2^\circ\text{C}$. Середнє-квадратичне значення похибки регулювання не більш $\pm 1,6^\circ\text{C}$. При цьому порядок значень невизначеності вимірювання по типу $U_a = 0,063^\circ\text{C}$, по типу $U_b = 1,7^\circ\text{C}$. Значення розширеної невизначеності підтримування заданої температури U_p (при $P=0,9$) складає $2,645^\circ\text{C}$.

Стабільність підтримання температури залежить від місця розміщення зразку. В центральній зоні камери значення коливань температури були менше, ніж при нижньому розміщенні зразку. Також особливе значення має забезпечення достатньої теплоізоляції камери нагрівання.

Час циклу вимірювання і регулювання – 1,0012 сек.

Потужність нагрівачів складає 2x1200 Вт (при фазному включенні ТЕНів) і 2x3500 Вт (при лінійному).

Мікроконтролер, задіяний у системі, має ресурси для підключення додаткових модулів і первинних перетворювачів, що дає змогу розширення функціональних можливостей системи шляхом організації додаткових вимірювальних каналів.

Модульна конструкція, універсальність і високі технічні характеристики системи та установки у цілому дозволяють її використання при проведенні різноманітних експериментів у наукових дослідженнях і в навчальному процесі.

Подяка. Ця робота була частково підтримана (Д.В.Бреславський) Фондом Фольксваген "Visiting research program for refugee Ukrainian scientists" (Az. 9C184).

Список літератури

1. *A Creep Testing Machine Second Edition*. 1. Auflage, neue Ausgabe, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.
2. Evans, R. W. "Creep and Constant Strain Rate Deformation." *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, Elsevier, 2001, pp. 1750–57. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1016/B0-08-043152-6/00315-6>.
3. *Metallic Materials Uniaxial Creep Testing in Tension Method of Test*. ISO 204:2023, International Organization for Standardization, 2023, <https://www.iso.org/standard/82162.html>. Accessed 28.11.2023.

4. Dyson, C. C., et al. "Use of Small Specimen Creep Data in Component Life Management: A Review." *Materials Science and Technology*, vol. 32, no. 15, Oct. 2016, pp. 1567–81. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1080/02670836.2015.1132536>.
5. Penny, R. K., and D. L. Marriott. *Design for Creep*. Springer Netherlands, 1995. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1007/978-94-011-0561-3>.
6. *Rules for the Construction of Nuclear Facility Components*, Class 1 Components in Elevated Temperature Service, Boiler and Pressure Code, Section III, Division 1—Subsection NH. ASME BPVC.III.1.NH–2015, American Society of Mechanical Engineers, 2001.
7. Gooch, D. J., and I. M. How, editors. *Techniques for Multiaxial Creep Testing*. Springer Netherlands, 1987. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3415-3>.
8. Holdsworth, S. R., et al. "Component Assessment Data Requirements from Creep-Fatigue Tests." *Journal of ASTM International*, vol. 8, no. 3, 2011, p. 103583. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1520/JAI103583>.
9. Coleman, M. C., et al. "Full Size Component Testing under Creep Conditions." *Techniques for Multiaxial Creep Testing*, edited by D. J. Gooch and I. M. How, Springer Netherlands, 1986, pp. 333–56. DOI.org (Crossref), https://doi.org/10.1007/978-94-009-3415-3_20.
10. Wang, Hong, et al. *Pressurized Tube Creep Testing of Graded Transition Joints (GTJ) for G91 and 347H Base Metals*. ORNL/TM-2022/2568, 1883775, 1 Aug. 2022, p. ORNL/TM-2022/2568, 1883775. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.2172/1883775>.
11. Plewa, M., and W. Osipiuk. "Creep of Tubular Test Pieces in a Complex State of Stress." *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 75, no. 1, Jan. 1998, pp. 63–66. DOI.org (Crossref), [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(98\)00021-0](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(98)00021-0).
12. Tumański, Sławomir. *Principles of Electrical Measurement*. Taylor & Francis, 2006.
13. Maxim Integrated Products, Inc. *Cold-Junction-Compensated K- Thermocouple to Digital Converter (0°C to +1024°C)*. MAX6675, Maxim Integrated Products, Inc., 2021, <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/max6675.pdf>. Accessed 28.11.2023.
14. HITACHI. *HD44780U (LCD-II) Dot Matrix Liquid Crystal Display Controller/Driver*. ADE-207-272(Z), HITACHI, 1998, <https://www.sparkfun.com/datasheets/LCD/HD44780.pdf>. Accessed 28.11.2023.
15. FOTEK. *SSR Series DC to AC Solid State Relay*, FOTEK, 2023, <https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Components/General/SSR40DA.pdf>. Accessed 28.11.2023.
16. Arduino. *Arduino-MEGA 2560 Rev3. Product Reference Manual*. A000067, Arduino, 2022, <https://docs.arduino.cc/resources/datasheets/A000067-datasheet.pdf>. Accessed 28.11.2023.
17. Коржов, І.М., Лисенко, В.В. "Універсальне програмне забезпечення автоматизації обробки результатів вимірювань "CALIBR 2.0"". *Системи обробки інформації*, Вип. 2 (127), с. 132–134.

References (transliterated)

1. *A Creep Testing Machine Second Edition*. 1. Auflage, neue Ausgabe, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.
2. Evans, R. W. "Creep and Constant Strain Rate Deformation." *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, Elsevier, 2001, pp. 1750–57. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1016/B0-08-043152-6/00315-6>.
3. *Metallic Materials Uniaxial Creep Testing in Tension Method of Test*. ISO 204:2023, International Organization for Standardization, 2023, <https://www.iso.org/standard/82162.html>. Accessed 28.11.2023.
4. Dyson, C. C., et al. "Use of Small Specimen Creep Data in Component Life Management: A Review." *Materials Science and Technology*, vol. 32, no. 15, Oct. 2016, pp. 1567–81. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1080/02670836.2015.1132536>.
5. Penny, R. K., and D. L. Marriott. *Design for Creep*. Springer Netherlands, 1995. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1007/978-94-011-0561-3>.
6. *Rules for the Construction of Nuclear Facility Components*, Class 1 Components in Elevated Temperature Service, Boiler and Pressure

Code, Section III, Division 1—Subsection NH. ASME BPVC.III.1.NH–2015, American Society of Mechanical Engineers, 2001.

7. Gooch, D. J., and I. M. How, editors. *Techniques for Multiaxial Creep Testing*. Springer Netherlands, 1987. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3415-3>.

8. Holdsworth, S. R., et al. "Component Assessment Data Requirements from Creep-Fatigue Tests." *Journal of ASTM International*, vol. 8, no. 3, 2011, p. 103583. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.1520/JAH103583>.

9. Coleman, M. C., et al. "Full Size Component Testing under Creep Conditions." *Techniques for Multiaxial Creep Testing*, edited by D. J. Gooch and I. M. How, Springer Netherlands, 1986, pp. 333–56. DOI.org (Crossref), https://doi.org/10.1007/978-94-009-3415-3_20.

10. Wang, Hong, et al. *Pressurized Tube Creep Testing of Graded Transition Joints (GTJ) for G91 and 347H Base Metals*. ORNL/TM-2022/2568, 1883775, 1 Aug. 2022, p. ORNL/TM-2022/2568, 1883775. DOI.org (Crossref), <https://doi.org/10.2172/1883775>.

11. Plewa, M., and W. Osipiuk. "Creep of Tubular Test Pieces in a Complex State of Stress." *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 75, no. 1, Jan. 1998, pp. 63–66. DOI.org (Crossref), [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(98\)00021-0](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(98)00021-0).

12. Tumański, Sławomir. *Principles of Electrical Measurement*. Taylor & Francis, 2006.

13. Maxim Integrated Products, Inc. *Cold-Junction-Compensated K- Thermocouple to Digital Converter (0°C to +1024°C)*. MAX6675, Maxim Integrated Products, Inc., 2021, <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/max6675.pdf>. Accessed 28.11.2023.

14. HITACHI. *HD44780U (LCD-II) Dot Matrix Liquid Crystal Display Controller/Driver*. ADE-207-272(Z), HITACHI, 1998, <https://www.sparkfun.com/datasheets/LCD/HD44780.pdf>. Accessed 28.11.2023.

15. FOTEK. *SSR Series DC to AC Solid State Relay*, FOTEK, 2023, <https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Components/General/SSR40DA.pdf>. Accessed 28.11.2023.

16. Arduino. *Arduino-MEGA 2560 Rev3. Product Reference Manual*. A000067, Arduino, 2022, <https://docs.arduino.cc/resources/datasheets/A000067-datasheet.pdf>. Accessed 28.11.2023.

17. Korzhov, I.M., Lysenko, V.V. "Universalne prohramne zabezpechennia avtomatyzatsii obrobky rezultativ vymiriuvan "CALIBR 2.0"". *Sistemy obrobky informatsii*, Vol. 2 (127), pp. 132–134.

Надійшла (received) 1.12.2023

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>.

Лисенко Володимир Валерійович (Lysenko Volodymyr) – доцент кафедри інформаційно-вимірювальних технологій і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-61-80; e-mail: Volodymyr.Lysenko@khpi.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1424-5124>.

Метельов Володимир Олександрович (Mietelov Volodymyr) – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057) 707 64 54; e mail: volodymyr.mietelov@khpi.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2633-6296>.

Татарінова Оксана Андріївна (Tatarinova Oksana) – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Oksana.Tatarinova@khpi.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3090-8469>.

Фесюков Олексій Володимирович (Fesiukov Olexsii) – завідувач лабораторією кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: fesaleksey@gmail.com.

В.Г. МАРТИНЕНКО**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СУЦІЛЬНОМЕТАЛІЧНОЇ, СКЛАДНОЇ ТА КОМПОЗИЦІЙНОЇ ЛОПАТОК ІЗ ОДНАКОВИМ ПРОФІЛЕМ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ З'ЄДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТА АЕРОДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

В роботі представлений порівняльний аналіз динамічних властивостей лопаток однієї роторної машини, що мають одну і ту ж саму форму профілю, але виконані з трьох різних матеріалів, а саме алюмінієвого сплаву, складного матеріалу, що поєднує в собі алюмінієвий сплав та сталь, та композитного матеріалу, яким виступає односпрямований склопластик. У випадку суцільнометалічної лопатки, її профіль та хвостовик виконані з алюмінієвого сплаву. У випадку складного матеріалу профілю лопатки хвостовик виконаний із сталі, що є також складовою частиною матеріалу профілю. У випадку композитної лопатки хвостовик є сталевим та з'єднаний у кореновому перерізі з її композитним пером. Основна увага при порівнянні моделей механічної поведінки трьох типів лопаток приділяється впливу з'єднання складних та композитних елементів із хвостовиком на динамічні характеристики лопатки в цілому, що досягається за допомогою розгляду контактних взаємодій елементів під дією відцентрових та аеродинамічних навантажень та подальшій передачі переднапруженого стану лопаток у модальний аналіз для визначення динамічних характеристик зразків та їх порівняння. Для коректного відображення закріплення елементів у робочому колесі вентилятора у випадку алюмінієвої лопатки розглядається сектор циклічної симетрії ротора, що дає змогу зробити висновок про можливість подальшого окремого розгляду лопатки для визначення її динамічних характеристик за рахунок набагато більшої жорсткості з'єднання лопатки із робочим колесом у порівнянні із жорсткістю пера лопатки та поширене на випадок складної лопатки розглядом сталевих хвостовиків із алюмінієвим профілем з жорстким затисненням моделі по контактним полицям хвостовика, а на випадок композитної лопатки розглядом пера із жорстким затисненням у кореновому перерізі, де відбувається кріплення до сталевих хвостовиків лопатки. Результати порівняльного аналізу динамічної поведінки трьох типів лопаток однакового профілю представлені у вигляді дослідження власних частот та форм коливань лопатки.

Ключові слова: профіль лопатки; контакт; композитний матеріал; динамічний відгук; аеродинамічне навантаження.

The paper presents a comparative analysis of the dynamic properties of the blades of one rotary machine which have the same airfoil shape, but are made of three different materials, namely aluminum alloy, a complex material combining aluminum alloy and steel, and a composite material which is unidirectional fiberglass. In the case of an all-metal blade, its airfoil and root are made of aluminum alloy. In the case of complex blade airfoil material, the root is made of steel which is also a component of the airfoil material. In the case of a composite blade, the root is steel and is connected at the root section to its composite airfoil. The main attention when comparing models of the mechanical behavior of three types of blades is paid to the influence of the connection of complex and composite elements with the root on the dynamic characteristics of the blade as a whole which is achieved by considering the contact interactions of the elements under the action of centrifugal and aerodynamic loads and the subsequent transfer of the prestressed state of the blades to the modal analysis for determination of the dynamic characteristics of samples and their comparison. In order to correctly display the fixation of elements in the fan impeller in the case of an aluminum blade, the sector of cyclic symmetry of the rotor is considered which makes it possible to draw a conclusion about the possibility of further separate consideration of the blade for determination of its dynamic characteristics due to the much greater stiffness of the connection of the blade with the impeller in comparison with stiffness of the blade airfoil, and to generalize this conclusion in the case of a complex blade by considering a steel root with an aluminum profile with rigid clamping of the model on the contact shelves of the root, and in the case of a composite blade by considering an airfoil with rigid clamping in the root section, where the fastening to the steel root of the blade takes place. The results of a comparative analysis of the dynamic behavior of three types of blades with the same airfoil shape are presented in the form of a study of the blade natural frequencies and mode shapes.

Keywords: blade airfoil; contact; composite material; dynamic response; aerodynamic load.

Вступ. Вентилятори головного провітрювання – це роторні машини, що виконують функції обміну повітря між атмосферою і підземним устаткуванням шахти [1].

Такі типи машин є ключовими елементами системи життєзабезпечення в гірничодобувній промисловості, і, відповідно, до них висуваються жорсткі вимоги по аеродинамічним характеристикам і параметрам міцності. Крім того, практично у всіх випадках з основним вентилятором на підприємствах встановлюється резервний, що працює одночасно з основним.

По способам забору, транспортування та подачі повітря вентилятори головного провітрювання розділяються на відцентрові та осьові. Відцентрові вентилятори в більшості випадків працюють при відносно невисоких окружних швидкостях і створюють відносно високий перепад тиску повітря, а осьові, у свою чергу, мають більш високі оберти і здатні переміщати більші маси повітря при невисокому перепаді тиску. Певний тип вентилятора

вибирається виходячи з конкретних вимог підприємства.

Враховуючи той факт, що 10% використання виробленої електроенергії в промисловості припадає на вентиляційні системи, вентилятори головного провітрювання повинні мати оптимальну конструкцію, що забезпечує максимальний коефіцієнт корисної дії при заданих параметрах споживання, що досягається за допомогою профілювання лопаток колеса вентилятора, проектування геометричної форми вхідних коробок і подальшого застосування професійних конструкторських і технологічних підходів до об'єднання компонентів машини, виробництва та монтажу.

Оскільки вентилятор головного провітрювання є швидкохідною роторною машиною, він знаходиться в інтенсивному полі відцентрових сил, що накладає жорсткі обмеження на його статичні і динамічні параметри міцності. Ситуація з визначення цих параметрів може бути ускладнена ще й тим фактом, що за рахунок наявності теплових джерел (наприклад, двигуна і підшипників) з однієї сторони і середовища

конвективного теплообміну (переміщуваного повітря) з іншого машина має значний температурний градієнт. Він вимагає визначення з метою уточнення властивостей матеріалу в тій або іншій частині ротора, а також урахування неоднорідності температурних деформацій.

Не менш важливим є і акустичний аспект, оскільки машини такого типу піддаються жорсткій регламентації відповідно до норм безпеки по охороні праці.

Усі ці факти в цілому дозволяють зробити висновок про те, що вентилятор головного провітрювання при його проектуванні та перевірці вимагає розробки комплексного підходу, який враховує взаємний вплив статичних і динамічних параметрів міцності, а також аеродинамічних, теплових і акустичних ефектів.

Такий підхід був запропонований в роботі [2], яка представила комплексний аналіз статичної та динамічної міцності ротора вентилятора головного провітрювання шахти з алюмінієвою лопаткою із урахуванням аеродинамічних та теплових навантажень.

Проте такий аналіз не міг врахувати високої абразивності середовища, що переміщувалось цим вентилятором та призводило до швидкого зношування пера лопатки та необхідності їх заміни кожні декілька місяців через суттєву зміну форми зношеного профілю та, як результат, падіння аеродинамічних характеристик. Заміна суцільнометалічної алюмінієвої лопатки означала, що окрім зношеного профілю пера лопатки потребував заміни й незношений та придатний до застосування хвостовик, що підвищувало вартість таких заміन. З метою зменшення витрат на заміни та пошуку більш оптимального рішення в такій ситуації, в роботі [3] була запропонована конструкція складної сталєво-алюмінієвої лопатки, що складалась зі сталєвого хвостовика та алюмінієвого профілю пера лопатки, який наплавлявся на сталеву частину, приварену до хвостовика. В цій роботі був також запропонований підхід до моделювання механічної поведінки та визначення міцності такої лопатки та проведене експериментальне дослідження з метою перевірки цього підходу.

Робота [4] пропонує інший погляд на вирішення цієї проблеми та проводить розробку композиційного пера лопатки того ж самого вентилятора, яке у кореневому перерізі кріпиться до сталєвого хвостовика. Композиційне перо виконане зі склопластику, механічні властивості якого були визначені експериментально за допомогою експериментальної установки, описаної в роботі [5], та який має змінну товщину шарів та посилюючі ребра жорсткості для забезпечення оптимального співвідношення масових характеристик та параметрів міцності такої лопатки.

Таким чином, проведені дослідження дозволили розробити різні варіанти лопаток одного вентилятора та з одним і тим самим профілем, які є виготовленими

із різних матеріалів та міцними під дією робочих навантажень, що перевірено за допомогою засобів експерименту та чисельного моделювання. Проте залишається питання прямого порівняння динамічних властивостей таких лопаток та висновків щодо можливого впливу цих властивостей на зміну динамічної поведінки машини при переході від одного конструктивного рішення до іншого, що є предметом дослідження в даній роботі.

1. Аналіз сучасного стану вирішення проблеми. Питання розробки рішень для заміни лопаток роторних машин різних типів широко розглядається в сучасних наукових дослідженнях, від порівняння ефективності застосування сталевих та композиційних лопаток стельових вентиляторів у приміщеннях [6-8] до використання композиційних лопаток у вентиляторних ступенях турбореактивних двигунів [9, 10] та ступенях газових турбін [11]. Робота [12] дає детальний огляд того, як композиційні матеріали застосовуються зокрема в турбомашинах. Композиційні лопатки пропонуються на заміну металевих лопаток пропелерів морських суден [13, 14]. Композиційні матеріали використовуються для виготовлення лопаток гідротурбін [15-17] та вітрогенераторів [18, 19]. На додачу, композиційні матеріали також можуть виступати конструктивним рішенням для лопатей гелікоптерів [20, 21].

Порівняння характеристик міцності композиційних лопаток та тих, що виготовлені з різних сплавів, також є популярною темою дослідження в роботах. Наприклад, в [6] виконується порівняння композиційної та сталєвої лопаток для стельового вентилятора. В [9] наводиться два підходи до виготовлення складних лопаток вентиляторної ступені газотурбінного двигуна, один з яких передбачає використання складної металічної конструкції лопатки із алюмінієвою серцевиною, а інший комбінацію склопластику та вуглепластику для обшивки лопатки та композиційні стільники для серцевини. В [11] порівнюються переміщення та деформації композиційної, титанової, сталєвої та алюмінієвої лопаток газової турбіни. В [21] проводиться порівняння напружень та динамічних характеристик алюмінієвої, склопластикової та вуглепластикової лопатей гелікоптера. В [22] порівнюються характеристики міцності лопаток пропелера літака, що виготовлені з алюмінієвого сплаву та композиту із алюмінієвою матрицею та оболонкою бананового листа у якості армування.

Саме тому порівняння динамічних характеристик лопаток вентилятора, виготовлених з різних матеріалів, є актуальним завданням.

2. Основні відомості про осьовий вентилятор. На рисунку 1 зліва представлений загальний вид вентиляторної установки, її вхідні коробки, змонтовані на бетонній основі, зі схематично показаним двигуном. Дана конструкція вхідних коробок була спеціально розроблена для виконання

жорстких вимог по габаритам, вазі і якості установки. На рисунку 1 справа представлена конструкторська

модель ротора осьового вентилятора, який має робоче колесо з діаметром 3.2 м.

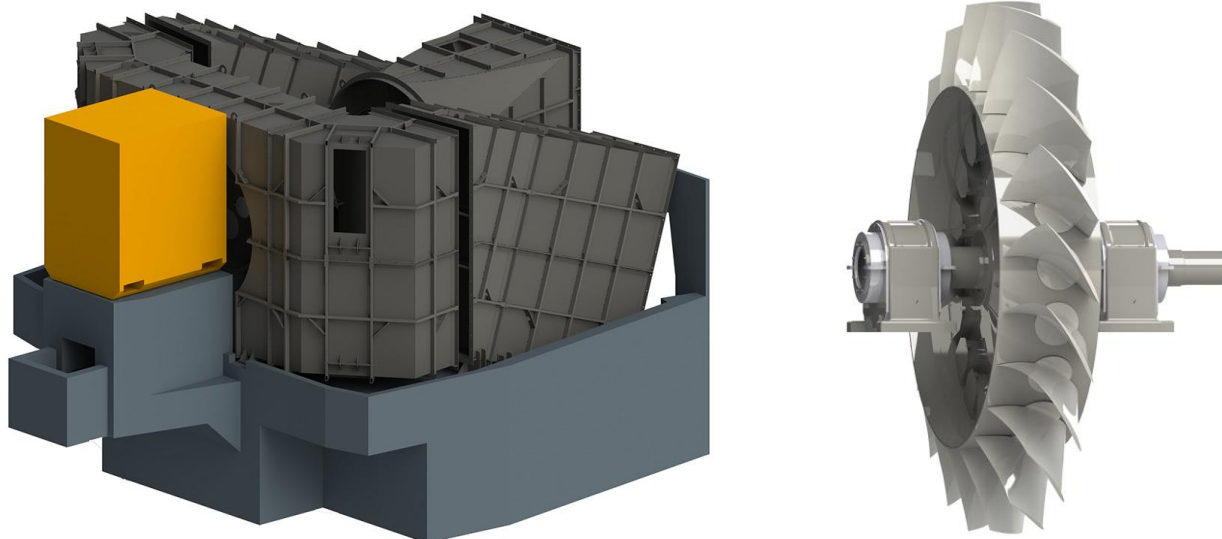


Рис. 1 – Загальний вид вентиляторної установки (зліва) та ротор вентилятора в підшипникових опорах (справа)

Вал і робоче колесо вентилятора виготовлені з високоякісної вуглецевої сталі, а лопатки в первинному варіанті – з легкого алюмінієвого сплаву. При цьому вентилятор призначений для переміщення маси повітря з температурою в межах від -5°C до 40°C зі швидкістю обертання 750 об/хв. Він закріплений у двох роликівих підшипниках – радіально-упорному та упорному.

Практично весь експлуатаційний період вентилятор працює в стаціонарному режимі з мінімальною кількістю пусків і зупинок.

3. Аеродинамічний розрахунок проточної частини вентиляторної установки. З метою отримання картини розподілу аеродинамічних навантажень на лопатки робочого колеса, а також

параметрів конвективного теплообміну між повітрям проточної частини і матеріалом вентилятора в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу вирішена стаціонарна задача течії газу через напрямний систему апарат-ротор-випрямний апарат в постановці циклічної симетрії.

На рисунку 2 зліва показана скінченно-об'ємна модель проточної частини вентиляторної установки, що представляє з себе сектор циклічної симетрії повітря навколо лопаток статорів та ротору, із схематичним позначенням поверхонь симетрії і входу та виходу повітря. Слід відзначити, що використані налаштування моделі дозволяють розрізнити в числі ступенів статор-ротор-статор, а також правильно відобразити умови переходу між інтерфейсами рухомих і нерухомих частин газу.

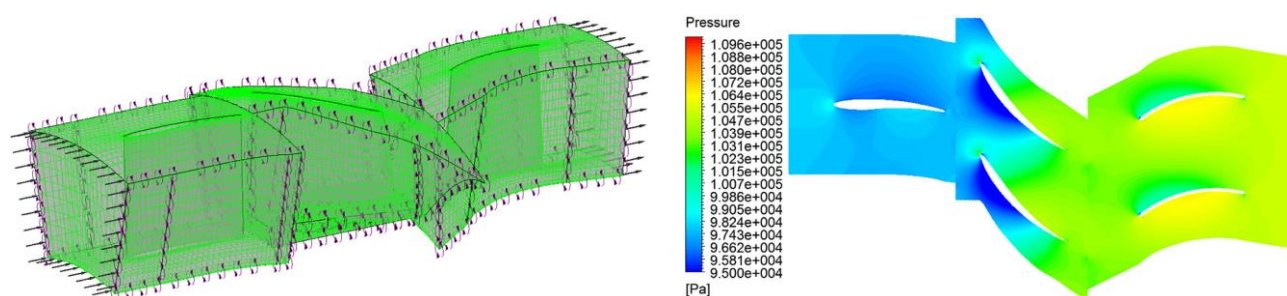


Рис. 2 – Розрахунок проточної частини вентилятора у вигляді скінченно-об'ємної моделі (зліва) та результатів аеродинамічного розрахунку (справа)

Вхідною інформацією для аеродинамічного розрахунку були граничні умови (повний тиск $P_t = 101325$ Па на вході напрямного апарату; масовий розхід $Q = 420$ кг/с на виході випрямного апарату; умови періодичної симетрії на відповідних гранях об'ємів повітря), а також властивості робочого середовища, зокрема температура вентилятора 22°C .

У результаті проведення стаціонарного аналізу течії газу отримана картина розподілу його

кінематичних і силових характеристик у проточній частині вентилятора, зокрема, розподіл вектору швидкостей і значення повного тиску. На рисунку 2 справа показаний розподіл повного тиску в меридіональному перерізі проточної частини турбомашини. Відповідно до обраної моделі теплопередачі, отримані параметри конвективного теплообміну середовища (а саме поверхневий коефіцієнт α і зсувна температура T_{ref}), які в результаті

були використані для аналізу теплопровідності у вентиляторі та подальшої корекції механічних властивостей матеріалів та визначення температурних напружень при обчисленні переднапруженого стану.

4. Розрахункова модель лопаток вентилятора.

У процесі побудови розрахункової моделі для проведення основних типів аналізів конструкторська модель ротора осьового вентилятора, зображена на рисунку 1, була піддана ряду геометричних спрощень в місцях, що істотно не впливають на точність визначення основних параметрів напружено-деформованого стану (НДС) та динамічних характеристик моделі, але здатні значно збільшити

розмірність задачі через необхідність згущення скінченно-елементної сітки в цих місцях.

Оскільки жорсткість підшипників є набагато більшою порівняно з жорсткістю конструкції, у розрахунковій моделі вони були замінені жорсткими опорами з відповідними місцями та напрямками закріплень. Крім того, в ході проведення попередніх аналізів було встановлено, що неврахування ваги конструкції не вносить значної похибки в отримання основних характеристик НДС конструкції, а це дозволило для зниження розмірності задачі та чисельної похибки розглядати її у постановці циклічної симетрії, як показано на рисунку 3.

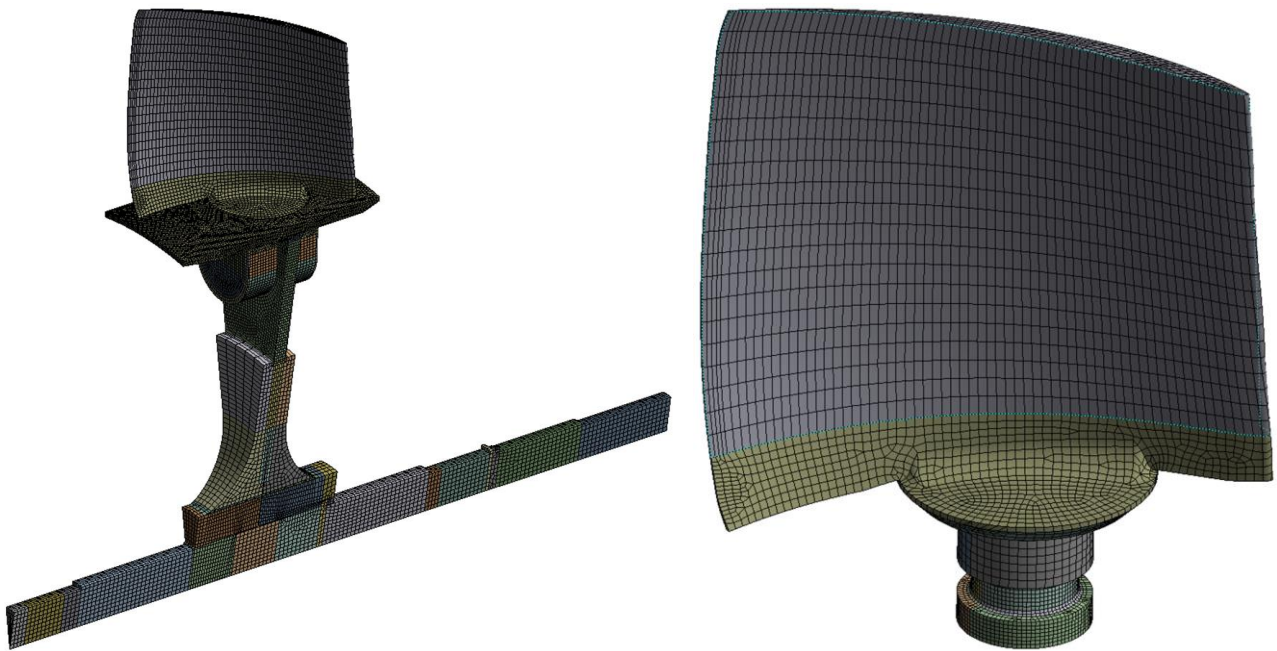


Рис. 3 – Скінченно-елементна модель ротору із алюмінієвою лопаткою у вигляді сектору циклічної симетрії (зліва) та лопатки, зображеної окремо (справа)

Більш детально процес підготовки та контролю якості скінченно-елементної моделі ротору вентилятора, що розглядається, описаний в роботі [2].

Сталево-алюмінієва лопатка, що складається зі сталевих хвостовика, до якого приварений сталевий профіль спеціальної форми, на який наплавляється алюмінієвий профіль лопатки, має принципову схему, зображену на рисунку 4 зліва, та моделюється за допомогою скінченно-елементної сітки, показаної на рисунку 4 справа. Взаємодія між сталевими та алюмінієвими елементами описується моделями нелінійних контактів, що більш детально обговорюється в роботі [3]. Лопатка такої конструкції встановлюється в ротор вентилятора, зображеного на рисунку 1, на заміну алюмінієвій лопатці.

Композиційна лопатка складається з склопластикового пера, зображеного на рисунку 5, та сталевих хвостовика, який у кореновому перерізі профілю з'єднаний із ним. Композиційний матеріал моделюється оболонковими скінченними елементами, що враховують різну кількість та спрямованість шарів склопластику, а взаємодія між сталевим та

композиційним елементами моделюється жорстким з'єднанням, враховуючи велику різницю у жорсткості сталі та композиційного матеріалу. Більш детально схема з'єднання та загальний вид композиційної лопатки обговорюється в роботі [4]. Вона також встановлюється в ротор вентилятора, зображеного на рисунку 1, на заміну алюмінієвій лопатці.

Таким чином, попередньо були побудовані три моделі принципово різних виконань лопатки одного і того ж самого профілю та із тою ж самою формою кріплення для забезпечення взаємозамінності таких рішень при встановленні в один і той самий ротор та для забезпечення таких же самих аеродинамічних параметрів.

В зазначених роботах за допомогою описаних в цьому розділі розрахункових моделей детально досліджувалась міцність цих лопаток, а в даній роботі пропонується використати ці розрахункові моделі для визначення динамічних характеристик цих лопаток із урахуванням переднапруженого стану та усіх особливостей моделей та порівняти їх для встановлення переваг та недоліків кожного типу

лопатки з точки зору їхнього впливу на динамічну поведінку роторної машини.

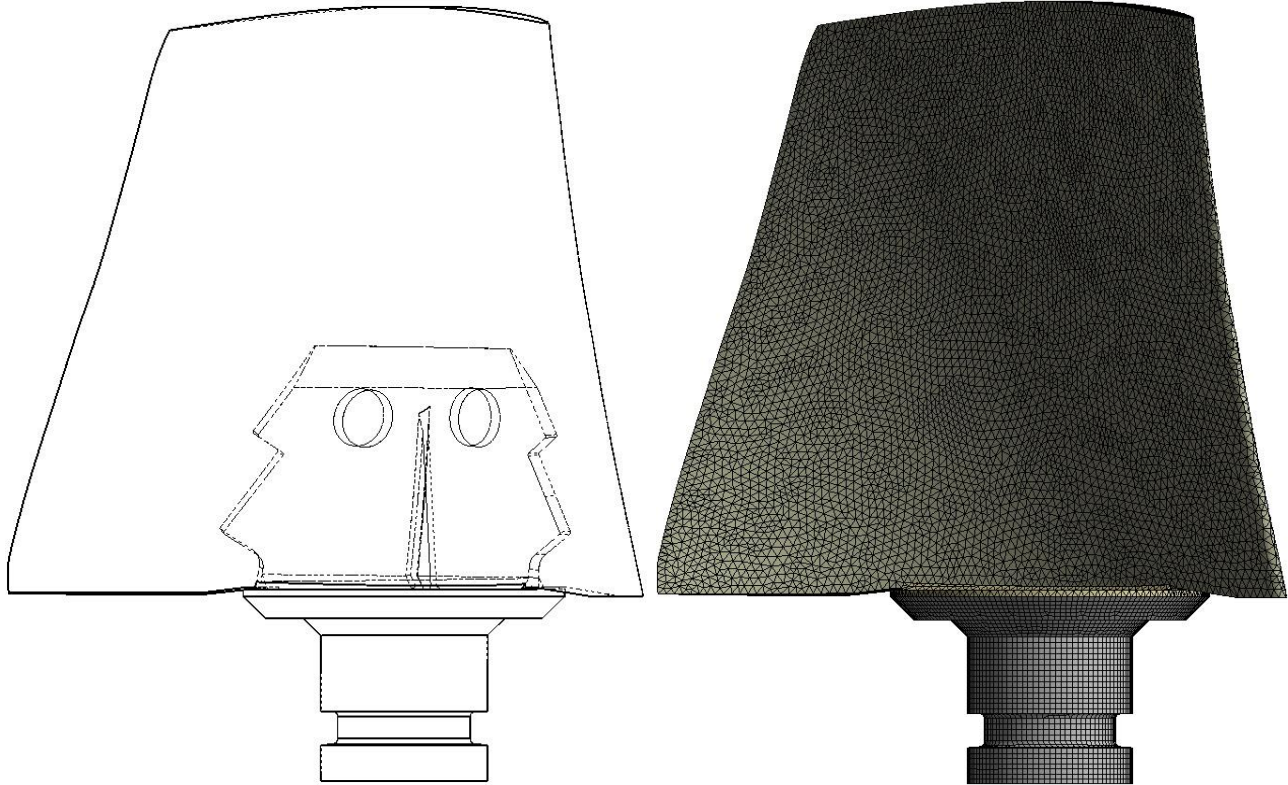


Рис. 4 – Сталево-алюмінієва лопатка у вигляді схематичного зображення (зліва) та скінченно-елементної моделі (справа)

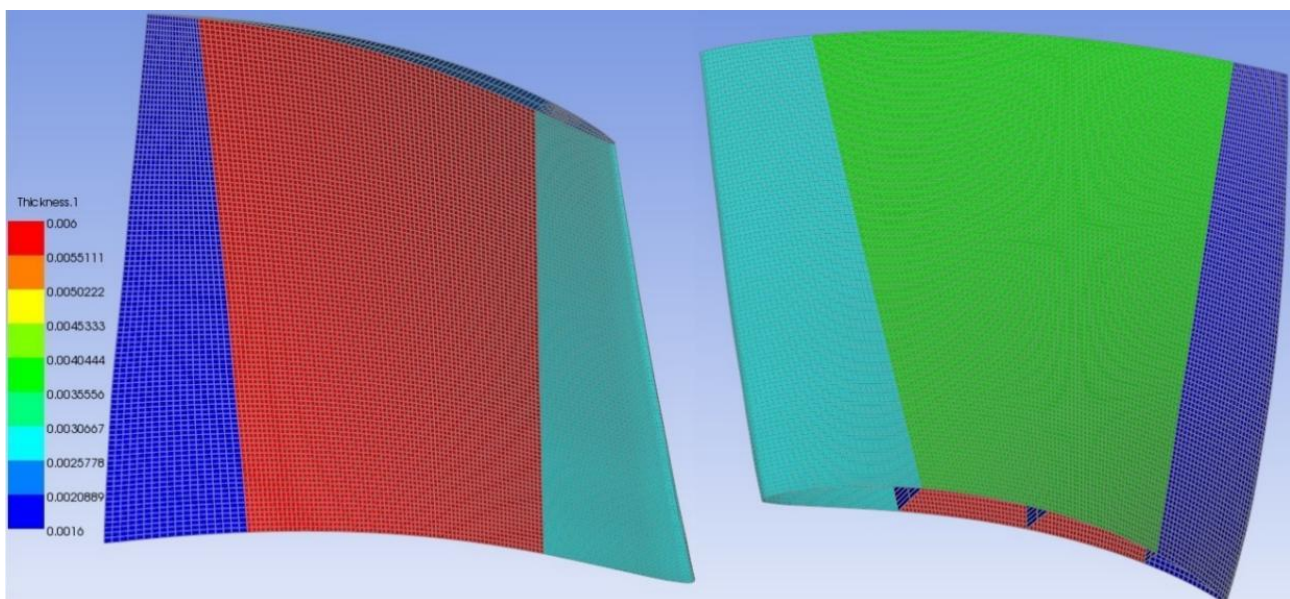


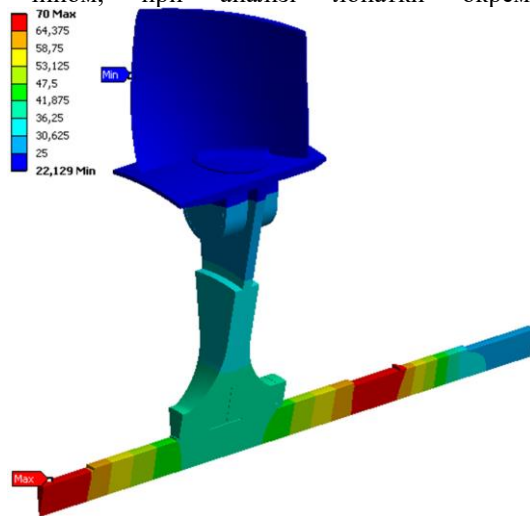
Рис. 5 – Скінченно-елементна модель композиційного профілю лопатки, що кріпиться до сталевго хвостовика, із зазначенням товщини композиту, [м]

5. Термічне та аеродинамічне навантаження на лопатку. Для проведення аналізу статичних деформацій та напружень ротора вентилятора із різними лопатками був визначений розподіл температури по сектору циклічної симетрії ротора, що показаний на рисунку 6 зліва, та статичне навантаження на перо лопатки з боку тиску повітря,

яке проходить через проточну частину вентилятора, що показано на рисунку 6 справа.

Змінний розподіл температур впливає як на властивості матеріалів, так і на температурні напруження в місцях, де є обмеження розширення конструкції. Втім, як видно з рисунку, в місці лопатки спостерігається досить незмінний розподіл температури завдяки постійному охолодженню

лопатки з боку повітря, що протікає навколо неї. Таким чином, при аналізі лопатки окремо



непостійністю температури можна буде знехтувати.

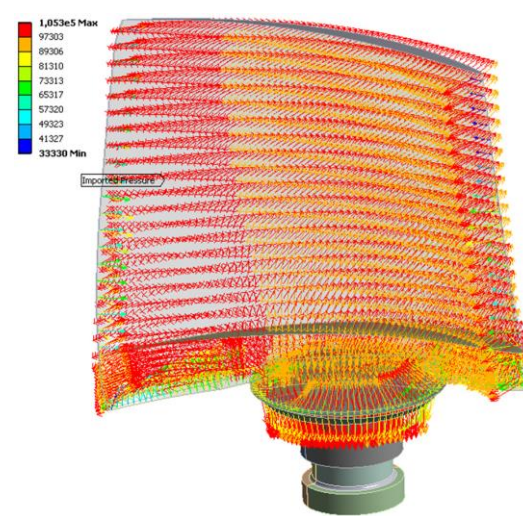


Рис. 6 – Поле температур у роторі, [°C] (зліва) та тиску на профіль лопатки, [Па] (справа), які використовуються для статичного розрахунку переднапруженого стану ротору для подальшого визначення динамічних характеристик

6. Статичний аналіз лопаток для визначення переднапруженого стану. Проведений статичний аналіз напружено-деформованого стану у роторі вентилятора з алюмінієвою, сталєво-алюмінієвою та композиційною лопатками дозволив визначити напруження в моделі під дією інерційних (відцентрові сили), термічних (неоднорідний розподіл температур) та аеродинамічних (тиск повітря) навантажень. На рисунку 7 показаний контурний графік еквівалентних

за Мізесом напружень у алюмінієвій лопатці та секторі циклічної симетрії ротора, який її містить.

Як видно з рисунків, суттєві значення напруження набувають в хвостовику лопатки в місці його кріплення до диску ротора, а також в місцях кріплення лопатки на роторі. В той же самий час, переважна більшість пера лопатки залишається ненапруженою, що й дало змогу розробити сталєво-алюмінієві та композиційні варіанти такої лопатки.

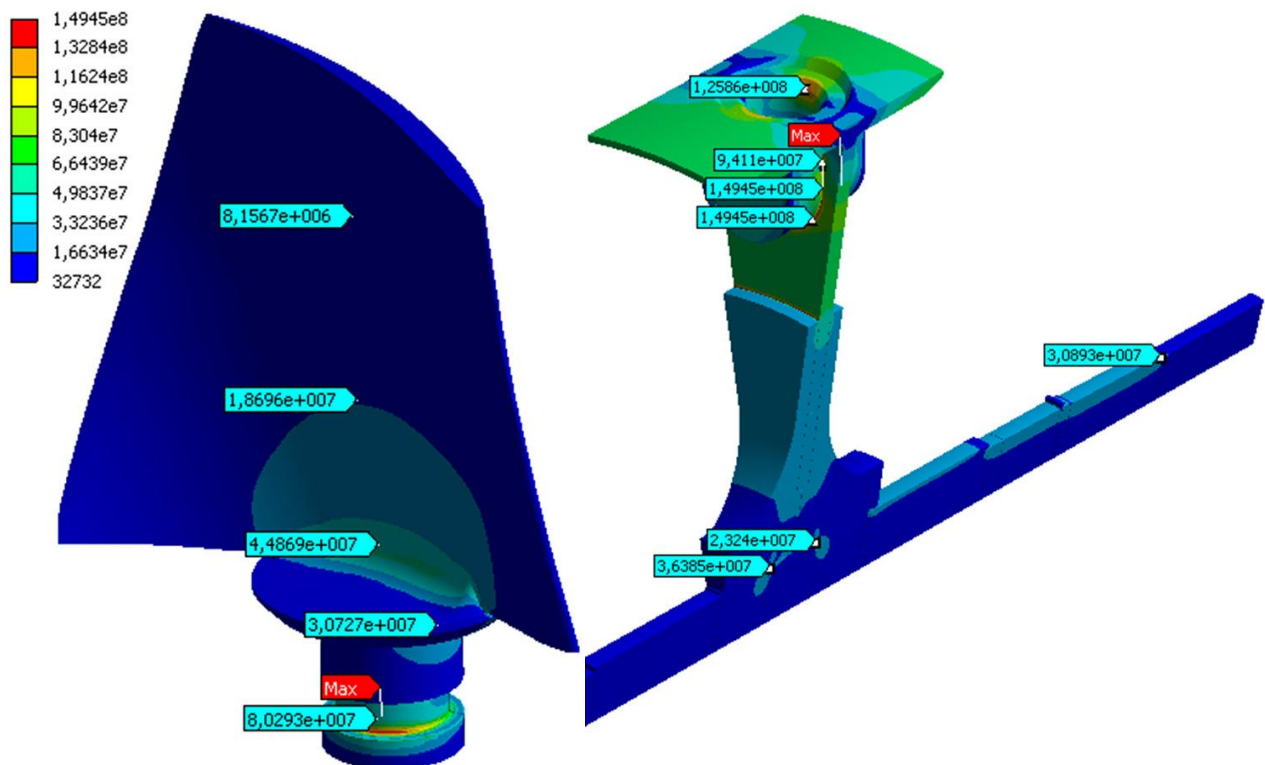


Рис. 7 – Контурний графік еквівалентних за Мізесом напружень, [Па] у алюмінієвій лопатці (зліва) та роторі, що її містить (справа)

Напружений стан в сталєво-алюмінієвій лопатці в умовах, аналогічних до алюмінієвої лопатки, показано на рисунку 8. На цьому рисунку можна побачити, що напруження в алюмінієвій частині сталєво-алюмінієвої є вищими за ті ж самі місця на алюмінієвій лопатці через наявність концентраторів напружень в місцях з'єднання алюмінієвої та сталєвої

частин. Проте, як було зазначено у вступі, головною метою застосування такої конструкції було не зниження напружень, а вирішення проблеми швидкого зношення лопаток шляхом заміни лише її профілів, а не усіх лопаток в цілому. Тому основною вимогою з точки зору напружень було виконання критерію міцності, а не їхнє зниження.

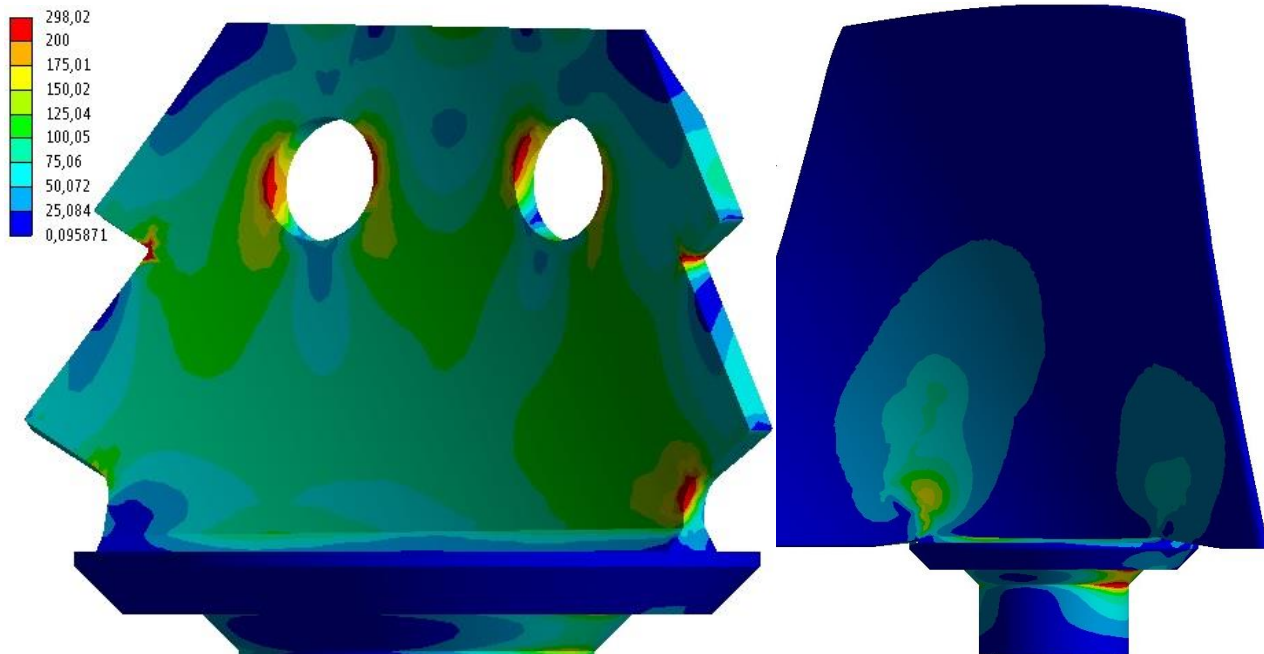


Рис. 8 – Контурний графік еквівалентних за Мізесом напружень, [МПа] в сталевій частині (зліва) та сталєво-алюмінієвій лопатці в цілому (справа)

У випадку композиційної лопатки її міцність в умовах, аналогічних до умов алюмінієвої та сталєво-алюмінієвої лопаток, визначалась за допомогою аналізу функції критерію міцності Хашина,

зображеної на рисунку 9, а переднапружений стан для аналізу динамічних характеристик передавався за тим же самим принципом, що й у випадку двох попередніх моделей.

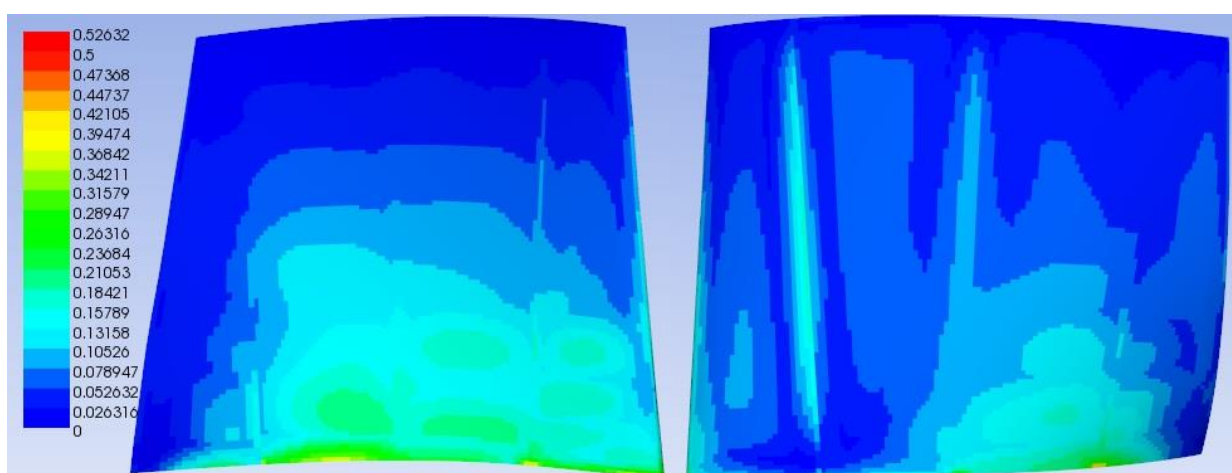


Рис. 9 – Контурний графік розподілу функції критерію міцності Хашина у пері лопатки, [-]

За допомогою таких дій, були підготовлені усі необхідні моделі та розрахунки для проведення порівняльного аналізу динамічних характеристик алюмінієвої, сталєво-алюмінієвої та композиційної лопаток, що враховує особливості навантаження та

кріплення кожного типу лопатки шляхом лінеаризації нелінійних типів контактів відповідно до їхнього статусу при передачі переднапруженого стану з нелінійного статичного аналізу до лінійного динамічного, а саме модального аналізу.

7. Результати аналізу динамічних характеристик лопаток та їхнє обговорення. Було проведено декілька досліджень динамічної поведінки роторів із різними лопатками. В таблиці 1 наведено порівняння абсолютних значень власних частот алюмінієвої, сталєво-алюмінієвої та композиційної

лопаток (другий, третій та четвертий стовпчики) із характеристикою відповідних форм коливань. Разом із цим, у першому та другому стовпчиках порівнюються власні частоти коливань при моделюванні ротора із алюмінієвими лопатками, власні форми якого показані на рисунку 10, та окремо алюмінієвої лопатки.

Таблиця 1 – Власні частоти (ВЧ) суцільно алюмінієвої, біметалічної та композиційної лопаток

№ ВЧ	Колесо з алюмінієвою лопаткою		Алюмінієва лопатка		Сталєво-алюмінієва лопатка		Композиційна лопатка	
	ВЧ, [Гц]	Характер форми коливань	ВЧ, [Гц]	Характер форми коливань	ВЧ, [Гц]	Характер форми коливань	ВЧ, [Гц]	Характер форми коливань
1	30.5	Кручення ротора	142.80	Згинання у напрямі меншої жорсткості	95.12	Згинання у напрямі меншої жорсткості	120.36	Згинання у напрямі меншої жорсткості
2	58.8	Перша форма згинання диску	195.85	Згинання у напрямі більшої жорсткості	213.55	Згинання у напрямі більшої жорсткості	217.69	Кручення навколо осі
3	69.2	Друга форма згинання диску	300.23	Кручення навколо осі	283.25	Кручення навколо осі	285.93	Одна хвиля вздовж проточної частини
4	86.4	Зонтична форма	529.92	Кручення за чотирма границями пера	512.44	Кручення за чотирма границями пера	312.91	Дві хвилі вздовж проточної частини
5	120.7	Перша форма згинання ротора	607.56	Кручення за двома границями пера	554.91	Кручення за двома границями пера	334.57	Згинання зверху вихідної кромки
6	139.7	Перша форма коливань лопатки	724.89	Згинання верхньої границі пера	787.72	Згинання верхньої границі пера	369.10	Дві хвилі та згинання вихідної кромки

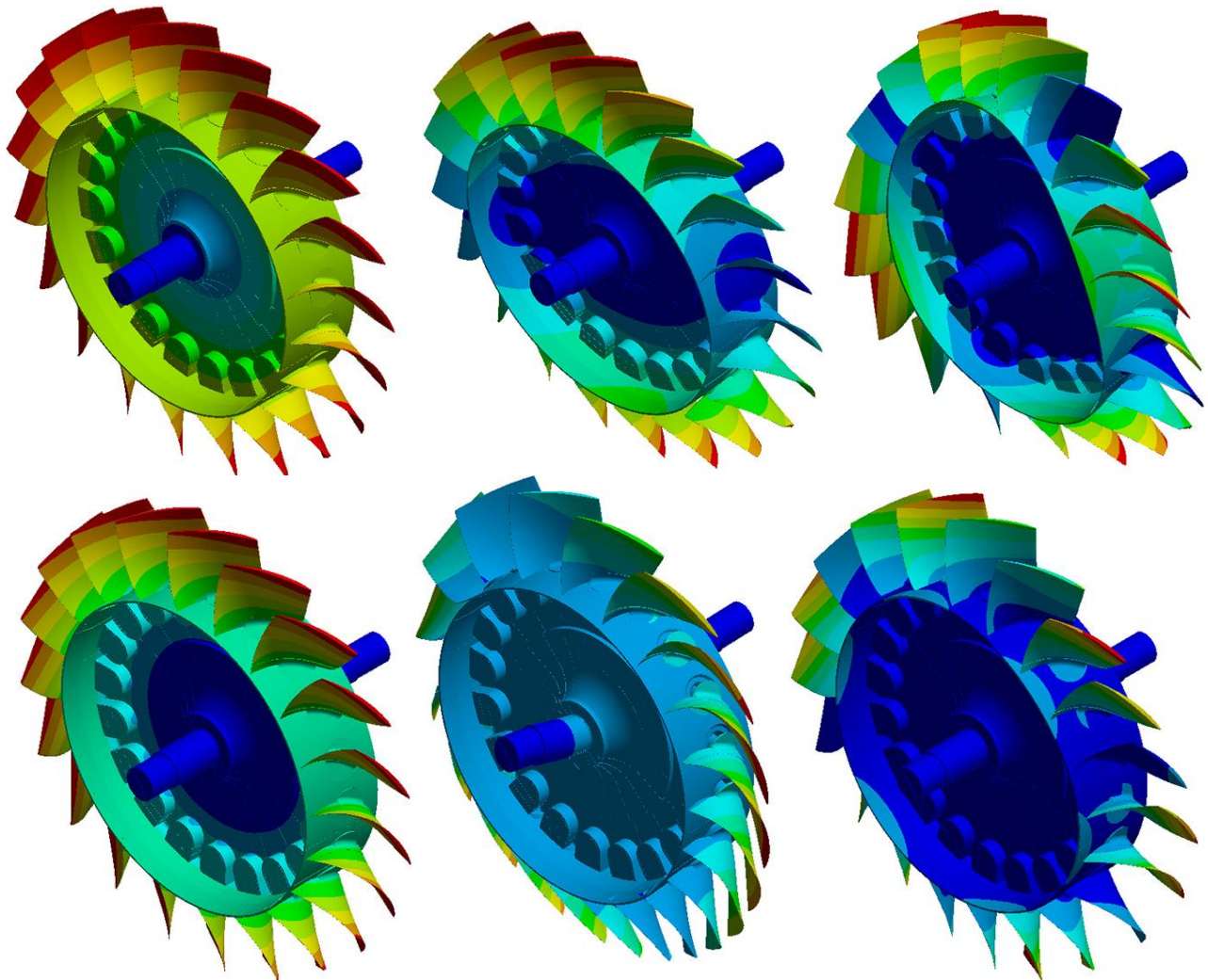


Рис. 10 – Власні форми коливань ротору, що містить алюмінієві лопатки

Як видно із таблиці, шоста власна частота ротора з алюмінієвими лопатками є в межах інженерної точності першою власною частотою коливань алюмінієвої лопатки, що розглядається окремо та жорстко закріплена по поверхням, що контактують із диском ротора в повній моделі. Із тих же самих міркувань, для більш детального порівняння саме лопаткових власних частот та форм, подальший порівняльний аналіз виконаний для окремого розгляду лопаток, що у випадку сталєво-алюмінієвого варіанту закріплені по тим же самим поверхням, що й

алюмінієва лопатка, а у випадку композиційного варіанту закріплені по кореновому перерізу із відкиданням сталєвої частини за рахунок набагато більшої жорсткості сталі у порівнянні зі склопластиком та набагато меншої маси пера зі склопластику у порівнянні з масою пера з алюмінію.

Рисунок 11 представляє перші шість власних форм коливань сталєво-алюмінієвої лопатки, які за характером співпадають із відповідними формами алюмінієвої лопатки, про що свідчить опис у другому та третьому стовпчику таблиці 1.

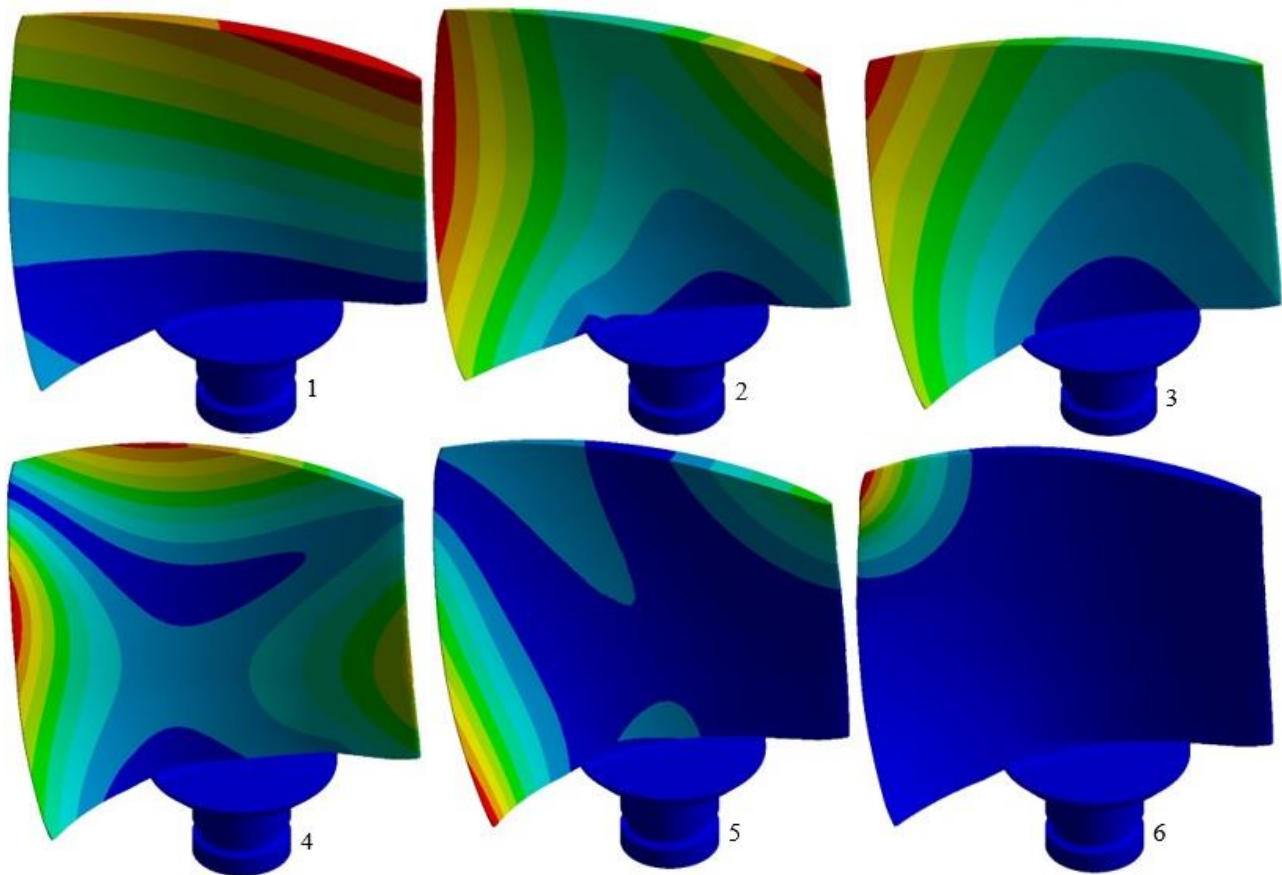


Рис. 11 – Власні форми коливань сталєво-алюмінієвої лопатки

Порівняння власних частот алюмінієвої та сталєво-алюмінієвої лопаток свідчить про те, що найбільш суттєва відмінність між ними є для першої власної частоти, яка у випадку сталєво-алюмінієвої лопатки є приблизно в півтора рази меншою за відповідне значення для алюмінієвої лопатки. Поясненням цього є той факт, що відповідна форма коливань характеризується в обох випадках згинанням у напрямку меншої жорсткості пера, що у випадку алюмінієвої лопатки забезпечується усім кореневим перерізом пера, а у випадку сталєво-алюмінієвої лопатки лише сталєвою частиною, яка приварена до сталєвого хвостовика та на яку наноситься алюмінієве перо (рис. 4). Вищі власні частоти двох лопаток є співставними із відмінністю до 10%, що обумовлено тим фактом, що на відповідні власні форми має вплив

жорсткість саме пера лопатки, яке в обох випадках є алюмінієвим за виключенням невеликого об'єму сталєвої серцевини у сталєво-алюмінієвому варіанті.

Отже, сталєво-алюмінієвий варіант лопатки при порівнянні динамічних характеристик має недолік у вигляді суттєвого зниження першої власної частоти лопатки у порівнянні з алюмінієвим варіантом. В той же самий час, цей недолік для даної конкретної машини нівелюється тим фактом, що навіть при такому зниженні власної частоти відстроювання від кратностей частоти збуджуючого навантаження є достатнім, щоб забезпечити безпечне функціонування машини, що було доведено в [3].

Композиційний варіант лопатки призводить до появи щільнішого спектру власних частот, показаних у таблиці 1, та форм, показаних на рисунку 12.

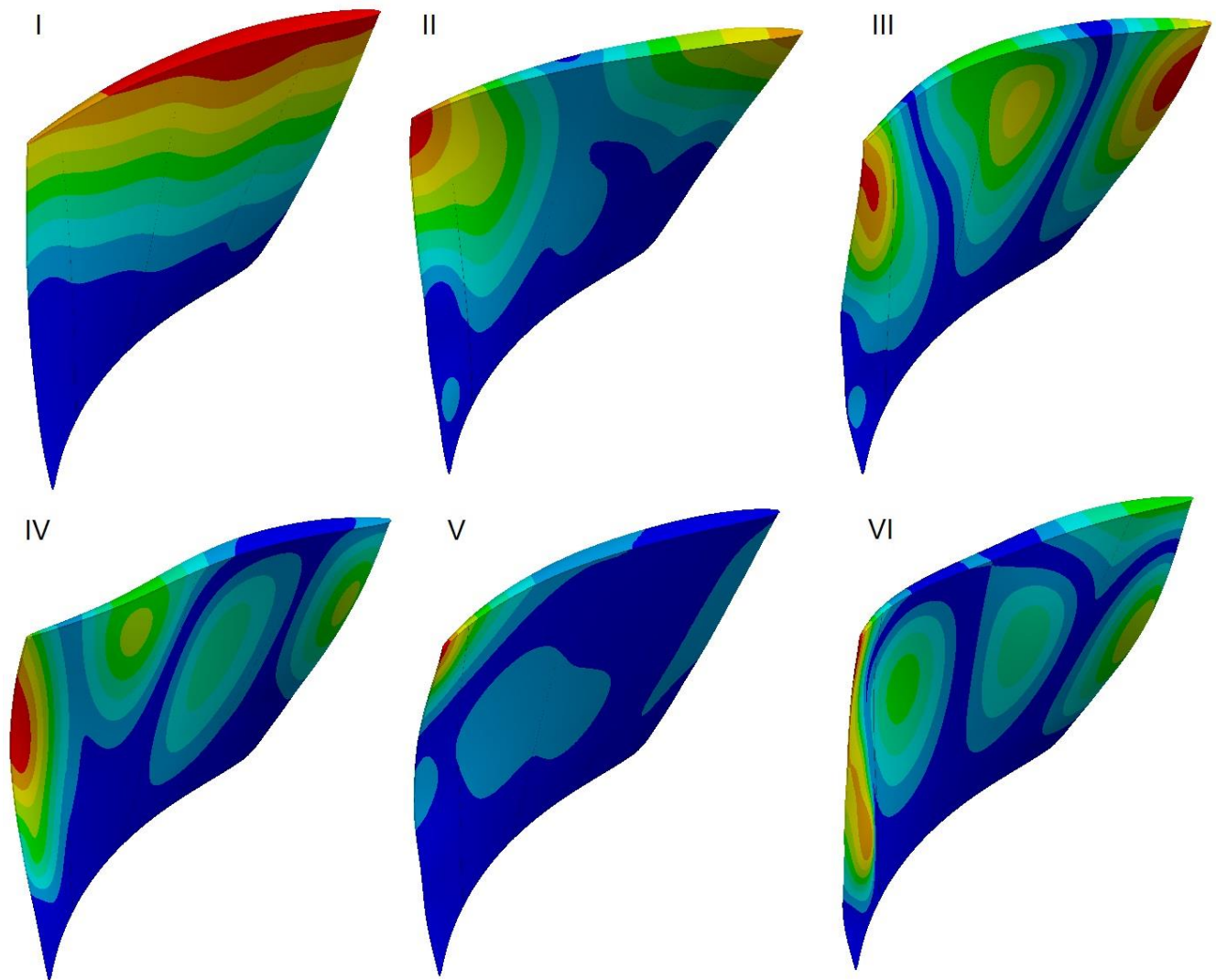


Рис. 12 – Власні форми коливань композиційного пера лопатки

Важливим є той факт, що перша власна форма пера композиційної лопатки є більш наближеною до відповідного значення алюмінієвої лопатки у порівнянні зі сталеву-алюмінієвим варіантом, що свідчить про ефективність застосованих ребер жорсткості у композиційному варіанті для супротиву згинанню пера лопатки. Друга власна частота композиційної лопатки є також близькою до двох попередньо розглянутих варіантів, оскільки вона пов'язана із глобальною деформацією пера. Вищі ж власні частоти композиційної лопатки є меншими за відповідні значення двох попередньо розглянутих варіантів, що обумовлено їх відповідністю власним формам, пов'язаним із коливаннями композиційного пера як оболонки, а не як суцільного тіла.

Отже, композиційний варіант лопатки при порівнянні динамічних характеристик насамперед із алюмінієвим варіантом має недоліки, які полягають у зниженні першої власної частоти та щільнішому спектрі власних частот. Проте це не є проблемою для конкретної машини, що було продемонстровано в [4].

Варто також відзначити, що такі спостереження зроблені для розглянутої форми профілю лопатки,

типу машини та кріплень. У випадку інших геометричних параметрів висновки щодо конкретних значень та співвідношень розглянутих типів лопаток можуть відрізнятись.

Висновки. В роботі було проведено дослідження динамічних характеристик трьох варіантів лопатки вентилятора головного провітрювання шахти із одним і тим же самим профілем для збереження аеродинамічних показників машини та кріпленням для встановлення в один і той же самий диск ротора. Перший та первісний варіант є суцільно алюмінієвим, другий – складним сталеву-алюмінієвим, а третій – композиційним.

В попередніх дослідженнях була доведена ефективність використання сталеву-алюмінієвого та композиційного варіантів для вирішення проблем функціонування машини, зокрема, швидкого зношування профілів лопаток і, як результат, падіння аеродинамічних характеристик та потреби заміни лопаток разом із хвостовиками.

В представленому в роботі дослідженні був проведений порівняльний аналіз динамічних

характеристик трьох варіантів лопаток, метою якого було доведення того факту, що використання нових рішень не призведе до проблем у роботі машини з точки зору її динамічної поведінки. Таке дослідження проводилося із урахуванням інерційних, термічних та аеродинамічних навантажень лопаток, особливостей їх кріплення, а також впливу переднапруженого стану від цих навантажень на динамічні характеристики, щоб врахувати усі можливі чинники, яким повинна бути приділена увага при аналізі механічної поведінки твердого тіла, що деформується.

В результаті проведеного порівняння було встановлено, що використання як сталевих, алюмінієвих, так і композиційних варіантів лопатки через особливості конструкції в той чи інший мірі призводить до зниження власних частот коливань лопатки, зокрема першої власної частоти, що потенційно може вплинути на резонансний стан системи, проте в даному випадку конкретної машини такі зміни в динамічних характеристиках не мають суттєвого впливу, що дозволяє використовувати усі варіанти лопатки за їхнім призначенням.

Список літератури

1. Мартиненко В.Г. Розробка здвоєної лопатки осьового вентилятора із підвищеними аеродинамічними характеристиками / В.Г. Мартиненко, М.І. Гриценко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2019. – № 1. – С. 28-33. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187414>
2. Martynenko V.G. Analysis of static and dynamic strength of the axial fan considering aerodynamic properties of the flow and nonuniformity of temperature field / V.G. Martynenko, M.I. Hrytsenko // Journal of Mechanical Engineering. – 2015. – Vol. 18 (4/1). – P. 44-52. URL: <http://journals.urau.ua/jme/article/view/57509> (дата звернення: 30.11.2023).
3. Мартиненко В.Г. Проектування, аналіз та експериментальне дослідження статичної міцності композиційної біметалічної лопатки вентилятора головного провітрювання шахти / В.Г. Мартиненко, М.І. Гриценко, С.В. Мавродій // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2018. – № 38 (1314). – С. 20-31. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152477>
4. Мартиненко В.Г. Комплексна оцінка міцності композиційної лопатки вентилятора головного провітрювання шахти / В.Г. Мартиненко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2021. – № 1. – С. 10-14. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2021.1.232865>
5. Martynenko V.G. Modernization of an experimental installation and a procedure for investigating the anisotropic viscoelastic properties of composite materials at elevated temperatures / V.G. Martynenko, Yu.N. Ulianov // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21 (2). – P. 3-11. <https://doi.org/10.15407/jmach2018.02.003>
6. Garg H. Comparative study of sheet metal and carbon fibre reinforced composites ceiling fan blade / H. Garg, J. Singh, M.R. Tyagi, K. Singh, K. Aditya, H. Gupta // In: Kumar, M., Pandey, R., Kumar, V. (eds.) Advances in Interdisciplinary Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2019. – P. 413-419. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6577-5_39
7. Chandragowda M. Designing and enhancing the mechanical properties of composite fan blades by glass fiber reinforced polymer composites / M. Chandragowda, C. Chakrasali, S. Yogeshwara Rao, G. Krishna, P. Abhishek // Journal of Scholastic Engineering Science and Management. – 2022. – Vol. 1, Is 1. – P. 16-25. URL: <https://hal.science/hal-03698564/document> (дата звернення: 06.12.2023).
8. An X. Coupled numerical simulation and modal analysis of composite ducted propeller / X. An, B. Song, H. Xia, Y. Ding, Z. Jin, L. Lessard // Sixth International Symposium on Marine Propulsors. – 2019. – P. 1-8. URL: <https://www.marinepropulsors.com/proceedings/2019/MB2-4.pdf> (дата звернення: 06.12.2023).
9. Krishnam S. Recent developments of materials used in air breathing and advanced air breathing engines / S. Krishnam, G. Srinivas // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – Vol. 872. – P. 1-12. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/872/1/012082>
10. Praveen Kumar S.D. Impact simulation: comparison of composite jet engine fan blade with and without leading edge reinforcement / S.D. Praveen Kumar, K.S. Tejas // International Research Journal of Engineering and Technology. – Vol. 08, Is. 08. – P. 1474-1479. URL: <https://www.irjet.net/archives/V8/i8/IRJET-V8I8208.pdf> (дата звернення: 06.12.2023).
11. Faiza K. A study of the thermo-mechanical behavior of a gas turbine blade in composite materials reinforced with mast / K. Faiza, M. Rabah, S. Salah, H. Ameddah // Revue des composites et des matériaux avancés. – Vol. 31. – P. 101-108. <https://doi.org/10.18280/rcma.310205>
12. Roeseler W.G. Composite structures: the first 100 years / W.G. Roeseler, B. Sarh, M.U. Kismarton // 16th International Conference on Composite Materials. – 2007. – P. 1-10. URL: https://www.iccm-central.org/Proceedings/ICCM16proceedings/contents/pdf/MonA/MoA_M1-01sp_roeselerw228184p.pdf (дата звернення: 07.12.2023).
13. Rokvam S. A computational iterative design method for bend-twist deformation in composite ship propeller blades for thrusters / S. Rokvam, N. Vedvik, L. Mark, E. Römcke, J. Ølnes, L. Savio, A. Echtermeyer // Open Engineering. – 2023. – Vol. 13. – P. 1-18. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0419>
14. Rokvam S. Designing composite adaptive propeller blades with passive bend-twist deformation for periodic-load variations using multiple design concepts / S. Rokvam, N. Vedvik, L. Savio, A. Echtermeyer // Polymers. – 2023. – Vol. 15, No. 12 (2749). – P. 1-34. <https://doi.org/10.3390/polym15122749>
15. Li H. Design and performance of composite runner blades for ultra low head turbines / H. Li, D. Zhou, J. Martinez, Z. Deng, K.I. Johnson, M. Westman // Renewable Energy. – 2019. – Vol. 132. – P. 1280-1289. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2018.08.110>
16. Walker S.R.J. A life cycle assessment comparison of materials for a tidal stream turbine blade / S.R.J. Walker, P.R. Thies // Applied Energy. – 2022. – Vol. 309. – P. 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2021.118353>
17. Finnegan W. Manufacture of high-performance tidal turbine blades using advanced composite manufacturing technologies / W. Finnegan, R. Allen, C. Glennon, J. Maguire, M. Flanagan, T. Flanagan // Applied Composite Materials. – 2021. – Vol. 28. – P. 2061-2086. <https://doi.org/10.1007/s10443-021-09967-y>
18. Appadurai M. Finite element analysis of composite wind turbine blades / M. Appadurai, E.F.I. Raj // 7th International Conference on Electrical Energy Systems. – 2021. – P. 585-589. <https://doi.org/10.1109/ICEES51510.2021.9383769>
19. Teng H. Carbon fiber composites for large-scale wind turbine blades: applicability study and comprehensive evaluation in China / H. Teng, S. Li, Z. Cao, S. Li, C. Li, T.J. Ko // Journal of Marine Science and Engineering. – 2023. – Vol. 11, No. 3 (624). – P. 1-22. <https://doi.org/10.3390/jmse11030624>
20. Hadār A. A novel composite helicopter tail rotor blade with enhanced mechanical properties / A. Hadār, A.D. Voicu, F. Baciū, D. Vlăsceanu, D.I. Tudose, S. Pastrama // Aerospace. – 2023. – Vol. 10, No. 7 (647). – P. 1-18. <https://doi.org/10.3390/aerospace10070647>
21. Sudhir Sastry Y.B. Stress analysis of helicopter composite blade using finite element analysis / Y.B. Sudhir Sastry, I. Bhargavi Rachana, K. Durga Rao // International Journal of Engineering Research & Technology. – 2013. – Vol. 2, Is. 12. – P. 1291-1299. URL: <https://www.ijert.org/research/stress-analysis-of-helicopter-composite-blade-using-finite-element-analysis-IJERTV2IS120036.pdf> (дата звернення: 07.12.2023).
22. Louis S. Experimental study on strength comparison of light weight aluminium alloy propeller blade with metal propeller blade / S. Louis, P. Louis // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 955. – P. 1-6. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/955/1/012034>

References (transliterated)

1. Martynenko V.G., Hrytsenko N.I. Rozrobka zdvoynoyi lopatky os'ovoho ventylyatora iz pidvyshchenymy aerodynamichnymy kharakterystykamy [Development of a double blade axial fan with

increased aerodynamic characteristics]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 1, pp. 28-33. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187414>

2. Martynenko V.G., Hrytsenko M.I. Analysis of static and dynamic strength of the axial fan considering aerodynamic properties of the flow and nonuniformity of temperature field. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, vol. 18, no. 4/1, pp. 44-52. Available at <http://journals.urau.ua/jme/article/view/57509> (accessed 30.11.2023).

3. Martynenko V.G., Hrytsenko N.I., Mavrody S.V. Proektuvannya, analiz ta eksperymental'ne doslidzhennya statychnoyi mitsnosti kompozytsiynoyi bimetalichnoyi lopatky ventilyatora holovnoho provitryuvannya shakhty [Design, analysis and experimental study of static strength of composite bimetal blade of mine main ventilation fan]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 38 (1314), pp. 20-31. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152477>

4. Martynenko V.G. Kompleksna otsinka mitsnosti kompozytsiynoyi lopatky ventilyatora holovnoho provitryuvannya shakhty [Comprehensive assessment of the mine main ventilation fan composite blade strength]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2021, no. 1, pp. 10-14. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2021.1.232865>

5. Martynenko V.G., Ulianov Yu.N. Modernization of an experimental installation and a procedure for investigating the anisotropic viscoelastic properties of composite materials at elevated temperatures. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 3-11. <https://doi.org/10.15407/jmach2018.02.003>

6. Garg H., Singh J., Tyagi M.R., Singh K., Aditya K., Gupta H. Comparative study of sheet metal and carbon fibre reinforced composites ceiling fan blade. In: Kumar, M., Pandey, R., Kumar, V. (eds.) *Advances in Interdisciplinary Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019, pp. 413-419. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6577-5_39

7. Chandragowda M., Chakrasali C., Yogeshwara Rao S., Krishna G., Abhishek P. Designing and enhancing the mechanical properties of composite fan blades by glass fiber reinforced polymer composites. *Journal of Scholastic Engineering Science and Management*, 2022, Vol. 1, Is 1, pp. 16-25. Available at <https://hal.science/hal-03698564/document> (accessed 06.12.2023).

8. An X., Song B., Xia H., Ding Y., Jin Z., Lessard L. Coupled numerical simulation and modal analysis of composite ducted propeller. *Sixth International Symposium on Marine Propulsors*, 2019, pp. 1-8. Available at <https://www.marinepropulsors.com/proceedings/2019/MB2-4.pdf> (accessed 06.12.2023).

9. Krishnam S., Srinivas G. Recent developments of materials used in air breathing and advanced air breathing engines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 872, pp. 1-12. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/872/1/012082>

10. Praveen Kumar S.D., Tejas K.S. Impact simulation: comparison of composite jet engine fan blade with and without leading edge reinforcement. *International Research Journal of Engineering and Technology*, Vol. 08, Is. 08, pp. 1474-1479. Available at <https://www.irjet.net/archives/V8/i8/IRJET-V8I8208.pdf> (accessed 06.12.2023).

11. Faiza K., Rabah M., Salah S., Ameddah H. A study of the thermo-mechanical behavior of a gas turbine blade in composite

materials reinforced with mast. *Revue des composites et des matériaux avancés*, Vol. 31, pp. 101-108. <https://doi.org/10.18280/rcma.310205>

12. Roeseler W.G., Sarh B., Kismarton M.U. Composite structures: the first 100 years. *16th International Conference on Composite Materials*, 2007, pp. 1-10. Available at https://www.iccm-central.org/Proceedings/ICCM16proceedings/contents/pdf/MonA/MoA_M1-01sp_roeselerw228184p.pdf (accessed 07.12.2023).

13. Rokvam S., Vedvik N., Mark L., Rømkke E., Ølnes J., Savio L., Echtermeyer A. A computational iterative design method for bend-twist deformation in composite ship propeller blades for thrusters. *Open Engineering*, 2023, Vol. 13, pp. 1-18. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0419>

14. Rokvam S., Vedvik N., Savio L., Echtermeyer A. Designing composite adaptive propeller blades with passive bend-twist deformation for periodic-load variations using multiple design concepts. *Polymers*, 2023, Vol. 15, No. 12 (2749), pp. 1-34. <https://doi.org/10.3390/polym15122749>

15. Li H., Zhou D., Martinez J., Deng Z., Johnson K.I., Westman M. Design and performance of composite runner blades for ultra low head turbines. *Renewable Energy*, 2019, Vol. 132, pp. 1280-1289. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2018.08.110>

16. Walker S.R.J., Thies P.R. A life cycle assessment comparison of materials for a tidal stream turbine blade. *Applied Energy*, 2022, Vol. 309, pp. 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2021.118353>

17. Finnegan W., Allen R., Glennon C., Maguire J., Flanagan M., Flanagan T. Manufacture of high-performance tidal turbine blades using advanced composite manufacturing technologies. *Applied Composite Materials*, 2021, Vol. 28, pp. 2061-2086. <https://doi.org/10.1007/s10443-021-09967-y>

18. Appadurai M., Raj E.F.I. Finite element analysis of composite wind turbine blades. *7th International Conference on Electrical Energy Systems*, 2021, pp. 585-589. <https://doi.org/10.1109/ICEES51510.2021.9383769>

19. Teng H., Li S., Cao Z., Li S., Li C., Ko T.J. Carbon fiber composites for large-scale wind turbine blades: applicability study and comprehensive evaluation in China. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2023, Vol. 11, No. 3 (624), pp. 1-22. <https://doi.org/10.3390/jmse11030624>

20. Hadār A., Voicu A.D., Baci F., Vlăsceanu D., Tudose D.I., Pastrama S. A novel composite helicopter tail rotor blade with enhanced mechanical properties. *Aerospace*, 2023, Vol. 10, No. 7 (647), pp. 1-18. <https://doi.org/10.3390/aerospace10070647>

21. Sudhir Sastry Y.B., Bhargavi Rachana I., Durga Rao K. Stress analysis of helicopter composite blade using finite element analysis. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2013, Vol. 2, Is. 12, pp. 1291-1299. Available at <https://www.ijert.org/research/stress-analysis-of-helicopter-composite-blade-using-finite-element-analysis-IJERTV2IS120036.pdf> (accessed 07.12.2023).

22. Louis S., Louis P. Experimental study on strength comparison of light weight aluminium alloy propeller blade with metal propeller blade. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, Vol. 955, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/955/1/012034>

Надійшла (received) 12.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Мартиненко Володимир Геннадійович (Martynenko Volodymyr) – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9471-0905>.

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, А.С.ХОРОШУН, А.В.СЕНЬКО, О.А.ТАТАРІНОВА

ПРОГРАМНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ ОБРОБКИ ДАНИХ З ДОВГОТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ ЕДВАРДСА

Надано опис розробленого програмного засобу для збереження та аналізу даних з високотемпературного деформування та довготривалої міцності металевих матеріалів. Для його реалізації як веб-застосунку обрано веб-фреймворк з відкритим кодом Laravel. Рішення Voyager використовується спільно з ним як графічний інтерфейс для взаємодії з базою даних. Для побудови графіків використовується рішення на мові програмування JavaScript з використанням технології Canvas. Описано основні класи та компоненти. За допомогою діаграм варіантів використання показано можливість застосування програмного засобу в інженерній практиці обробки даних експериментальних високотемпературних досліджень повзучості та руйнування. Запропоновано підхід та алгоритм для апроксимації кривих довготривалої міцності загального вигляду, що включають різні типи руйнування, з застосуванням кривих Едвардса. З їхнім використанням отримано аналітичний нелінійний вираз для функціональної залежності між часом до руйнування та руйнівним напруженням. Обговорюються апроксимації різних типів кривої довготривалої міцності, що відповідають процесам накопичення пошкоджувальності у матеріалі за різними типами фізичних механізмів. Продемонстровано небажану можливість отримання завищеного значення часу до руйнування у випадку малих та середніх значень напружень без використання інформації щодо ділянок міжзеренного руйнування, руйнування завдяки окисленню чи корозії та старіння на кривій довготривалої міцності. Використання розробленого програмного засобу, підходу та способу аналітичного представлення функціональної залежності значень руйнівного напруження від часу в еволюційному рівнянні для параметру пошкоджуваності дозволяє проводити уточнені розрахунки елементів конструкцій, що працюють в умовах високотемпературного навантаження.

Ключові слова: програмний засіб, веб-застосунок, база даних, довготривала міцність, повзучість, пошкоджуваність, криві Едвардса.

A description of the developed software for saving and analyzing data on high-temperature deformation and long-term strength of metallic materials is provided. The open source Laravel web framework was chosen to implement in the application. The Voyager solution is used together with it as a graphical interface for interacting with the database. A JavaScript programming language solution using Canvas technology is used to build plots. Basic classes and components are described. With the help of diagrams of use cases, the possibility of using the web application in the engineering practice of data processing of experimental high-temperature creep and fracture studies is shown. An approach and an algorithm for approximating long-term strength curves of general appearance, including different types of failure, using Edwards curves are proposed. With their use, an analytical nonlinear expression for the functional dependence between the time to failure and the failure stress was obtained. Approximations of various types of the long-term strength curve corresponding to the processes of accumulation of damage in the material by various types of physical mechanisms are discussed. The undesirable possibility of obtaining an overestimated value of the time to failure in the case of small and medium stress values without using information on the areas of intergranular failure, failure due to oxidation or corrosion, and overaging on the long-term strength curve is demonstrated. The use of the developed software, approach and method of analytical representation of the functional dependence of the values of failure stress on time in the evolution equation for the damage parameter allows you to carry out refined calculations of structural elements operating under high-temperature load conditions

Key words: software, web application, database, long-term strength, creep, damage, Edwards curves.

Вступ. Завдяки експериментальним дослідженням властивостей сучасних конструкційних матеріалів на сьогодні є накопиченням великий обсяг даних, що їх описують. Одним з найбільш складних питань їхнього використання у практиці наукових досліджень та інженерних розрахунків є встановлення функціональних залежностей між різними типами властивостей. Такі залежності є необхідними для проведення розрахунків при визначенні заданих параметрів у різних діапазонах напружень, температур тощо. Для аналізу подібних функціональних залежностей є необхідною наявність експериментальних даних, оброблених та представлених у цифровому вигляді. Така обробка найкращим чином відбувається з застосуванням баз даних. Для ефективного їхнього використання на сучасному етапі є необхідною програмна реалізація доступу до бази даних. Найкраще це робиться у вигляді інтернет-орієнтованих програмних засобів, або веб-застосунків.

Останні двадцять років характеризувались істотним зростанням веб-застосунків, які містять інформацію про характеристики фізико-механічних властивостей конструкційних матеріалів. На жаль, переважна частина з них містить інформацію або у вигляді bitmap – зображень, або надає її текстово, але

без можливості обробки даних. Також з'являються роботи, в яких міститься краще структурована інформація щодо обмеженої групи сталей, сплавів або неметалевих матеріалів. В таких роботах [1-4] іноді містяться посилання на бази даних, створені як таблиці MS Excel. Японські дослідники публікують дані з досліджень повзучості та довготривалої міцності різних сталей та сплавів, як приклад наведемо роботу [5]. Слід також відмітити великий веб-портал www.matweb.com [6], в якому збережено дані щодо властивостей біля 175000 матеріалів. Ефективно організовано можливість аналізу та порівняння різних властивостей металевих матеріалів у веб-порталі www.splav-kharkov.com [7].

Слід зауважити, що у переважній кількості баз даних, в яких існує можливість оцінювання та порівняння різних марок та класів матеріалів, більшість даних наведено для нормальних, кімнатних температур. Нелінійні залежності, які притаманні деформівній поведінці металевих матеріалів, практично не відтворюються. Винятком є бази пластмас та інших полімерних матеріалів фірми BASF (див., наприклад, [8]), в яких надано температурні залежності та деякі графіки.

Вибір типу матеріалу для високотемпературних конструкцій є відповідальною задачею, тому

автоматизація процесу є необхідною. Для організації ефективного доступу до такої бази даних є необхідним створення системи її управління (СУБД) та програмного засобу, за допомогою якого організовується робота з базою.

На сьогодні питання розробки баз даних, систем їхнього управління та створення відповідних програмних застосунків є добре проробленими [9,10]. Аналіз цих та інших джерел свідчить, що для ефективної розробки та оптимального використання ресурсів колективу розробників одним з найкращих варіантів є застосування веб-фреймворку з відкритим кодом Laravel [11]. Графічні модулі та елементи ефективно створюються з застосуванням мови програмування JavaScript[12] та технології Canvas [13].

Дану роботу присвячено опису програмного засобу, бази даних та методу використання оброблених за їхньою допомогою характеристик для оцінювання довготривалої міцності матеріалів за умов високотемпературного деформування.

Опис бази даних та структури програмного засобу.

Для оцінювання довготривалої міцності матеріалів при високих температурах використовують експериментальні дані, оброблені у вигляді кривих повзучості або довготривалої міцності [14]. З кривих повзучості, які, як відомо [14], будуються для конкретних значень напружень, що були задані у випробуванні, є можливим оцінити значення часу до руйнування зразку та руйнівної деформації. З кривих довготривалої міцності отримують значення часу до руйнування при заданому напруженні [14]. Отже, для аналізу довговічності можуть бути необхідними криві обох типів. Також у випадку циклічного навантаження використовують граничні діаграми, що пов'язують амплітудні та середні компоненти напруження циклу. Розглянемо структуру проекту, присвяченого саме структуруванню експериментальних даних для їхнього подальшого використання у побудові функціональних залежностей, зі стислим описом застосунку для аналізу полів бази даних.

Тестування та аналіз реалізованого раніше підходу до вирішення даної задачі [15] показали низку нерозв'язаних питань. Вони були пов'язані з обмеженістю застосованого програмного забезпечення, яке використовувалось при створенні застосунків на той час. Для використання сучасних підходів та доробку у галузі інформаційних технологій розпочато новий проект.

Для його реалізації було обрано веб-фреймворк з

відкритим кодом Laravel. Рішення Voyager використовується спільно з ним як графічний інтерфейс для взаємодії з базою даних [11].

До структури бази даних веб-фреймворка відносяться три таблиці:

- криві довготривалої міцності (long_term_strength_curves);
- криві повзучості (creep_curves);
- граничні діаграми (diagrams_of_limiting_amplitudes_and_stresses).

Полями бази даних є марка матеріалу, значення температури та напружень, при яких було проведено випробування, значення точок на відповідних кривих (деформація або напруження – час визначення), інформація про джерело, звідки дані отримано. Реалізовано можливості зберігання, додавання та доступу до експериментальної інформації.

Реалізація проекту з використанням фреймворку Laravel передбачає наявність окремого класу для кожної сутності та кожної таблиці у базі даних (БД).

Структура класів у програмі відображена на UML-діаграмі класів (рис.1). Діаграма варіантів використання для створюваного застосунку має вигляд, наведений на рис.2.

Реалізовано методику графічного відображення кривих повзучості з використанням обмеженої кількості експериментальних даних, наданих користувачем. Для побудови графіків використовується рішення на JavaScript. Сторонні бібліотеки у цьому випадку не використовуються, задіяно нативні засоби JavaScript та технологія Canvas [12, 13].

Ідеалізоване представлення кривої повзучості складається з трьох сегментів: прямої, що відповідає за ділянку усталеної повзучості, та двох квадратичних кривих Без'є [16], якими описуються перша та третя ділянки [14]. Криві довготривалої міцності представлені набором відрізків прямих між заданими експериментальними значеннями. Детальний опис підходів до відображення даних надано у роботі [15].

При циклічному навантаженні велику роль у визначенні довготривалої міцності відіграють значення двох компонентів напружень – циклічно змінного, або амплітудного, та середнього, незмінного у часі. Для опису довготривалої міцності при циклічному навантаженні використовують граничні діаграми (діаграми Гудмена) [17]. Розглянемо реалізовані у застосунку варіанти використання у випадку застосування аналізу граничних діаграм (рис.3).

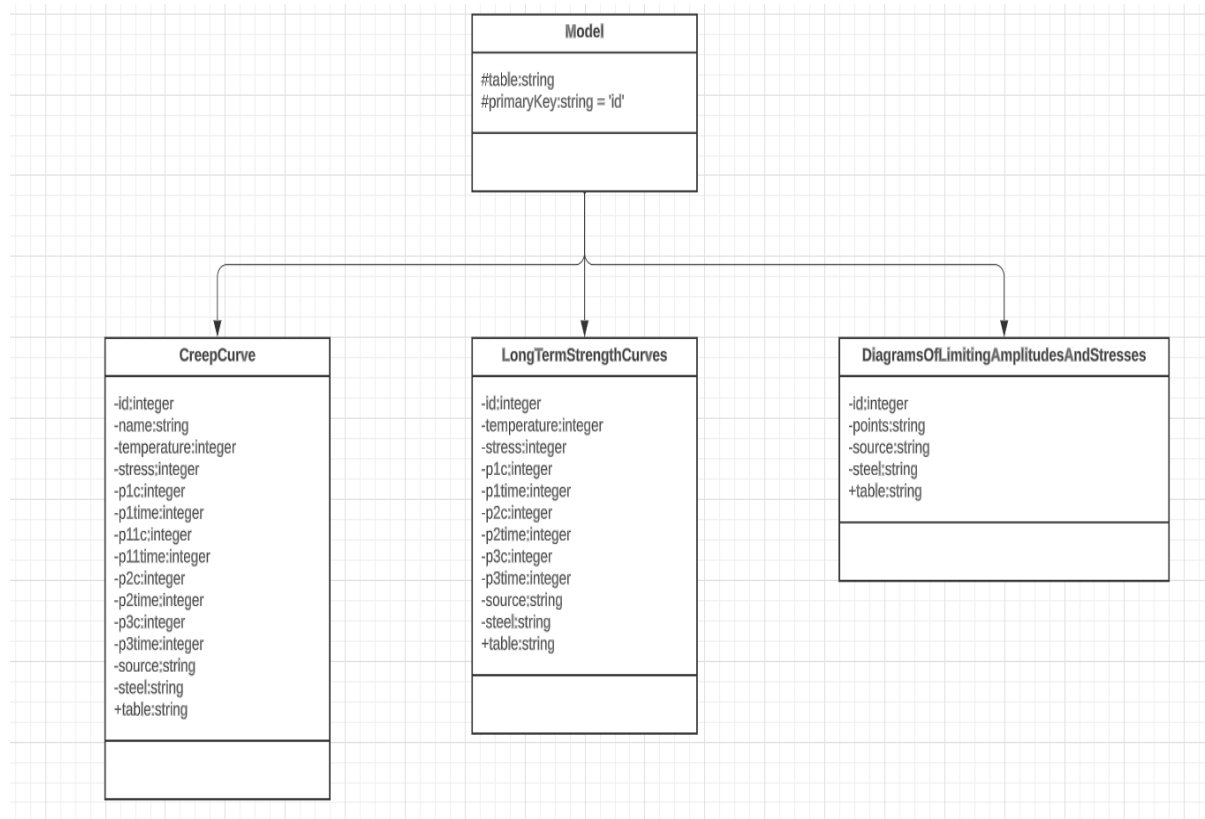


Рис. 1 – Діаграма класів

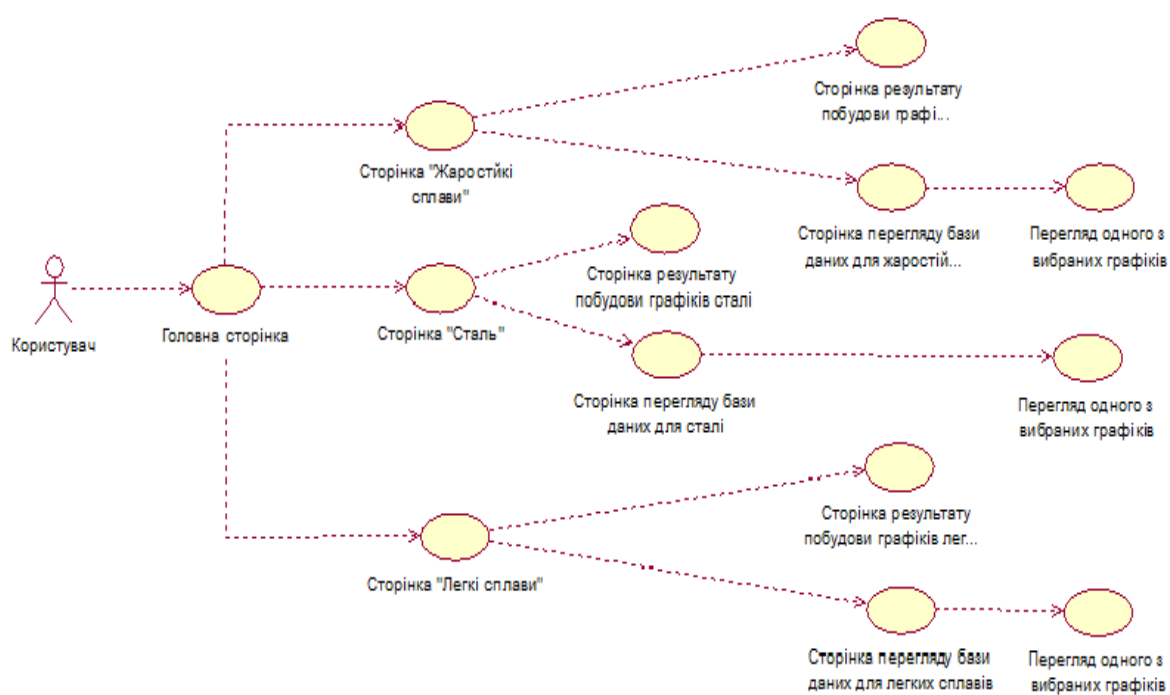


Рис. 2 – Діаграма варіантів використання

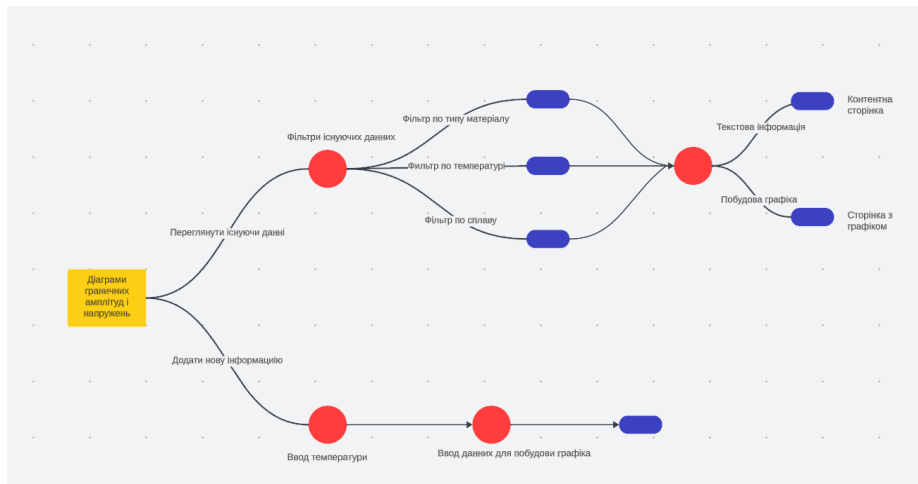


Рис. 3 – Діаграма варіантів використання. Граничні діаграми

Користувачі мають можливість побудови та візуального аналізу кривих усіх трьох типів. Крім того, реалізовані функціональні властивості застосунку дозволяють отримати вибірки даних для подальшої обробки.

Використання застосунку для обробки даних та аналізу довготривалої міцності.

На теперішній час завдяки дослідженням механіків та матеріалознавців (див., наприклад [14, 17]) встановлено, що крива довготривалої міцності має ні дві ділянки- крихку та в'язку (1 та 2 відповідно на рис. 4), як вважалося раніше, а значно більше. Серед основних, які мають місце при менших значеннях напружень, Пенні та Марріотт [14] вказують ділянки міжзеренного руйнування (3, intergranular), руйнування завдяки окисленню чи корозії доквілля (4, oxidation) та внаслідок старіння (5, overaging). На жаль, такі криві побудовано лише для дуже невеликої кількості матеріалів, тому у сучасній розрахунковій практиці обмежуються моделюванням за крихкою та/або в'язкою ділянкою кривої.

Припустимо, що у створеній базі даних міститься інформація щодо точок, які є вершинами ламаної - кривої довготривалої міцності у заданому температурному діапазоні, загальний вигляд якої надано на рис. 4.

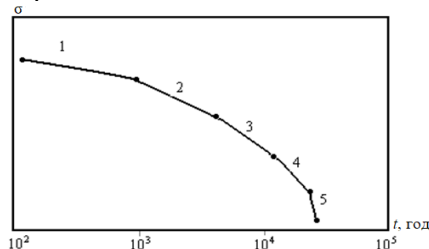


Рис. 4 – Схематичне уявлення узагальненої кривої довготривалої міцності

За запропонованим алгоритмом відбувається відбір відповідних точок з бази даних та передача у необхідний програмний модуль для виконання розрахунків. Навіть якщо повна інформація з механічних випробувань при низьких значеннях

напружень є відсутньою, завжди є можливість використати дані матеріалознавчих досліджень щодо процесів окислення та старіння й побудувати апроксимовану криву.

Для подібних апроксимацій є можливим використання сімейства кривих Едвардса [18, 19]. На площині у декартовій системі координат (x, y) сімейство еліптичних кривих Едвардса представляється наступним чином:

$$x^2 + y^2 = c^2 (1 + dx^2 y^2); d(1 - dc^4) \neq 0. \quad (1)$$

де d, c – константи.

У разі наявності різних типів експериментальних даних криві довготривалої міцності загального вигляду можуть мати не тільки 5 ділянок, що у напівлогарифмічній шкалі представлено відрізками прямих, але й складатись з комбінації ламаних та нелінійних функцій. Залежність такого типу представлено на рис. 5 кривою 1. З іншого боку, є можливим, що випробування не покажуть наявності всіх п'яти ділянок, як представлено кривою 2 на рис. 5. Використаємо аналітичні залежності, що побудовано на базі використання рівнянь для кривих Едвардса, для виразу залежності руйнівних значень напружень σ від часу t :

$$\sigma(t) = A \left(\frac{B - t^2}{F^2 t^2 + C} \right)^{1/2} \quad (2)$$

де A, B, C, F – константи.

Для апроксимації різного типу залежностей руйнівних напружень від часу у рівняннях кривих Едвардса, представлених, наприклад, кривими 1 та 2 на рис. 5, змінюються тільки значення констант, що до них входять. Наприклад, апроксимація кривої 1 можлива при наступних значеннях констант: $A = 9 \cdot 10^{-3}$ МПа, $B = 1 \cdot 10^{-10}$ год², $C = 7$ год², $F = 5 \cdot 10^{-5}$. Змінювання значень двох констант ($A = 3.75 \cdot 10^{-3}$ МПа, $C = 1$ год²) призводить до опису залежності, описаної кривою 2 на рис. 5.

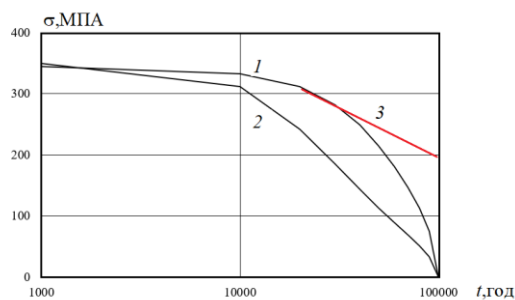


Рис. 5 – Форма кривих довготривалої міцності, отриманих з використанням залежності (2): 1, 2; криву 3 побудовано за даними ділянки крихкого руйнування

Далі, наявність аналітичного виразу для функціональної залежності (2) руйнівного напруження від часу дозволяє її використання при аналізі накопичення прихованої пошкоджуваності згідно підходів континуальної механіки пошкоджуваності [20]. Використаємо скалярний параметр пошкоджуваності ω . Еволюційне (кінетичне) рівняння для нього запишемо у формі з використанням додаткового параметру r – степені при параметрі ω [20, 21]:

$$\dot{\omega} = D \frac{(\sigma(t))^m}{(1-\omega^r)^l} = D \frac{\left(\frac{B-t^2}{F^2 t^2 + C}\right)^{m/2}}{(1-\omega^r)^l} \quad (3)$$

$$\omega(0)=0, \omega(t^*)=\omega^* \quad (4)$$

де D, l, m, r – константи, що визначаються за кривими типу 1, 2 рис. 5,

t^* – значення часу завершення руйнування,

ω^* – т.зв. критичне значення параметру пошкоджуваності, ($\omega^* \leq 1$) [20].

Для визначення значень констант D, l, m, r є необхідним проінтегрувати еволюційне рівняння (3) з додатковими умовами (4). Далі використати 4 пари значень (σ, t) з різних ділянок кривої довготривалої міцності, такі різні ділянки мають відповідати якісно різним механізмам руйнування, відміченим на рис. 5. Підстановка даних чотирьох пар значень в проінтегроване рівняння для параметру пошкоджуваності надасть систему чотирьох рівнянь для визначення значень невідомих констант D, l, m, r .

Наголосимо, що використання класичного підходу апроксимації кривої довготривалої міцності з використанням тільки ділянки крихкого руйнування (2 на рис.4) при наявності міжзеренного руйнування, руйнування завдяки окисленню чи корозії та старіння може призвести до завищеної оцінки довговічності. Таку апроксимацію проілюстровано на рис.5 кривою 3. Аналіз даних, наведених на цьому рисунку, свідчить, що традиційна апроксимація може надати більші на 40-50% значення часу до руйнування при середніх значеннях напружень, а при малих вони будуть відрізнятися у рази.

Запропонований спосіб визначення констант легко автоматизується, у програмному засобі

створюються відповідні форми, в які заносяться значення напружень та часу з різних ділянок кривої довготривалої міцності.

Висновки. Надано опис розробленого програмного засобу для збереження та аналізу даних з високотемпературного деформування та довготривалої міцності металевих матеріалів. Описано основні класи та компоненти. За допомогою діаграм варіантів використання показано можливість використання застосунку в інженерній практиці обробки даних експериментальних високотемпературних досліджень.

Запропоновано підхід та алгоритм для апроксимації кривих довготривалої міцності загального вигляду, що включають різні типи руйнування. Застосування кривих Едвардса дозволило отримати аналітичний вираз для функціональної залежності між часом до руйнування та руйнівним напруженням. Використання даного аналітичного виразу в еволюційному рівнянні для параметру пошкоджуваності дозволить проводити уточнені розрахунки елементів конструкцій, що працюють в умовах високотемпературного навантаження.

Наголосимо, що запропонований підхід може певною мірою розглядатись як альтернативний до підходу з використанням т.зв. «mechanism based» еволюційних рівнянь, що використовують декілька параметрів пошкоджуваності для опису різних її механізмів [22, 23]. Використання одного параметру пошкоджуваності полегшує аналіз процесів поточного прихованого руйнування з однозначним визначенням місць його завершення.

Подяка. Ця робота була частково підтримана (Д.В.Бреславський) Фондом Фольксваген "Visiting research program for refugee Ukrainian scientists" (Az. 9D257).

Список літератури

1. Li Z. A database of mechanical properties for multi principal element alloys / Z. Li et al. // Chemical Data Collections. – 2023. – Т. 47. – С. 101068.
2. Jitsukawa S. Development of an extensive database of mechanical and physical properties for reduced-activation martensitic steel F82H / S. Jitsukawa et al. // Journal of Nuclear Materials. – 2002. – Т. 307. – С. 179-186.
3. Kimura A. Recent progress in reduced activation ferritic steels R&D in Japan / A. Kimura et al. // Nuclear fusion. – 2003. – Т. 43. – №. 10. – С. 1246.
4. Sakai T. Statistical fatigue properties of SCM435 steel in ultra-long-life regime based on JSMS database on fatigue strength of metallic materials / T. Sakai et al. // International journal of fatigue. – 2006. – Т. 28. – №. 11. – С. 1486-1492.
5. Sawada K. Data sheets on the elevated-temperature properties of 18cr-10ni-ti stainless steel for boiler and heat exchanger seamless tubes (SUS 321H TB). / K. Sawada et al. – 1987.
6. MatWeb. Material property data – Режим доступу: www.matweb.com. – Дата звертання: 20 листопада 2023.
7. Breslavskaya E.A. Internet-portal «Database of Steels and Alloys» as an efficient tool in engineering / E.A. Breslavskaya, D.V. Breslavsky // CIS Iron & Steel Review 2011. – 2011. – № 1. – P. 12-15.
8. Product Locator for Engineering Plastics – Режим доступу: https://pmttools-na.basf.com/product. – Дата звертання: 25 листопада 2023.
9. Garcia-Molina H. Database systems: the complete book. / Garcia-Molina H. – Pearson Education India, 2008.
10. Casteleyn S. Engineering web applications. / S. Casteleyn et al. – Heidelberg : Springer, 2009. – Т. 30.

11. Matula T. *Laravel application development cookbook*. / T. Matula – Packt Publishing Ltd, 2013.
12. Crockford D. *JavaScript: The Good Parts: The Good Parts*. / D. Crockford – "O'Reilly Media, Inc.", 2008.
13. Joshi B.P. *Canvas Cookbook*. / B.P. Joshi – Packt Publishing Ltd, 2016.
14. Penny R.K. *Design for creep*. / R.K. Penny, D.L. Marriott– London: Chapman and Hall, 1995. – 430 p.
15. Breslavsky D.V. Web-application for archiving of creep and long term strength data / D.V. Breslavsky, O.A. Breslavska, A.S. Khoroshun // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Динаміка і міцність машин. - Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – № 57 (1166). - С. 11-14.
16. Joon Ahn Young Approximation of circular arcs and offset curves by Bézier curves of high degree / Ahn Young Joon // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 167, № 2. – P. 405–416.
17. Бреславський Д.В. Деформування та довготривала міцність конструктивних елементів ядерних реакторів. / Д.В. Бреславський – Харків, Друкарня Мадрид, 2020. – 249 с.
18. Edwards, H.M. A normal form for elliptic curves. / H.M. Edwards. – Bulletin of the American Mathematical Society, July 2007. – P. 393–422.
19. Bernstein, D.J. Faster Addition and Doubling on Elliptic Curves / D.J. Bernstein, T. Lange. – Advances in Cryptology—ASIACRYPT'2007 (Proc. 13th Int. Conf. On the Theory and Application of Cryptology and Information Security. Kuching, Malaysia. December 2–6, 2007). – 2007.
20. Lemaitre J. *Mechanics of solid materials*. / J. Lemaitre, J.L. Chaboche // Cambridge: University press, 1994. – 556 p.
21. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*. Yu.N. Rabotnov / – Amsterdam/London: North-Holland Publishing, 1969. – 822 p.
22. Hayhurst D.R. The use of continuum damage mechanics in creep analysis and design. / D.R. Hayhurst. // Journal Of Strain Analysis For Engineering Design. 1994. – Vol. 29 (3). – P. 233–241.
23. Dyson B.F. Micromechanism-quantification for creep constitutive equations. IUTAM Symposium on Creep in Structures / B.F. Dyson, M. McLean Ed.: S. Murakami, N. Ohno. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – P. 3–16.
5. Sawada K. et al. *Data sheets on the elevated-temperature properties of 18Cr-10Ni-ti stainless steel for boiler and heat exchanger seamless tubes (SUS 321H TB)*. 1987.
6. MatWeb. Material property data – Available at: www.matweb.com. (accessed 20.11.2023)
7. Breslavskaya E. A., Breslavsky D. V. *Internet-portal «Database of Steels and Alloys» as an efficient tool in engineering*. CIS Iron & Steel Review 2011. № 1. P. 12–15.
8. Product Locator for Engineering Plastics – Available at: <https://pmttools-na.basf.com/product>. (accessed 25.11.2023)
9. Garcia-Molina H. *Database systems: the complete book*. Pearson Education India, 2008.
10. Casteleyn S. et al. *Engineering web applications*. Heidelberg: Springer, 2009. T. 30.
11. Matula T. *Laravel application development cookbook*. Packt Publishing Ltd, 2013.
12. Crockford D. *JavaScript: The Good Parts: The Good Parts*. "O'Reilly Media, Inc.", 2008.
13. Joshi B. P. *Canvas Cookbook*. Packt Publishing Ltd, 2016.
14. Penny R.K., Marriott D.L. *Design for creep*. London: Chapman and Hall, 1995. 430 p.
15. D.V. Breslavsky, O.A. Breslavska, A.S. Khoroshun. Web-application for archiving of creep and long term strength data. Vestn. Khar'k. politekhn. in ta. Ser.: Dynamika i micnist' mashyn [Bulletin of the Kharkov Polytechnic Institute. Series Dynamics and strength of machines]. Kharkiv., 2015. № 57 (1166). P. 11-14.
16. Joon Ahn Young Approximation of circular arcs and offset curves by Bézier curves of high degree Ahn Young Joon. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 167, № 2. P. 405–416.
17. Breslavsky D.V. *Deformuvannya ta dovgotryvala micnist' konstruktivnykh elementiv yadernykh reaktoriv*. [Deformation and long term strength of structural elements of nuclear reactors] Kharkiv, Madrid, 2020. 249 p.
18. Edwards, H.M. A normal form for elliptic curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, July 2007. P. 393–422.
19. Bernstein, D.J. Faster Addition and Doubling on Elliptic Curves D.J. Bernstein, T. Lange. *Advances in Cryptology ASIACRYPT'2007 (Proc. 13th Int. Conf. On the Theory and Application of Cryptology and Information Security*. Kuching, Malaysia. December 2–6, 2007), 2007.
20. Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: University press, 1994. 556 p.
21. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam. London: North-Holland Publishing, 1969. – 822 p.
22. Hayhurst D.R. The use of continuum damage mechanics in creep analysis and design. D.R. Hayhurst. *Journal Of Strain Analysis For Engineering Design*. 1994. Vol. 29 (3). P. 233–241.
23. Dyson B.F., McLean M. Micromechanism-quantification for creep constitutive equations. IUTAM Symposium on Creep in Structures / Ed.: S. Murakami, N. Ohno. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 3–16.

References (transliterated)

1. Li Z. et al. *A database of mechanical properties for multi principal element alloys*. *Chemical Data Collections*. 2023. T. 47. C. 101068.
2. Jitsukawa S. et al. Development of an extensive database of mechanical and physical properties for reduced-activation martensitic steel F82H. *Journal of Nuclear Materials*. 2002. T. 307. C. 179–186.
3. Kimura A. et al. *Recent progress in reduced activation ferritic steels R&D in Japan*. Nuclear fusion. 2003. T. 43. №. 10. C. 1246.
4. Sakai T. et al. Statistical fatigue properties of SCM435 steel in ultra-long-life regime based on JSMS database on fatigue strength of metallic materials. *International journal of fatigue*. 2006. T. 28. №. 11. C. 1486–1492.

Надійшла (received) 11.12.2023

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khp.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Хорошун Андрій Сергійович (Khoroshun Andriy) – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: a.s.khoroshun@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4369-137X>

Сенько Альона Володимирівна (Senko Alyona) – доктор філософії, старший викладач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Alyona.Senko@khp.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9961-7419>

Татарінова Оксана Андріївна (Tatarinova Oksana) – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Oksana.Tatarinova@khp.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3090-8469>

Ю. М. АНДРЕЄВ, В. Л. ДЗЮБА

УДОСКОНАЛЕНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РОБОТОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ У ССКА КІДИМ

У роботі представлені результати досліджень аналітичного алгоритму побудови системи лінійних рівнянь для визначення рушійних сил і моментів у ланках робототехнічних пристроїв довільної структури під час руху. Цей алгоритм реалізується як аналітичний алгоритм у спеціальній системі комп'ютерної алгебри (ССКА) КіДиМ, на основі якого формуються чисельні розрахунки зазначених сил та моментів у процесі виконання робочих процесів, позиціонування механізмів у необхідні положення, паркувальні переміщення тощо. Програмний комплекс КіДиМ служить для вирішення завдань механіки широкого класу дискретних механічних систем довільної структури та виду рухів його ланок для розрахунків інженерної та наукової спрямованості. Наведено теоретичне обґрунтування розробленого нового підходу, аналітичний та чисельний доказ його ефективності з погляду процесу автоматичного отримання розділених рівнянь, обчислювальної ефективності та точності результатів. Пропонований алгоритм є результатом розвитку реалізованого раніше в ССКА КіДиМ аналітичного за цілями алгоритму. На відміну від реалізованого раніше алгоритму, який формує вирішальну систему рівнянь після побудови рівнянь динаміки шляхом їх аналітичних перетворень, новий алгоритм вбудовується у процес формування рівнянь динаміки – здійснює сортування елементів моделі – інерційні, дисипативні, пружні та силові елементи відомих сил та моментів формують праву частину, а силові елементи з невідомими силами і моментами формують матрицю лівої частини рівнянь, що розв'язують обернену задачу динаміки. У статті дано порівняльний аналітичний висновок одного та іншого алгоритму і показано збіг одержуваних рівнянь. Також на прикладах розрахунків оберненої задачі динаміки портального крана та двох 6-ти ступеневих маніпуляторів показані переваги нового підходу.

Ключові слова: обернені задачі динаміки, рівняння динаміки роботів, розрахунки рушійних сил та моментів складних механізмів.

The paper presents the results of studies of an analytical algorithm for constructing a resolving system of linear equations to determine the driving forces and moments in the links of robotic devices of arbitrary structure during movement. This algorithm is implemented as an analytical algorithm in a special computer algebra system (SCAS) KiDiM, on the basis of which numerical calculations of the specified forces and moments are generated in the process of performing work processes, positioning mechanisms in the required positions, parking movements, etc. The KiDiM software package is used to solve mechanics problems of a wide class of discrete mechanical systems of arbitrary structure and type of motion for engineering and scientific calculations. A theoretical justification for the developed new approach, analytical and numerical proof of its effectiveness from the point of view of the process of automatically obtaining resolving equations, computational efficiency and accuracy of results are presented. The proposed algorithm is the result of the development of an algorithm that was previously implemented in SCAS KiDiM and was similar in purpose. Unlike the previously implemented algorithm, which generates a resolving system of equations after constructing the dynamic equations, the new algorithm is built into the process of generating dynamic equations - it sorts the model elements - inertial, dissipative, elastic and force elements of known forces and moments form the right side, and force elements with unknown forces and moments, they form a matrix of the left side of equations that solve the inverse problem of dynamics. The article gives a comparative analytical conclusion of one and another algorithm and shows the coincidence of the resulting equations. Also, using examples of calculations of the inverse problem of the dynamics of a portal crane and two 6-degree manipulators, the advantages of the new approach are shown.

Key words: inverse problems of dynamics, equations of robot dynamics, calculations of driving forces and moments of complex mechanisms.

Вступ. Розв'язання обернених задач динаміки в процесі проектування, доведення, експлуатації, для цілей управління складних механізмів, широким класом яких в сучасному машинобудуванні є робототехнічні системи, має велике значення. Стосовно термінів «пряма та обернена (зворотна) задача динаміки» існує деяка плутанина у вітчизняній літературі. Більш поширене використання мають терміни «перша та друга задачі» [1]. Тут будемо дотримуватися термінології, яка поширена в сучасній робототехніці [2]. Під оберненою задачею динаміки будемо розуміти «знайти за заданими законами зміни узагальнених координат діючі у зчленуваннях рушійні сили і моменти». Такі задачі потрібно ставити і розв'язувати дуже часто в умовах зміни структури і параметрів механізмів в процесі проектування, зміни умов використання їх при експлуатації, на початковому етапі розробки систем управління. Тому дуже актуально мати можливість зручного ефективного вирішення поставленої проблеми.

В статті розглядається питання поліпшення аналітичного комп'ютерного алгоритму автоматичної побудови системи лінійних рівнянь для обчислення

рушійних сил і моментів в механізмах довільної складності [3–5], який реалізовано в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ).

ССКА КіДиМ – це спеціально розроблений комплекс програм [6–8] для розв'язання цілої низки задач механіки – прямої і оберненої кінематики, прямої і оберненої динаміки, статички – визначення врівноважуючих сил та моментів, розрахунку положень рівноваги, вільних та вимушених коливань, деяких задач аналізу та синтезу механічних систем та ін. Клас механічних систем, що тут розглядається достатньо широкий – це дискретні механічні системи, що описуються узагальненими та псевдокоординатами з будь-якими в'язами, в тому числі – нестационарними, неутримуючими, неголономними [8].

Нижче буде наведено аналітичний вивід нового алгоритму, показано еквівалентність за результатами складання розв'язувальної системи лінійних рівнянь та на чисельних розрахунках оберненої задачі динаміки плоскої моделі портального крана та 6-ти ступеневих просторових маніпуляторів, приведені оцінки переваг нового алгоритму відносно раніше реалізованого [3–5].

Постановка задачі. В статті пропонується альтернативний існуючому в ССКА КіДиМ і функціонуючий там же для розв'язання обернених задач механічних систем того ж класу, що розглядаються там. Але він потребує меншу кількість математичних операцій при побудові тієї ж самої системи лінійних рівнянь що розв'язують задачу. Крім того він будує матрицю лівої частини і вектор правої частини вказаної системи не після отримання рівнянь динаміки, а в процесі побудови таких рівнянь. Це приводить до більш швидкої роботи алгоритму.

Ключова відмінність ССКА КіДиМ від більшості інженерних та наукових програмних пакетів в галузі механіки полягає в тому, що у вихідних даних на аналітичному рівні записується механічна модель машини, механізму, або процесу шляхом запису *елементів моделі*, як складових механічної моделі – її інерційних, силових, пружних і дисипативних властивостей. Що дозволяє легко змінювати структуру і параметри моделі. Після вводу такої інформації вбудована система комп'ютерної алгебри діагностує вхідну інформацію і отримує математичну модель процесу – систему диференціальних, або алгебраїчних рівнянь, що розв'язують конкретну задачу механіки.

Таким чином, задача, розв'язанню якої присвячена ця стаття є – на базі заданої механічної моделі у вигляді множини відповідних елементів отримати аналітичний алгоритм побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сил і моментів, що є рушійними для механізму, який розглядається і досліджується в конкретній задачі. Довести його еквівалентність і переваги за результатами наведених розрахунків.

Обернена задача динаміки в літературі відмічається математично некоректно поставленою [9], бо передбачає чисельне диференціювання законів руху. Питанням розв'язання задач з урахуванням їх математичної некоректності присвячені роботи акад. Тихонова А. Н. (см., наприклад, роботу [10]). Крім запропонованих в указаних роботах методів для вирішення такої проблеми, нами пропонується ще один.

Розв'язання обернених задач для механічних систем, що тут розглядаються, починається з розв'язання оберненої задачі кінематики [11-16], яка за заданим рухом вихідних ланок механізму визначає закони зміни узагальнених координат. Використання тут методів комп'ютерної алгебри дає змогу отримати розв'язання оберненої задачі кінематики в аналітичному вигляді [11, 12].

Некоректність постановки обернених задач динаміки обумовлена тим, що в процесі розв'язання використовується чисельне диференціювання законів зміни узагальнених координат. А саме це і дає математичну некоректність задачі [10].

Використання ж законів зміни узагальнених координат в аналітичному вигляді в основному знімає таку некоректність при розв'язанні оберненої задачі динаміки знову ж такі методами комп'ютерної алгебри, бо використовується аналітичне диференціювання.

Більш того, під час розв'язання оберненої задачі кінематики існує можливість методами комп'ютерної алгебри отримати не тільки закони зміни узагальнених координат, а і закони зміни їх швидкостей та прискорень. Тоді взагалі відпадає необхідність у диференціюванні узагальнених координат в оберненої задачі динаміки.

Аналітичне представлення механічної моделі в ССКА КіДиМ. Як вже було сказано вище, однією з ключових переваг методу отримання рівнянь механіки (для динаміки, статички, кінематики, кінетостатички, коливань), реалізованого за допомогою вбудованої системи комп'ютерної алгебри в КіДиМ, є представлення механічної моделі процесу як сукупності елементів – силових, інерційних, пружних та дисипативних. КіДиМ автоматично будує математичну модель процесу, представляючи динамічні рівняння для голономних або неголономних дискретних механічних систем твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{ин}}}^T m_i \ddot{\tilde{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\tilde{M}_i^{\text{ин}}}^T (\mathbf{J}_{C_i} \dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \tilde{\omega}_i^{(i)}) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (1)$$

де $\mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{ин}}}^T, \mathbf{W}_{\tilde{M}_i^{\text{ин}}}^T, \mathbf{W}_D^T, \mathbf{W}_C^T, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції i -го тіла ($i=1, 2, \dots, n$), дисипативних, пружних та інших активних сил системи відповідно; $\tilde{r}_{C_i}, \tilde{\omega}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас та кутова швидкість i -го тіла (радіус-вектор центру мас задається як функція узагальнених координат в абсолютній СК, а кутова швидкість як функція узагальнених координат та узагальнених швидкостей – у зв'язаній головній центральній СК i -го тіла; $m_i, \mathbf{J}_{C_i}$ – маса та діагональний тензор інерції i -го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $[\mathbf{D}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами дисипації, $\boldsymbol{\beta}$ – матричний вектор, що об'єднує швидкості (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти в'язкого тертя; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами жорсткості, $\boldsymbol{\gamma}$ – матричний вектор, що об'єднує деформації (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти пружності; $\mathbf{P}$ – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проекції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Аналітичні вирази структурних матриць програмно будуються аналітичним диференціюванням: для сил інерції – декартових координат радіус-вектору центру мас i -го тіла $\tilde{r}_{C_i}$ по вектору узагальнених координат, або – вектора швидкості центра мас i -го тіла по вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{ин}}}^T = \left[\frac{\partial \tilde{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{v}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \left[\frac{\partial \ddot{\tilde{r}}_{C_i}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right]$; для моментів сил інерції – вектора кутової швидкості i -го

тіла $\vec{\omega}_i^{(i)}$ по вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_{\dot{M}_i^{in}} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$; для дисипативних сил – вектора $\dot{\mathbf{p}}$ по вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_D = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$; пружних сил – вектора γ по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_C = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{q}} \right]$; активних сил системи – вектора координат силових елементів $\mathbf{p}$ по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_P = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$.

Розв’язання обернених задач динаміки. Розв’язання таких задач в ССКА КіДиМ засновано на тому факті, що невідомі сили і моменти, що діють в зчленуваннях машин і механізмів, входять до правих частин рівнянь динаміки (1) лінійно. Права частина $\mathbf{W}_P^T \mathbf{P}$ таких рівнянь містить вектор $\mathbf{P}$, куди входять як відомі так і невідомі сили та моменти, тому цей вираз можна розділити на дві частини:

$$\mathbf{W}_P^T \mathbf{P} = [\mathbf{W}_F \quad \mathbf{W}_R] \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_F}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{F} + \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{R}, \quad (2)$$

де $\mathbf{F}$ – відомі сили, $\mathbf{R}$ – невідомі, $\mathbf{W}_F$, $\mathbf{W}_R$ – блоки матриці $\mathbf{W}_P^T$, які визначаються через похідні координат силових елементів по узагальненим координатам.

Тому, для того щоб знайти невідомі компоненти $\mathbf{R}$ вектора $\mathbf{P}$ необхідно перетворити рівняння (1) до системи алгебраїчних рівнянь виду

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{B}. \quad (3)$$

Для подальшого переписемо вираз (1) як матричний вектор [2]:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_i^{in}}^T m_i \ddot{\mathbf{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i^{in}}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\vec{\omega}}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \gamma - \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} = 0 \quad (4)$$

Відповідно до існуючого реалізованого в ССКА КіДиМ алгоритму система рівнянь (3) отримується з системи (4) за дві дії: 1) в рівняння (4) підставляється $\mathbf{R} = 0$ – визначається, таким чином, права частина (3) $\mathbf{B} = \mathbf{U}|_{\mathbf{R}=0}$; 2) вектор рівнянь (4) диференціюється за вектором невідомих $\mathbf{R}$ – отримується, таким чином, квадратна матриця лівої частини (3):

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial \mathbf{U} \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{R}} = -\mathbf{W}_P^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{R}}, \quad (5)$$

Матриця $\mathbf{A}$ буде залежати від узагальнених координат, так як від них залежать елементи структурної матриці сил $\mathbf{W}_P$. Вектор $\mathbf{B}$ буде залежати від узагальнених координат, їх швидкостей та прискорень, а також від інерційних, дисипативних та пружних параметрів дискретної моделі системи.

Таким чином, по заданому закону зміни у часі узагальнених координат $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ ССКА КіДиМ для

кожного моменту часу розраховує матрицю $\mathbf{A}$ та вектор $\mathbf{B}$, завдяки яким визначає невідомі сили:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (6)$$

Альтернативний алгоритм розв’язання оберненої задачі динаміки. Наведений вище алгоритм має дещо штучний характер, оснований на формальних діях – спочатку побудові рівнянь динаміки, їх диференціюванню по невідомим силам, та підстановці в них нульових значень невідомих сил. Всі операції виконуються після повної побудови рівнянь. Формування рівнянь (1) відбувається шляхом перегляду списку всіх елементів механічної моделі. Пропонується альтернативний аналітичний алгоритм, який будує рівняння (3) в процесі формування рівнянь (1). Він більш обґрунтований з погляду механіки і являє собою сортування силових елементів за відомими та невідомими силами ще під час побудови рівнянь.

Знайдемо невідомі відповідно до запропонованого алгоритму. Його ідея полягає в тому, щоб об’єднати в вектор $\mathbf{B}$ всі складові лівої частини рівнянь (1), які не містять невідомих сил, – це всі складові, що породжуються інерційними, дисипативними, пружними елементами механічної моделі, та тими силовими, що не містять невідомих. З протилежного боку, з елементів, що містять невідомі, будуватиметься матриця $\mathbf{A}$ лівої частини (4).

В переважній більшості випадків вектор $\mathbf{R}$ є безпосередньо сукупністю невідомих, причому кожний елемент його – це окрема невідома – модуль сили, або моменту, що визначаються. Але можуть бути випадки, коли невідомі можуть входити в декілька компонентів цього вектора. При цьому в будь-якому випадку, лінійність залежності цього вектора від невідомих зберігається. Тому розглянемо цей більш узагальнюючий випадок. Нижче буде наведено приклад такого випадку.

Позначимо вектор невідомих $\mathbf{X}$, тоді можемо записати останній член виразу (2):

$$\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] \mathbf{X}, \quad (7)$$

Таким чином, матрицю $\mathbf{A}$ з виразу (5) можна визначити за формулою:

$$\mathbf{A} = -\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right]. \quad (8)$$

Для вектора $\mathbf{B}$ отримаємо такий вираз

$$\mathbf{B} = -\left(\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_i^{in}}^T m_i \ddot{\mathbf{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i^{in}}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\vec{\omega}}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \gamma - \left[\frac{\partial \mathbf{p}_F}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{F} \right).$$

Тестування та розрахунки за наведеним алгоритмом. Як приклад застосування запропонованого алгоритму, розглянемо схему стрілового пристрою порталного крана (рис.1).

Тут показано: FED – «хобот», EL – відтяжка, NLP – коромисло, P – противага (200 т), Q – вантаж (160 т), AD – стріла, K – приводна шестерня, CG – зубчаста рейка.

Шляхом обертання приводної шестерні K зубчаста рейка CG переміщається, це змушує змінюватися геометрії стрілового механізму, що призводить до зміни вильоту стріли крана.

Для моделювання використовується жорстка плоска стрижнева конструкція, що розташована в вертикальній площині. Довжини ланок, та їх маси задано. В системі одна узагальнена координата, за яку обрана відстань $s=CG$.

В завданні треба з урахуванням ваг ланок механізму і заданого закону зміни відстані CG (що забезпечує початок і кінець руху крана з нульовою швидкістю) знайти величину зусилля на рейки $S_G(t)$.

Задано,

$$s = 0,5 \left[(s_0 + s_1) + (s_0 - s_1) \cos \frac{\pi t}{\Delta t} \right],$$

де $s_0=7,1$ м, $s_1=2,26$ м – початкова і кінцева відстань CG , Δt – тривалість переносу вантажу.

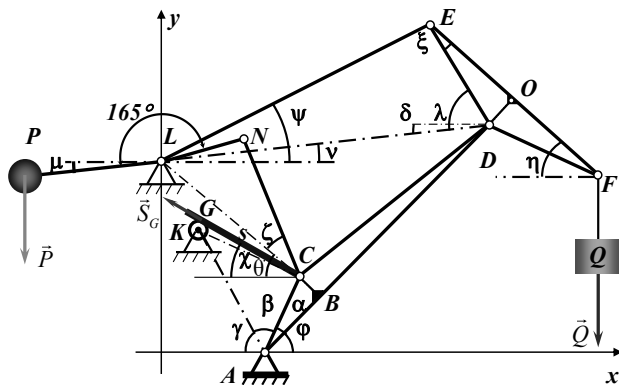


Рис. 1 – Стріловий пристрій портального крана

Привести повністю параметри і опис механічної моделі стрілового пристрою тут не уявляється можливим. Позначимо тільки найбільш цікаві моменти.

Послідовно розглядаючи трикутники, з яких складається фігура пристрою, за теоремами синусів, косинусів та Піфагора можна визначити всі кути в них та координати всіх характерних точок через довжину $s=CG$ – узагальнену координату системи [3]. В якості сил враховуємо сили ваги ланок, вантажу та противаги, прикладених в їх центрах тяжіння, і невідому силу $\vec{S}_G$, що прикладена до рейки з боку шестерні. Ця сила описується двома силовими елементами в механічній моделі КіДиМ, що задають її дві проекції на осі координат

$$P.xC = -S_G \cos(\chi); \quad P.yC = S_G \sin(\chi).$$

Як бачимо, тут як раз і реалізується випадок, що був розглянутий вище і привів до формули (8). Отримаємо явний вигляд матриці A (вектор B привести тут не має можливості через громіздкість виразу).

Невідома тут одна, тому $\mathbf{X} = S_G$, тоді вектор

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -S_G \cos \chi \\ S_G \sin \chi \end{bmatrix}, \text{ вектор } \mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial s} \right]^T = \frac{\partial \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial s} & \frac{\partial y_C}{\partial s} \end{bmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S_G} \right] = \frac{\partial}{\partial S_G} \begin{bmatrix} -S_G \cos \chi \\ S_G \sin \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \chi \\ \sin \chi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] = -\frac{\partial x_C}{\partial s} \cos \chi + \frac{\partial y_C}{\partial s} \sin \chi.$$

Легко показати, що старий алгоритм дає теж саме.

На рис. 2 дано графік зміни шуканого зусилля на шестерні K (див. рис. 1), а рис. 3 демонструє якість механізму – можна побачити, що ордината точки підвісу вантажу на горизонтальному переміщенні в 26 метрів змінюється всього на 18 сантиметрів.

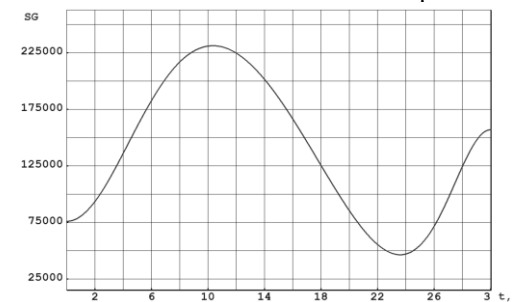


Рис. 2. Закон зміни зусилля на рейки CG

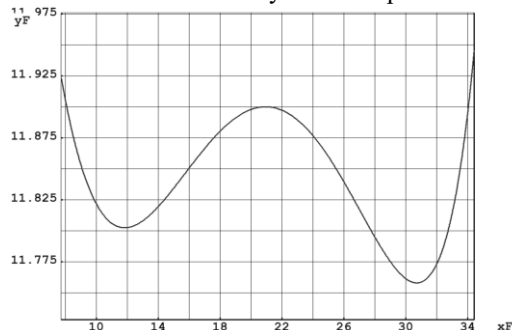


Рис. 3. Траєкторія точки підвісу вантажу F

Розглянемо другий приклад. Визначимо моменти в зчленуваннях маніпулятора ПУМА (рис. 4), що забезпечать рисування в вертикальній площині захватом епіциклоїди (рис. 7а, розміри – в м).

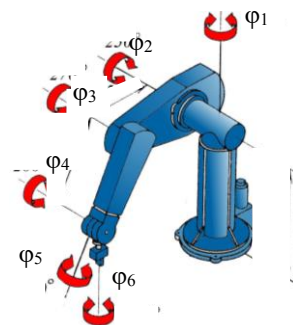


Рис. 4 – Маніпулятор ПУМА (а)

В механізмі – шість степенів свободи, для рисування епіциклоїди треба три. Тому за узагальнені координати можна взяти перші три кута – $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Запис моделі маніпулятора засобами КіДиМ наведено в статті [6] (з підстановкою $\varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=0$).

Рівняння епіциклоїди (див. рис. 4б)

$$\begin{aligned} y_C &= \lambda r \cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) - (R+r)\cos\varphi, & x_C &= 0,4\text{ м}, \\ z_C &= 1 - \lambda r \sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) + (R+r)\sin\varphi, \\ \varphi &= \pi t, \quad \lambda = 3, \quad R = 0,3\text{ м}, \quad r = -0,1\text{ м} \quad t \in [0, 2]c. \end{aligned} \quad (9)$$

Для визначення законів зміни узагальнених координат – кутів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ спочатку була розв’язана обернена задача кінематики динамічним методом. Фіктивно в модель була введена пружина, яка стягувала кінець захвату до потрібної траєкторії (9) – і шляхом розв’язання прямої задачі динаміки отримано закони зміни кутів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, які представлено на рис. 5.

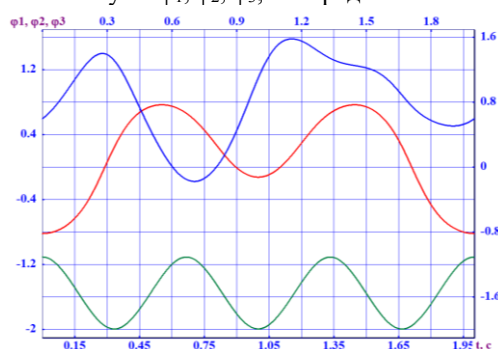


Рис. 5 – Закони зміни кутів
 φ_1 (червона крива), φ_2 (синя), φ_3 (зелена)

Потім – двома описаними тут алгоритмами була розв’язана обернена задача динаміки вже без фіктивної пружини, але при включенні в модель крутних моментів M_1, M_2, M_3 на кутах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Обома методами отримані ідентичні результати, що наведені на рис. 6.

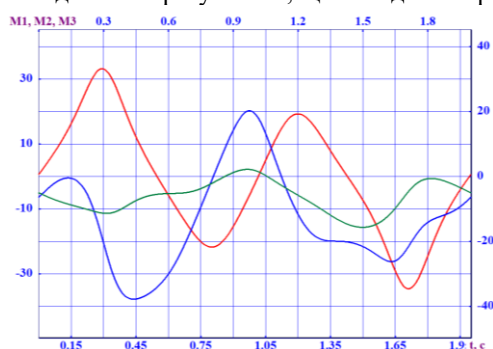


Рис. 6 – Закони зміни моментів
 M_1 (червона крива), M_2 (синя), M_3 (зелена)

Розглянемо третій приклад. Визначимо моменти в зчленуваннях маніпулятора Стандфордського університету (рис. 8), що забезпечать рисування в вертикальній площині захватом астріїди (рис. 7б, розміри – в м). Рівняння астріїди

$$y_C = R \cos^3 t, \quad x_C = 0,4\text{ м}, \quad z_C = R \sin^3 t, \quad R = 0,6\text{ м}.$$

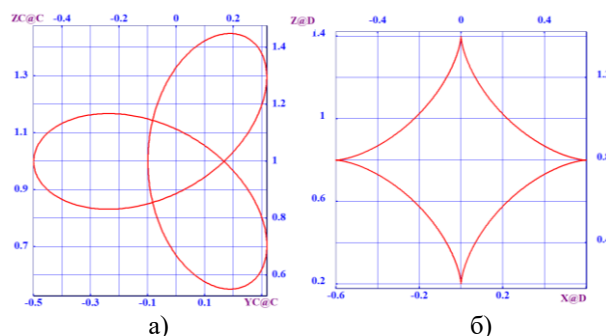


Рис. 7 – Епіциклоїда (а) і астріїда (б)

В механізмі теж шість степенів свободи, для рисування астріїди треба три. Тому за узагальнені координати можна взяти перші два кути – θ_1, θ_2 , та довжину частини, що телескопічно висувається, позначим її d_{32} (див. рис. 8).

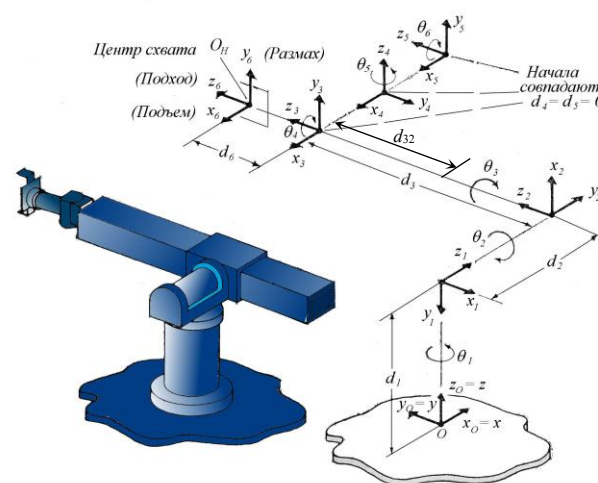


Рис. 8 – Маніпулятор Стандфордського університету

Для просторових систем записувати вручну інерційні елементи моделі дуже складно, тому для опису інерційності такого маніпулятора використано записи «тверде тіло» [6], які обробляються препроцесором КіДиМ, що створює з них відповідні елементи

К	$S_z(d_{11}), R_z(\theta_1)$	$J_z(J_{1z});$
П~К	$S_z(d_{12}), S_x(d_{21}), R_x(\theta_2)$	$m_2, J_{2x}, J_{2z}, J_{2y};$
Л~П	$S_x(d_{22}), S_y(d_{32})$	$m_3, J_{3x}, J_{3z}, J_{3y};$
З~Л	$S_y(L_2)$	$m_4, J_{4z}, J_{4x}, J_{4y};$
С~З	$S_y(d_4)$	$m_5, J_{5x}, J_{5z}, J_{5y};$

Геометричні розміри:

$$d_{11} = 0,5\text{ м}, d_{12} = 0,25\text{ м}, d_{21} = 0,25\text{ м}, d_{22} = 0,5\text{ м}, d_{31} = d_{22}, L_2 = 0,3\text{ м}, d_4 = 0,1\text{ м}, a = 0,4\text{ м}, b = 0,4\text{ м}.$$

Інерційні параметри:

$$\begin{aligned} J_{1z} &= 5 \text{ кгм}^2; \\ m_2 &= 10 \text{ кг}, J_{2x} = 1 \text{ кгм}^2, J_{2y} = 2 \text{ кгм}^2, J_{2z} = 3 \text{ кгм}^2; \\ m_3 &= 2 \text{ кг}, J_{3x} = 0,5 \text{ кгм}^2, J_{3y} = 1 \text{ кгм}^2, J_{3z} = 1 \text{ кгм}^2; \\ m_4 &= 1 \text{ кг}, J_{4x} = 0,1 \text{ кгм}^2, J_{4y} = 0,2 \text{ кгм}^2, J_{4z} = 0,3 \text{ кгм}^2; \\ m_5 &= 0,5 \text{ кг}, J_{5x} = 0,05 \text{ кгм}^2, J_{5y} = 0,1 \text{ кгм}^2, J_{5z} = 0,3 \text{ кгм}^2. \end{aligned}$$

Задача розв’язувалась аналогічно другого прикладу. На рис. 9 та 10 показано отримані результати

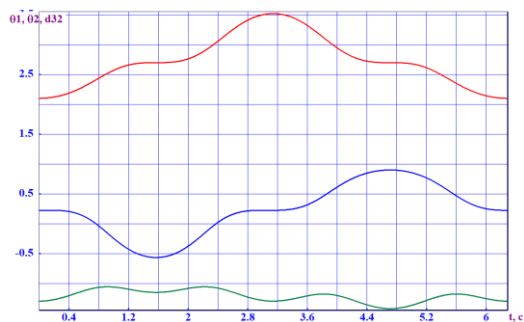


Рис. 9 – Законы зміни узагальнених координат – θ_1 (червона крива), θ_2 (синя), d_{32} (зелена)

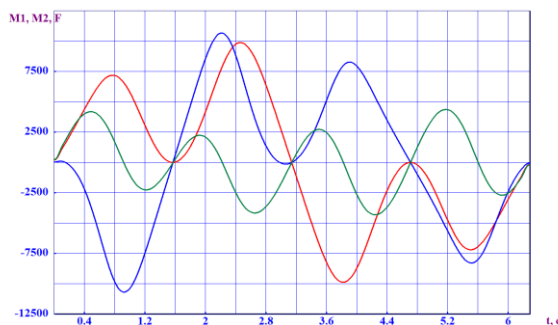


Рис. 10 – Законы зміни моментів M_1 (червона крива), M_2 (синя), та сили F_{32} (зелена)

Список літератури

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. // К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехніка // М.: Мир – 1989. – 621 с.
3. Андреев Ю. М. Универсальный алгоритм решения задач кинестатики и его применение для расчетов портального крана // Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве : 6-я Междунар. науч.-техн. конф. : труды. — Харьков : ХНПК «ФЭД», 2002. — С. 297—300.
4. Андреев Ю. М. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — Харьков, 2007. — № 2/4 (26). — С. 10–13.
5. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел / Ю. М. Андреев // Надежность и долговечность машин и сооружений : междунар. науч.-техн. сбор. НАН Украины. — К.: ИПП им. Писаренко Г. С., Ассоциация «Надежность машин и сооружений», 2006. — Вып. 26. — С. 11–18.
6. Андреев Ю.М., Морачковский О.К. О динамике голономных систем твердых тел. // Прикладная механика. 2005. Т. 41, №7. С. 130–138.
7. Андреев Ю. М. Векторно-матричная форма общего уравнения динамики в обобщенных и псевдокординатах // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ» : зб. наук. пр. : Динаміка та міцність машин. — Харків : НТУ «ХПІ», 2005. — № 20. — С. 13–18.
8. Андреев Ю. М., Ларин А. А. Метод структурных матриц в механике машин (история вопроса) // Механіка та машинобудування. — 2012. — Вип. 1. — С. 129–137.
9. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера-Лагранжа // Прикл. механіка. — 2006. — Т. 42, №9. — С. 106–115.
10. Короткий А. И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами, Изв. вузов. Матем., 1995, номер 11, с. 101–124.
11. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач // М.: Наука, 2022. — 284 с.
12. Андреев Ю. М. Алгоритм компенсации возмущений ходьбы двуногого робота решением обратной задачи кинематики // Вісник

НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. — Харків : НТУ «ХПІ», 2020. — № 2 (2020). — С. 14 – 21

13. Ащепкова Н. С. Mathcad in the kinematic and dynamic analysis of the manipulator // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2015. — Vol. 5. — pp. 54–63.

14. Ben-Ari M., Mondada F. Elements of Robotics // Springer Cham. — 2018. — 308p.

15. Baillieul J. Introduction to ROBOTICS mechanics and control // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — pp. 463–464.

16. Bendjilali K. Kinematics-Based Navigation Functions / K. Bendjilali, F. Belkhouche // Advanced Robotics. — 2008. — Vol. 22. — pp. 1243–1264.

17. Kajita S., Hirukawa, H., Harada, K., Yokoi, K. Introduction to Humanoid Robotics // Springer Tracts in Advanced Robotics. — 2014. — Vol. 101.

References (transliterated)

1. Pavlov's'kij M.A. Teoretichna mehanika: Pidruchnik. // K.: Tehnika, 2002. — 512 s.
2. Fu K., Gonsales R., Li K. Robototekhnika // M.: Mir — 1989. — 621 c.
3. Andreev Ju. M. Universal'nyj algoritm reshenija zadach kinestostatiki i ego primenenie dlja raschetov portal'nogo kрана // Fizicheskie i komp'yuternye tehnologii v narodnom hozjajstve : 6-ja Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. : trudy. — Har'kov : HNPK «FJeD», 2002. — С. 297—300.
4. Andreev Ju. M. Chislenno-analiticheskoe reshenie obratnoj zadachi dinamiki diskretnyh sistem // Vostochno-evropejskij zhurnalпередовых технологий. — Har'kov, 2007. — # 2/4 (26). — С. 10–13.
5. Andreev Ju. M., Morachkovskij O. K. Novaja sistema komp'yuternoj algebry dlja issledovaniya kolebanij strukturno-slozhnyh golonomnyh i negolonomnyh sistem tverdyh tel / Ju. M. Andreev // Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzhenij : mezhdunar. nauch.-tehn. sbor. NAN Ukrainy. — K.: IPP im. Pisarenko G. S., Associacija «Nadezhnost' mashin i sooruzhenij», 2006. — Vyp. 26. — С. 11–18.
6. Andreev Ju.M., Morachkovskij O.K. O dinamike golonomnyh sistem tverdyh tel. // Prikladnaja mehanika. 2005. T. 41, #7. S. 130-138.
7. Andreev Ju. M. Vektorno-matrichnaja forma obshhego uravnenija dinamiki v obobshhennyh i psevdokordinatah // Visnik Nac. tehn. un-tu «HPI» : zb. nauk. pr. : Dinamika ta micnist' mashin. — Harkiv : NTU «HPI», 2005. — # 20. — С. 13–18.
8. Andreev Ju. M., Larin A. A. Metod strukturnyh matric v mehanike mashin (istorija voprosa) // Mehanika ta mashinobuduvannya. — 2012. — Vip. 1. — С. 129–137.
9. Andreev Ju. M., Morachkovskij O. K. Komp'yuternoe modelirovanie negolonomnyh sistem tverdyh tel na osnove principa Dalamberta-Lagranzha // Prikl. mehanika. — 2006. — T. 42, #9. — С. 106–115.
10. Korotkij A. I. Obratnye zadachi dinamiki upravljajemyh sistem s raspredelennymi parametrami, Izv. vuzov. Matem., 1995, nomer 11, s. 101–124.
11. Tihonov A.N. Metody reshenija nekorrektnyh zadach // M.: Nauka, 2022. — 284 s.
12. Andreev Ju. M. Algoritm kompensacii vozmushhenij hod'by dvunogo robota resheniem obratnoj zadachi kinematiki // Visnik NTU «HPI». Serija: Dinamika ta micnist' mashin. — Harkiv : NTU «HPI», 2020. — # 2 (2020). — С. 14 – 21
13. Ashhepkova N. S. Mathcad in the kinematic and dynamic analysis of the manipulator // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2015. — Vol. 5. — pp. 54–63.
14. Ben-Ari M., Mondada F. Elements of Robotics // Springer Cham. — 2018. — 308p.
15. Baillieul J. Introduction to ROBOTICS mechanics and control // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — pp. 463–464.
16. Bendjilali K. Kinematics-Based Navigation Functions / K. Bendjilali, F. Belkhouche // Advanced Robotics. — 2008. — Vol. 22. — pp. 1243–1264.
17. Kajita S., Hirukawa, H., Harada, K., Yokoi, K. Introduction to Humanoid Robotics // Springer Tracts in Advanced Robotics. — 2014. — Vol. 101.

Надійшла (received) 13.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Андрєєв Юрій Михайлович (Andriiev Yuriy) – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп’ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: Yurii.Andriiev@khpі.edu.ua.

Дзюба Василь Леонідович (Dziuba Vasyl) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістрант ; м. Дніпро, Україна; e-mail: Vasyl.Dziuba@infiz.khpі.edu.ua.

*М.В. НЕКРАСОВА***ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ПРИ УПРАВЛІННІ ПРОЕКТАМИ**

Показане місце методів теорії ймовірності та математичної статистики в системі загальнонаукових методів управління проектами. Скорочено описано склад основних методів теорії ймовірності та математичної статистики, найбільш затребуваних при управлінні проектами. Також відмічена роль методу Монте-Карло, бо від призначений для врахування ризику в процесі кількісного аналізу характеристик проекту та прийняття управлінських рішень. Показано можливості управління проектами, які забезпечують методи теорії ймовірності та математичної статистики при управлінні проектами з методології Project Management Body of Knowledge (PMBoK). Показано, що методи теорії ймовірностей та математичної статистики при управлінні проектами з методології PMBoK найбільш потрібні при реалізації наступних груп процесів управління проектом: група процесів планування проекту, група процесів моніторингу та управління проектом.

Ключові слова: методи, теорія ймовірностей, математична статистика, керування проектами

The place of methods of probability theory and mathematical statistics in the system of general scientific methods of project management is shown. The composition of the main methods of probability theory and mathematical statistics, most in demand in project management, is briefly described. The role of the Monte Carlo method is also noted, because it is designed to take risk into account in the process of quantitative analysis of project characteristics and management decision-making. The possibilities of project management are shown, which provide the methods of probability theory and mathematical statistics in project management from the Project Management Body of Knowledge (PMBoK) methodology. It is shown that the methods of probability theory and mathematical statistics in project management from the PMBoK methodology are most needed in the implementation of the following groups of project management processes: a group of project planning processes, a group of project monitoring and management processes.

Keywords: methods, probability theory, mathematical statistics, project management

Вступ. В час прискорення науково-технічного прогресу, що супроводжується скороченням життєвого циклу продукції (товарів, робіт, послуг) та підвищенням ступеня індивідуалізації продукції (розширенням асортименту) проектний підхід знаходить дедалі ширше застосування. Ускладнення ринкових умов господарювання в умовах ринку, що динамічно розвивається, пред'являє все більш серйозні вимоги до складних процесів управління проектами.

Методи моделювання знайшли широке застосування в управлінні проектами, оскільки під час управління проектами вирішуються складні проблеми, які потребують одночасного використання системного та комплексного підходів.

Вирішення проблем управління проектами сьогодні неможливе без застосування моделей, під якими розуміється уявлення систем, у яких передбачається вирішувати проблеми, у вигляді, що відбиває властивості, взаємозв'язок, структурні і функціональні параметри цієї системи, з метою функціонування цієї системи, з одного боку, й у вирішенні виявлених проблем, з іншого боку.

Аналіз останніх досліджень та літератури. Під час проведення зазначених досліджень було враховано відомі роботи в області методів управління проектами [1-4]. Розглядаючи специфіку проектного управління за сучасних умов можна зазначити, що при зростанні обсягу проектів та кількості використовуваних людських ресурсів управління ними стає все більш схожим на складне інженерне завдання (яке потім поступово стає проектом -

вищого рівня. Складна конструкція арсеналу методів управління проектами будується на фундаменті загальнонаукової методології. Підходи, способи, прийоми, за допомогою яких здійснюються різні види управлінських робіт, як конкретні методи управління характеризуються великою різноманітністю, відображаючи множинність, різну складність та склад управлінських завдань, які вирішуються в рамках проектів.

Мета статті. Метою даного дослідження є розгляд питань використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики при управлінні проектами.

Постановка проблеми. Моделювання під час управління проектами зазвичай здійснюється у кілька етапів, у яких уточнюються цілі управління, здійснюється постановка завдань, конструється модель, проводиться її теоретичний і (чи) експериментальний аналіз на достовірність, здійснюється практична реалізація у межах проекту, проводиться наступний аналіз отриманих даних, після чого (у разі потреби) здійснюється коригування шляхом введення в модель додаткових факторів та даних, обмежень, критеріїв тощо.

Матеріали і методи досліджень. Методи теорії ймовірності та математичної статистики являють собою математичні методи, що дозволяють вивчати закономірності випадкових явищ (подій та величин), їх властивості та операції над ними.

Основні методи теорії ймовірностей представлені у табл. 1.

Таблиця 1 - Основні методи теорії ймовірностей

№	Назва методу	Основні характеристики методу
1	Класичний метод (Визначення результатів по бінарному принципом «так» або «ні»)	Передбачає визначення ймовірності (P) події A через відношення числа сприятливих для цієї події результатів (m) до загальної кількості всіх рівноможливих несумісних елементарних результатів (n), що утворюють повну групу: $P(A) = m/n$
2	Геометричний метод	Передбачає визначення ймовірності влучення точки в задану (допустиму) область значень, що подається в вигляді відрізка, частини площини, частини об'єму декартової системи координат тощо. У разі одновимірного простору розглядається відрізок l, що є складовою відрізка L, ймовірність попадання точки на відрізок l за умови, що ймовірність влучення точки на відрізок L дорівнює одиниці, визначається співвідношенням: $P=l/L$
3	Метод оцінки ймовірності суми спільних подій	Каже, що ймовірність суми, наприклад, двох спільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій за вирахуванням ймовірності їхньої спільної появи: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$. Для випадку трьох спільних подій ймовірність їх спільної появи буде оцінена як: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-(AB)-(A \cdot C)-(B \cdot C)+P(A \cdot B \cdot C)$
4	Метод оцінки ймовірності суми несумісних подій	Каже, що ймовірність суми, несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)$
5	Метод ймовірності добутку подій	Оцінка ймовірності появи, наприклад, двох залежних подій (A і B) дорівнює добутку ймовірностей появи однієї з подій (A) на ймовірність появи іншого (B), визначувану за умови, що сталася перша подія (A) (умовна ймовірність B/A): $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A)=P(B) \cdot P(A/B)$. У разі множини подій ймовірність їхнього твору дорівнює добутку ймовірностей цих подій, виходячи з того, що ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови здійснення попередніх подій: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1, A_2 \dots A_{n-1})$
6	Метод визначення ймовірності повної групи подій	Якщо подія A може з'явитися разом з одним із утворюють повну групу попарно несумісних подій H ($H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$), іменованих гіпотезами, то можливість настання події A обчислюється як сума творів ймовірностей реалізації кожної гіпотези H_i на ймовірність настання події A за цієї гіпотези: $P(A;H)=P(H_1) \cdot P(A/H_1)+\dots+P(H_n) \cdot P(A/H_n)$
7	Метод Бернуллі	Призначений для проведення незалежних випробувань, кількість яких (n) має бути заздалегідь відома, а результати є бінарним результатом: успіх «так» або невдача «ні». Ймовірність того, що в n випробуваннях успіх здійсниться m разів, а невдача трапиться (n-m) разів $P_n(m)$, розраховується за формулою: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, де – C_n^m число поєднань з n по m, що визначається $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, співвідношенням: p – ймовірність успіху, q – ймовірність невдачі, де $p+q=1$

Основні методи математичної статистики, що використовуються при управлінні проектами, наведені в табл. 2.

Таблиця 2 – Основні методи математичної статистики, які використовуються при управлінні проектами

№	Назва методу	Основні характеристики методу
1	Метод однофакторного кореляційного аналізу	Полягає у встановленні факту та рівня залежності досліджуваної випадкової величини від впливу фактора x на основі розрахунку коефіцієнта парної кореляції $r(y;x)$: $r(y,x) = \frac{\sum (y - \bar{y}) \cdot (x - \bar{x})}{\sqrt{\sum (y - \bar{y})^2 \cdot \sum (x - \bar{x})^2}}$ Таким чином коефіцієнт кореляції $r(y;x)$ демонструє ступінь синхронності зміни поточного результату відносно середнього значення результату при зміні впливу x щодо середнього результату.
2	Метод багатофакторного кореляційного аналізу	Полягає у встановленні факту та рівня залежності досліджуваної випадкової величини у кожного з множини факторів, що впливають x на основі розрахунку коефіцієнтів приватної кореляції, приклад яких для двофакторної моделі наведено нижче: $r(y, x_1/x_2) = \frac{r(y, x_1) - r(y, x_2) \cdot r(x_1, x_2)}{\sqrt{(1 - r^2(y, x_2)) \cdot (1 - r^2(x_1, x_2))}}$ $r(y, x_2/x_1) = \frac{r(y, x_2) - r(y, x_1) \cdot r(x_1, x_2)}{\sqrt{(1 - r^2(y, x_1)) \cdot (1 - r^2(x_1, x_2))}}$ де $r(y, x_1/x_2)$ – коефіцієнт часткової кореляції функції y та фактора x_1, що впливає, при елімінуванні фактору x_2; $r(y, x_2/x_1)$ – коефіцієнт часткової кореляції функції y та фактора x_2, що впливає, при елімінуванні фактору x_1;
3	Метод однофакторного регресійного аналізу	Дозволяє шляхом побудови регресійної моделі оцінити за отриманою функціональною залежністю результативного показника Y від значення обраного фактору X, наприклад, при лінійній залежності $y(x) = a_0 + a_1 x$ якою мірою і в якому напрямку (зростання чи спадання) фактор X призводить до зміни результату Y. За це в однофакторній регресійній моделі відповідає параметр a_1. Співвідношення параметрів моделі a_1 та a_0 демонструє наскільки великий внесок фактору X, що враховується, у зміні результату Y на тлі впливу інших неврахованих чинників. Точність моделі описується коефіцієнтом детермінації R^2, що знаходиться в межах від 0 (модель нічого не пояснює) до 1 (модель повністю описує весь процес).
4	Метод багатофакторного регресійного аналізу	Дозволяє шляхом побудови регресійної моделі оцінити за отриманою функціональною залежністю результативного показника y від значень аналізованих факторів x_i: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, характер залежності (лінійний або нелінійний), а також якою мірою і в якому напрямку (зростання чи спадання) фактори x_i призводять до зміни результату y. За це у багатофакторній регресійній моделі відповідають параметри a_i. Співвідношення параметрів a_i і a_0 моделі демонструє, наскільки великий внесок факторів x_i, що враховуються, в зміну результату y і, натомість, впливу інших неврахованих чинників. Точність моделей описується коефіцієнтом детермінації R^2, що знаходяться в межах від 0 (модель нічого не пояснює) до 1 (модель повністю описує весь процес).
5	Метод коефіцієнтного аналізу	Дозволяє оцінити вплив окремих факторів в регресійній моделі на величину результативного показника та включає розрахунок наступних коефіцієнтів: А) коефіцієнта еластичності, що вказує на скільки % зміниться залежна величина результуючого показника y при зміні значення впливаючого фактору x_i на 1%: $E(y, x_i) = \frac{\Delta y(\%)}{\Delta x_i(\%)}$ При цьому слід визнати, що коефіцієнт еластичності $E(y, x_i)$ не враховує рівень варіабельності фактору x_i; Б) бета-коефіцієнт,

	який дозволяє оцінити рівень зв'язку (коваріацію – cov) фактора, що впливає x_i та результуючого показника $y - cov(y, x_i)$, виважену на співвідношення величини середнього квадратичного відхилення $\sigma(y)$ результуючої змінної у та величини середнього квадратичного відхилення $\sigma(x_i)$ фактору x_i, що впливає, при фіксованому значенні (елімінуванні) решти незалежних змінних x_j: $\beta_i = cov(y, x_i) \cdot \frac{\sigma(x_i)}{\sigma(y)}, \text{ де } \sigma(y) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M (y_m - \bar{y})^2}{M-1}}, y_m - \text{значення змінної у у спостереженні } m, \bar{y} - \text{середнє значення змінної у у загальному обсязі спостережень } M,$ $\sigma(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M (x_{im} - \bar{x})^2}{M-1}}, x_{im} - \text{значення змінної } x_i \text{ у спостереженні } m, \bar{x} - \text{середнє значення змінної } x_i \text{ у загальному обсязі спостережень } M;$ В) дельта-коефіцієнт δ_i, який дозволяє оцінити частку впливу кожного фактору x_i на результат у у сумарному впливі всіх врахованих факторів: $\delta_i = \beta_i \cdot \frac{r(y, x_i)}{R^2}, \text{ де } \beta_i - \text{бета-коефіцієнт, } r(y, x_i) - \text{коефіцієнт парної кореляції між фактором } x_i, \text{ що впливає, і результуючим показником у, } R^2 - \text{коефіцієнт детермінації.}$
--	--

При управлінні проектами також активно використовується моделювання за методом Монте Карло. Метод Монте-Карло по суті є автоматизованою математичною методикою, що призначена для врахування ризику в процесі кількісного аналізу характеристик проекту та прийняття управлінських рішень. Метод Монте-Карло дозволяє особі, яка приймає рішення, у процесі моделювання не просто розглядати різні варіанти наслідків, а й оцінювати ймовірність настання кожного з них.

При використанні методу Монте-Карло впливу будь-якого чинника властива невизначеність, результат описується розподілом ймовірностей. Далі виконуються багаторазові розрахунки очікуваних результатів із різними наборами значень фактору, що вибираються випадковим чином за допомогою генератора випадкових чисел.

При дослідженні методом Монте-Карло розподіли ймовірностей змінних величин можуть приймати різні залежності (табл.3).

Таблиця 3 - Найбільш поширені розподіли ймовірностей змінних величин, одержувані за методом Монте-Карло

№	Тип розподілу ймовірностей	Характеристики типу розподілу
1	Нормальний розподіл (розподіл Гауса-Лапласа)	Задається функцією щільності ймовірності, що називається функцією Гауса: $f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \text{ де параметр } \mu - \text{математичне сподівання величини } x, \sigma - \text{середньоквадратичне відхилення величини } x.$ Нормальний розподіл є симетричним. Широке використання закону нормального розподілу як для багатьох областей класичної науки (математика, статистика, фізика), і прикладної науки (зокрема, управління проектами) впливає з центральної граничної теореми. Центральну граничну теорему можна сформулювати наступним чином: сумарний вплив великої кількості слабко пов'язаних між собою випадкових величин, за умови, що вплив жодної з них не має домінуючого характеру, дає розподіл, близький до нормального. При цьому, чим більша кількість доданків розглядається, тим більший розподіл центрованого та нормованого результату прагне до нормального.
2	Логонормальний розподіл	Логонормальний розподіл характеризує двопараметричне сімейство безперервних розподілів, у яких випадкова величина має логонормальний розподіл $\text{Log } N(\mu, \sigma^2)$ тобто її логарифм має нормальний розподіл. Логонормальний розподіл використовується для відображення величин, які не опускаються нижче за нуль (наприклад, час або вартість виконання проекту), але теоретично можуть набувати необмежених позитивних значень.
3	Рівномірний розподіл	Являє собою розподіл випадкової дійсної величини, наприклад, на інтервалі $[a, b]$ з постійною щільністю ймовірності, що дорівнює при нормуванні $1/(b-a)$.

4	Гамма-розподіл	Двопараметричне сімейство абсолютно безперервних розподілів, що описуються залежністю: $f_x(x) = x^{k-1} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \cdot \Gamma(k)}, x \geq 0$, де $\Gamma(k)$ – гамма-функція Ейлера; θ, k – параметри гамма-розподілу.
---	----------------	--

Моделювання за методом Монте-Карло дає широке уявлення про можливі події під час реалізації проекту. Воно дозволяє судити не лише про те, що саме може відбутися в ході реалізації проекту, але і про те, яка ймовірність того чи іншого результату.

Можливості використання методів теорії ймовірності та математичної статистики при управлінні проектами можна проаналізувати стосовно методів управління проектами, що є зведенням знань

з управління проектами PMBoK (Project Management Body of Knowledge) [1].

Керівництво PMBoK дозволяє описати суть процесів управління проектами в термінах інтеграції між процесами, що розділені на п'ять груп, що називаються «групами процесів управління проектом» (табл. 4).

Таблиця 4 - Групи процесів управління проектом з методології PMBoK

№	Назва групи	Характеристика групи
1	Група процесів ініціації проекту	Складається з процесів, що сприяють формальній авторизації початку нового проекту
2	Група процесів планування проекту	Визначає та уточнює цілі та планує дії, необхідні для досягнення цілей та змісту, заради яких було зроблено проект
3	Група процесів виконання проекту	Об'єднує людські та інші ресурси для виконання плану управління проектом даного проекту
4	Група процесів моніторингу та управління проектом	Спрямована на регулярну оцінку прогресу проекту та здійснення моніторингу, щоб виявити відхилення від плану управління проектом, і, у разі потреби, провести коригувальні дії для досягнення цілей проекту
5	Група завершальних процесів за проектом	Формалізує приймання продукту, послуги або результату та підводить проект чи фазу проекту до правильного завершення.

Результати досліджень. Результати визначення та математичної статистики при управлінні проектами можливостей використання методів теорії ймовірності з методології PMBoK, наведено у табл. 5.

Таблиця 5 - Результати визначення можливостей використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики при управлінні проектами з методології PMBoK

№	Методи теорії ймовірностей та математичної статистики	Групи процесів управління проектом з методології PMBoK				
		Група процесів ініціації проекту	Група процесів планування проекту	Група процесів виконання проекту	Група процесів моніторингу та управління проектом	Група завершальних процесів за проектом
1	Класичний метод (Визначення результатів по бінарному принципу «так» або «ні»)	+	+	+	+	+
2	Геометричний метод		+	+	+	
3	Метод оцінки ймовірності суми спільних подій		+		+	+
4	Метод оцінки ймовірності суми несумісних подій		+	+	+	
5	Метод ймовірності		+	+	+	

	добутку подій					
6	Метод визначення ймовірності повної групи подій	+	+	+	+	+
7	Метод Бернуллі		+		+	
8	Метод Байєса		+		+	
9	Метод однофакторного кореляційного аналізу	+	+	+	+	
10	Метод багатфакторного кореляційного аналізу	+	+	+	+	
11	Метод однофакторного регресійного аналізу		+	+	+	
12	Метод багатфакторного регресійного аналізу		+	+	+	
13	Метод коефіцієнтного аналізу	+	+	+	+	+
	Разом кількість використовуваних методів	5	13	10	13	4

Таким чином, методи теорії ймовірностей та математичної статистики при управлінні проектами з методології PMBoK найбільш потрібні при реалізації наступних груп процесів управління проектом: група процесів планування проекту, група процесів моніторингу та управління проектом.

Приклад результатів визначення можливостей моделювання за методом Монте-Карло процесів управління проектами з використанням груп процесів управління проектом з методології PMBoK наведено у табл. 6.

Таблиця 6 - Результати визначення можливостей моделювання за методом Монте-Карло процесів управління проектами використанням груп процесів управління проектом з методології PMBoK

№	Можливість моделювання за методом Монте-Карло	Групи процесів управління проектом за методологією PMBoK				
		Група процесів ініціації проекту	Група процесів планування проекту	Група процесів виконання проекту	Група процесів моніторингу та управління проектом	Група завершальних процесів з проекту
1	Імовірнісного представлення результатів	Визначення рівня ймовірності зацікавленості сторін проекту	Вірогідне надання результатів планування проекту	Вірогідне надання процесів виконання проекту	моніторингу та управління роботами проекту	закриття проекту
2	Графічне надання результатів	можливих варіантів зацікавлених сторін проекту	параметрів плану управління проектом	процесів виконання проекту	процесів моніторингу та управління роботами проекту	процесів закриття проекту
3	Аналіз чутливості	параметрів проекту до складу та ступеня участі зацікавлених сторін проекту	проекту до параметрів плану управління проектом	проекту до параметрів процесів виконання проекту	проекту до параметрів управління проектом	Процесів закриття проекту до параметрів проекту
4	Аналіз	реалізації	планів	процесів	процесів	закриття

	сценаріїв	проектів у залежності від зацікавлених сторін проекту	управління проектом	виконання проекту	моніторингу та управління проектом	проекту
5	Кореляція	інтересів сторін проекту	планів управління проектом	процесів виконання проекту	процесів моніторингу та управління проектом	процесів закриття проекту та закриття контрактів

Висновки. Таким чином, проведені дослідження показали, що ускладнення ринкових умов господарювання в умовах ринку, що динамічно розвивається, пред'являє все більш серйозні вимоги до складних процесів управління проектами, що призводить до активного використання методів моделювання в цілому та методів теорії ймовірності та математичної статистики.

Оскільки моделювання при управлінні проектами зазвичай здійснюється в декілька етапів, на яких уточнюються цілі управління, здійснюється постановка задач, конструюється модель, проводиться її теоретичний та (або) експериментальний аналіз на достовірність, здійснюється практична реалізація у рамках проекту, проводиться наступний аналіз отриманих даних, після чого (у разі необхідності) здійснюється коригування шляхом введення в модель додаткових факторів та даних, обмежень, критеріїв тощо, у цьому розгляді були оцінені можливості використання методів теорії ймовірності (включаючи: класичний метод, геометричний метод, метод оцінки ймовірності суми спільних подій, метод оцінки ймовірності суми несумісних подій, метод ймовірності твору подій, метод визначення ймовірності повної групи подій, метод Бернуллі, метод Байєса) та математичної статистики (включаючи: метод однофакторного кореляційного аналізу, метод багатофакторного кореляційного аналізу, метод однофакторного регресійного аналізу, метод багатофакторного регресійного аналізу, метод коефіцієнтного аналізу) стосовно методів управління проектами, які називаються зведенням знань з управління проектами РМВок, що включає такі групи процесів управління проектом: група процесів ініціації проекту, група процесів планування проекту, група процесів виконання проекту, група процесів моніторингу та управління проектом, група завершальних процесів за проектом.

Показано, що методи теорії ймовірності та математичної статистики при управлінні проектами з методології РМВок найбільш потрібні при реалізації наступних груп процесів управління проектом: група процесів планування проекту, група процесів моніторингу та управління проектом.

Список літератури:

1. *Verzuh, E.* The Fast Forward MBA in Project Management, Second Edition, 2nd Edition. The Portable MBA Series, John Wiley & Sons, Inc., Ltd 2005. 480 P.
2. *Newton, R.* Project Management. Step By Step. The Proven, Practical Guide To Running A Successful Project, Every, 2015.
3. *Wells, K. N., & Kloppenborg, T. J.* Project Management Essentials, Second Edition (Vol. Second edition). New York, NY: Business Expert Press, 2019. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsebk&AN=1918577>
4. *Hunt, J. A., & Project Management Institute.* PMI-ACP Project Management Institute Agile Certified Practitioner Exam Study Guide. Indianapolis: Sybex, 2018. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsebk&AN=1693203>
5. *Whitty, S.J. and Schulz, M.F.* THE PM_BOK_CODE. - 20th IPMA World Congress on Project Management, 1, 466-472, 2006.

References (transliterated)

1. *Verzuh, E.* The Fast Forward MBA in Project Management, Second Edition, 2nd Edition. The Portable MBA Series, John Wiley & Sons, Inc., Ltd 2005. 480 P.
2. *Newton, R.* Project Management. Step By Step. The Proven, Practical Guide To Running A Successful Project, Every, 2015.
3. *Wells, K. N., & Kloppenborg, T. J.* Project Management Essentials, Second Edition (Vol. Second edition). New York, NY: Business Expert Press, 2019. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsebk&AN=1918577>
4. *Hunt, J. A., & Project Management Institute.* PMI-ACP Project Management Institute Agile Certified Practitioner Exam Study Guide. Indianapolis: Sybex, 2018. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsebk&AN=1693203>
5. *Whitty, S.J. and Schulz, M.F.* THE PM_BOK_CODE. - 20th IPMA World Congress on Project Management, 1, 466-472, 2006.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Некрасова Марія Володимирівна (Nekrasova Mariia) – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Комп'ютерне моделювання процесів та систем» НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-64-54; e-mail: masha12dec@gmail.com

*О. М. КОВТУН, О. С. ЛІННИК, К. В. ІВАНЧЕНКО***РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ ДЛЯ ДИСТАНЦІЙНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ**

Метою даної дослідження було розроблення та впровадження інформаційної системи для оцінки та тестування знань студентів з метою спрощення процесу створення тестів та оцінки навчальних досягнень викладачів. У ході роботи був проведений огляд існуючих комп'ютерних навчальних програм, аналіз ринку сучасних аналогів, та на основі отриманих даних сформульовано функціональні та нефункціональні вимоги до розроблюваного програмного продукту. Виходячи з поставлених вимог, було обрано технічні та програмні засоби для розробки програми, а саме мова програмування JavaScript та фреймворк ReactJS для розробки клієнтської частини веб-застосунку, що дозволяє швидко та зручно розробляти інтерактивні користувацькі інтерфейси та гарантує стабільну роботу системи. Серверна частина застосунку реалізована за допомогою потужного та гнучкого фреймворку Spring, який дозволяє створювати масштабовані та високопродуктивні веб-додатки.

Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються наступні задачі: реєстрація нового користувача, редагування даних користувача, вхід та вихід користувача в/із системи, перегляд/створення/редагування/видалення навчальної групи, перегляд студентів обраної групи, перегляд/створення/редагування/видалення/публікація тесту, перегляд/створення/редагування вправи у окремому тесті, отримання всіх вправ у вибраному тесті, призначення тесту на проходження обраній групі, можливість переглянути/здати призначені користувачу (його групі) тести, можливість перевірити вправи та виставити оцінку (деякі вправи можуть бути оцінені системою автоматично, якщо викладач задав вірну відповідь для порівняння), можливість переглянути результат за зданим тестом. Була спроектована та побудована база даних MySQL відповідно до описаної моделі даних яка відповідає третьому ступеню нормалізації. Розроблено структурну та функціональну схеми системи. Виділено три ролі користувачів: адміністратор, викладач, студент. Велике значення приділялося забезпеченню простоти та зручності користування продуктом користувача, оскільки це грає ключову роль у використанні програмного забезпечення. У процесі розробки програми велика увага була приділена створенню інтуїтивно зрозумілого та комфортного інтерфейсу.

Як результат, була створена інформаційна система для автоматизованого тестування, яка успішно виконує поставлені завдання і відповідає всім визначеним вимогам, а також є цілком готовою до практичного впровадження. Отримані результати можуть бути використані як для інтеграції програми у навчальний процес, так і для надання студентам можливості отримати практичні навички.

Ключові слова: контроль знань, мікросервісна архітектура, spring framework, reactjs.

The purpose of this study was to develop and implement an information system for evaluating and testing students' knowledge in order to simplify the process of creating tests and evaluating the educational achievements of teachers. In the course of the work, a review of existing computer training programs, an analysis of the market of modern analogues was carried out, and on the basis of the obtained data, functional and non-functional requirements for the developed software product were formulated. Based on the requirements, technical and software tools were chosen for the development of the program, namely the JavaScript programming language and the ReactJS framework for the development of the client part of the web application, which allows for quick and convenient development of interactive user interfaces and guarantees the stable operation of the system. The server part of the application is implemented using the powerful and flexible Spring framework, which allows you to create scalable and high-performance web applications.

To achieve the goal, the following tasks are solved in the work: registering a new user, editing user data, logging in and out of the system, viewing/creating/editing/deleting a study group, viewing students of a selected group, viewing/creating/editing/deleting/ publishing a test, viewing/creating/editing an exercise in a separate test, receiving all exercises in a selected test, assigning a test to a selected group, the ability to view/take tests assigned to the user (his group), the ability to check exercises and assign a grade (some exercises may be evaluated by the system automatically if the teacher gave the correct answer for comparison), the ability to view the result for the passed test. A MySQL database was designed and built according to the described data model that corresponds to the third degree of normalization. The structural and functional scheme of the system has been developed. There are three user roles: administrator, teacher, student. Great importance was attached to ensuring the simplicity and ease of use of the user's product, as this plays a key role in the use of the software. In the process of developing the program, great attention was paid to creating an intuitive and comfortable interface.

As a result, an information system for automated testing was created, which successfully fulfills the assigned tasks and meets all the specified requirements, and is also fully ready for practical implementation. The obtained results can be used both to integrate the program into the educational process and to provide students with the opportunity to acquire practical skills.

Keywords: knowledge control, microservice architecture, spring framework, reactjs.

Вступ.

Так як необхідність переходу на дистанційну форму навчання виникла не так давно - на ринку присутня невелика кількість програмного забезпечення для дистанційного контролю знань. І на практиці це програмне забезпечення майже не використовується через складність інтеграції, відсутність локалізації, застарілість або вартість.

Викладачі надають перевагу комбінуванню різних засобів для організації дистанційного навчання. Цей підхід має багато недоліків. Навчальні матеріали легко загубити через велику кількість різних систем, де викладачі їх публікують (Google drive, One drive, Email, Teams and Zoom чати). Також за такого підходу часто відсутній зворотний зв'язок. Студенти нерідко не знають оцінок за виконані роботи, важко відслідковувати загальний прогрес по конкретній дисципліні.

Тому задля вирішення наведених проблем

виникає потреба в запровадженні уніфікованого програмного забезпечення для контролю знань студентів. Для цього можна розглянути доступні програми на ринку. Або ж розробити власний цифровий продукт який би задовольняв усі потреби, що є гарною ідеєю з огляду на те, що Україна займає 8 місце у світі з IT навичок (за рейтингом Global Skill Report 2022 від Coursera).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При виборі існуючої або розробці нової цифрової системи для дистанційного контролю знань треба проаналізувати та виділити основну функціональність, яку має підтримувати сервіс [1]. Наступний перелік функціональності мав би покрити усі потреби дистанційного навчання:

- задача завдань;
- дискусійні форуми;
- завантаження файлів;

- оцінювання;
- обмін повідомленнями;
- календар подій;
- новини та анонси подій (для різних рівнів: сайт, курс, навчальна група);
- онлайн тестування;
- вікі.

Отже розглянемо існуючі цифрові продукти, які б могли забезпечити усі або більшість з наведених функціональних потреб.

Програма ATutor (читається “Ейтьютор”) розробляється та підтримується з 2001 року Greg Gay, Joel Kronenberg і Heidi Hazelton із Adaptive Technology Resource Centre, University of Toronto. Система ATutor поширюється на основі GNU General Public License (GPL), яка, зокрема, дозволяє вільно використовувати та змінювати програму [2].

Dokeos – це відкрита система дистанційного навчання, що відповідає міжнародним стандартам систем дистанційного навчання SCORM та AICC. Розповсюджується за принципом підписки. Вартість обговорюється з компанією Dokeos та може змінюватися в залежності від функціоналу, кількості користувачів та інше. Компаніє надає можливість безкоштовно спробувати продукт за допомогою trial підписки [3].

Moodle — навчальна платформа, призначена для об'єднання педагогів, адміністраторів і учнів (студентів) в одну надійну, безпечну та інтегровану систему для створення персоналізованого навчального середовища. Це безкоштовна, відкрита (Open Source) система управління навчанням. Вона реалізує філософію «педагогіки соціального конструктивізму» та орієнтована насамперед на організацію взаємодії між викладачем та учнями, хоча підходить і для організації традиційних дистанційних курсів, а також підтримки очного навчання. Перекладена на десятки мов, в тому числі і на українську [4].

Усі ці три екземпляри є якісним програмним забезпеченням з широкою функціональністю та багатою історією. Але попри всі позитивні якості, наведене програмне забезпечення рідко використовується у ВНЗ України.

Якщо ж розглядати створення програмного забезпечення з нуля, то перш за все необхідно виділити недоліки та переваги наведених вище екземплярів. Серед переваг можна вважати вже перераховану широку функціональність програм. Серед недоліків – усі екземпляри мають монолітну архітектуру та переважно не підтримуються на мобільних пристроях, часто потребують інсталяції додаткових пакетів на комп'ютер користувача.

Тому новий застосунок має перейняти вже перевірені часом можливості та функціонал для користувачів і в той же час позбутися обмежень які є результатом монолітного архітектурного підходу.

Сучасним трендом у розробці програмного забезпечення є мікросервісна архітектура [5, 6]. Хоч цей підхід і має деякі недоліки у відношенні до

монолітної (такі як збільшення затримок через міжсервісну взаємодію), все ж він має велику перевагу – можливість горизонтально масштабування застосунку.

З впровадженням цього підходу більше не буде складної зв'язаності між логікою програми та користувацьким інтерфейсом. Ці аспекти стануть окремими програмними сутностями (backend та frontend сервісами). Завдяки цьому можна буде вирішити другу наведено проблему – підтримка на мобільних пристроях. Коли логіка та розрахунки програми реалізовані окремими сервісом – ми маємо змогу розробити будь яку кількість користувацьких інтерфейсів на будь яких платформах (web app, desktop app, android app, iOS app і тд.).

Реалізація застосунку – загальна архітектура.

Для розробки мікросервісного застосунку побудовано інфраструктуру з трьох шарів (рис.1):

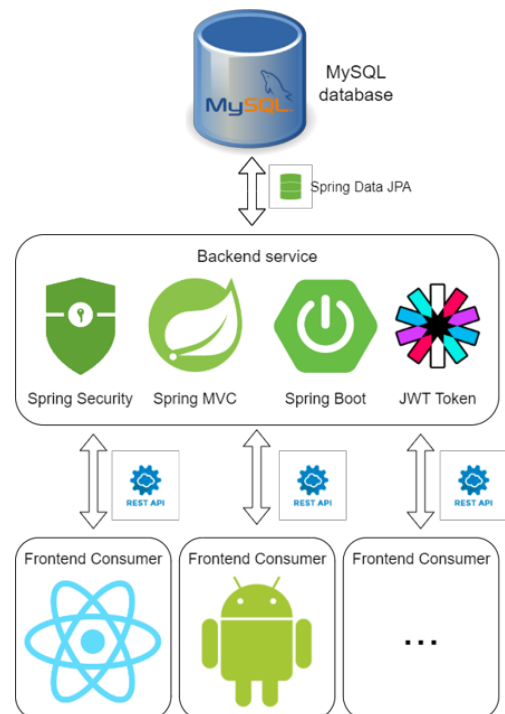


Рис. 1 - Діаграма архітектури застосунку та використаних технологій

Рівень збереження даних – одна або кластер баз даних з визначеною предметною моделлю. Для роботи використано MySQL database.

Бекенд сервіс – stateless, headless застосунок. Проводить проміжкові операції з даними перед передачею їх на фронтенд клієнти або збереженням у базі даних. У роботі використано мову Java та фреймворк Spring (Boot, MVC, Security). Для аутентифікації користувачів використовується JWT Token.

Фронтенд клієнти – сукупність застосунків, яка використовується кінцевими користувачами для взаємодії з системою. В рамках роботи розроблено веб-застосунок з використанням JavaScript та ReactJS фреймворку.

Міжрівнева взаємодія.

Бекенд взаємодіє за базою даних за допомогою бібліотеки Spring Data JPA.

Фронтенд взаємодіє з бекендом через REST API ендпоінти. Формат обміну даними - JSON.

Реалізація застосунку - серверна частина.

Структуру backend застосунку умовно можна поділити на п'ять логічних шарів (рис.2).

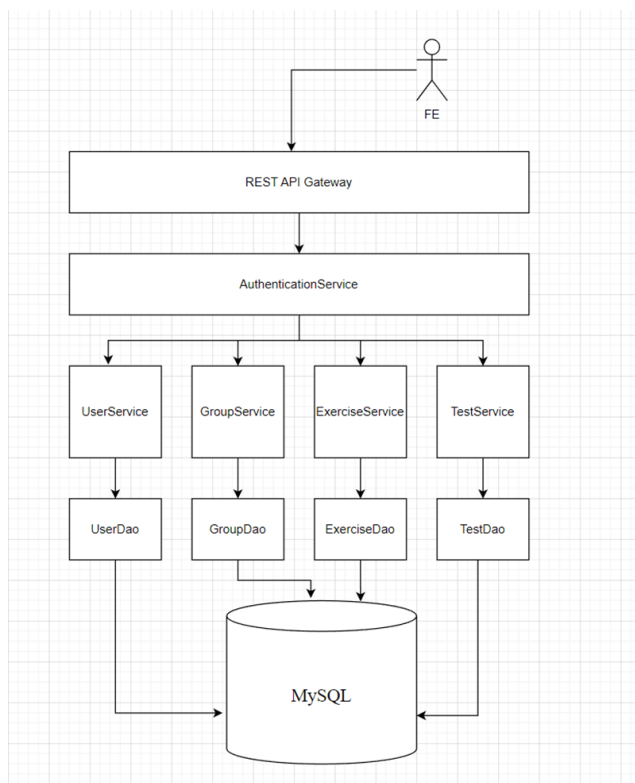


Рис. 2 - Високорівнева діаграма структури backend servisu

Найглибшим шаром є база даних [7, 8]. До бази даних звертається шар DAO, який реалізовано за допомогою JPA (Java Persistence API). Далі розроблено шар сервісів - у яких реалізована основна програмна логіка з використанням методів DAO шару.

Далі реалізовані шари аутентифікації і REST API Gateway. Аутентифікація розроблена за допомогою модулю Spring Security та JWT токенів. Цей шар відповідальний за перевірку ролі користувача та дозволу або заборони виклику окремих ендпоінтів. В свою чергу REST API Gateway шар реалізовано з використанням модулю Spring MVC. Цей шар відповідає за створення REST ендпоінтів та їх мапінг на відповідні HTTP URLs.

В рамках проектної роботи було реалізовано контролери та сервіси для підтримки наступних дій:

- реєстрація нового користувача;
- редагування даних користувача;
- вхід та вихід користувача в/із системи;
- перегляд/створення/редагування/видалення навчальної групи;

- перегляд студентів обраної групи;
- перегляд/створення/редагування/видалення/публікація тесту;
- перегляд/створення/редагування вправи у окремому тесті;
- отримати всі вправи у вибраному тесті;
- призначити тест на проходження обраній групі;
- переглянути/здати призначені користувачу (його групі) тести;
- перевірити вправи та виставити оцінку (деякі вправи можуть бути оцінені системою автоматично, якщо викладач задав вірну відповідь для порівняння);
- переглянути результат за зданим тест.

Реалізація застосунку - користувацький інтерфейс (веб).

Задля реалізації веб інтерфейсу було використано ReactJS фреймворк. React – це ефективна і гнучка декларативна бібліотека JavaScript для збірки UI від команди Facebook [9]. Вона дозволяє без зусиль створювати інтерактивний інтерфейс користувача. У React використовується компонентний підхід. Бібліотека немає контролерів, в'ю, моделей, шаблонів – все є компонент. Компоненти можна перевикористовувати, успадковувати один від одного, об'єднувати. Компонент – це свого роду будівельна одиниця, з якої збирається інтерфейс. Перевагою є можливість порівняння React'ом віртуального DOM'а з реальним, і виконання мінімальних змін для їх синхронізації. Віртуальний DOM вирішує проблему з обробкою подій в різних браузерах, за рахунок цього React надає сумісну модель подій в будь-якому браузері. React дозволяє використовувати будь-який інструмент при розробці, він добре поєднується з іншими фреймворками. Також дану бібліотеку дуже просто освоїти. Дизайн React поєднується з асинхронними серверними архітектурами для адаптації до майбутніх технологій. Таким чином, React вартовикористовувати, якщо необхідно створити якісний і в найкоротші терміни швидкий, легкий, зручний односторінковий додаток.

Під час розробки веб-застосунку було поставлено наступний список цільової функціональності, яка має бути реалізована:

- авторизація користувачів;
- розділення функціоналу за ролями користувачів;
- підтримка локалізації (українська та англійська мови);
- менеджмент користувачів (для адміністраторів);
- менеджмент учбових груп (для адміністраторів);
- менеджмент тестів і завдань (для викладачів);

- перегляд і перевірка результатів тестів (для викладачів);
- перегляд і проходження призначених тестів (для учнів);
- перегляд результатів пройдених тестів (для учнів).

Програмну структуру проекту можна відобразити наступним способом (рис.3):

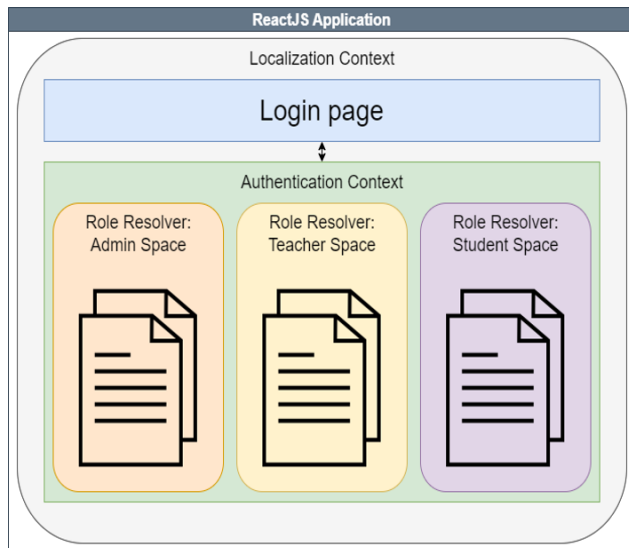


Рис. 3 - Умовна структура розробленого ReactJS сервісу

З наведеного рисунку можна описати наступні логічні шари.

1 Localization Context - глобальний шар, який надає змогу з будь якої точки програмного коду отримати переклади. Реалізовано з використанням react-localization бібліотеки.

2 Authentication Context та Login - шар відповідає за безпеку сервісу. До функціональної частини сервісу допускає тільки авторизованих користувачів, в іншому випадку перенаправляє на сторінку авторизації. Реалізовано за допомогою react-router-dom бібліотеки.

3 Role Resolver - самостійно реалізований шар для обмеження та надання доступу до функціоналу в залежності від ролі користувача (запроваджено 3 ролі: адміністратор, викладач та учень). Користувачі з різними ролями мають різний інтерфейс та можливості.

На рис.4-6 наведений вигляд інтерфейсу для відповідно адміністратора, викладача та учня.



Рис. 4 – Сторінка менеджменту користувачів

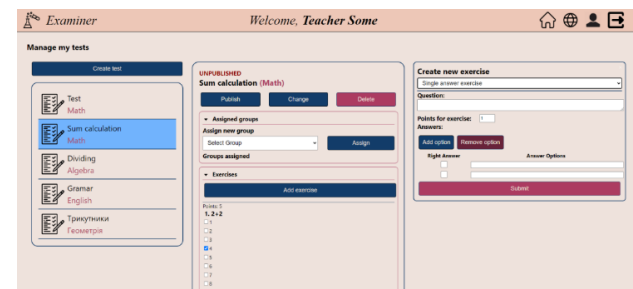


Рис. 5 – Сторінка менеджменту тестів з розгорнутим редактором тесту та формою створення нової виправи

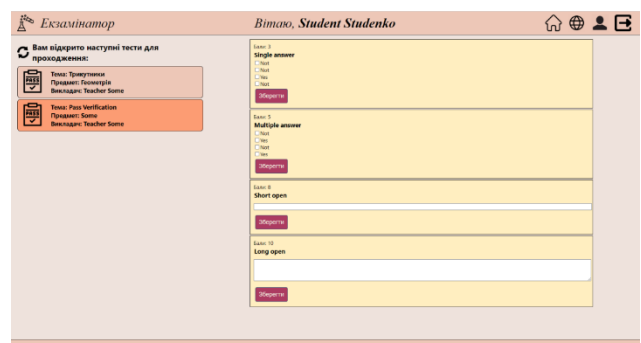


Рис. 6 – Сторінка проходження тестування учнем

Висновки. На даному етапі у сфері освіти немає уніфікованого підходу та програмного забезпечення для дистанційного контролю знань. Це викликає деякі незручності у студентів через різноманітність підходів оцінювання у викладачів.

Впровадження уніфікованого підходу з використанням спеціалізованого програмного забезпечення значно покращило би прозорість навчальних процесів. У якості такого програмного забезпечення можна обрати або існуючі екземпляри, тим паче у переліку є гарні варіанти з відкритим кодом і можливістю додавання власного функціоналу. Або, зважаючи на великий досвід розробки в Україні, створити власний сервіс перейнявши найкращі практики та використавши сучасні підходи і технології проектування.

Список літератури

1. Пазушко М.А. Математичне та програмне забезпечення програмного додатку автоматизації процесу тестування з використанням фреймворку Spring /М.А.Пазушко, К.В.Іванченко, Д.А.Іванченко// Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. - №2. – 2022. – с. 10-16.
2. Шчокдзінський О.К. Розробка навчальних курсів у системі ATutor / О.К.Шчокдзінський, С.О.Войт, М.М.Луцків // Тернопіль, 2017. – 77с.
3. The Dokeos e-learning project management guide / dokeos e-learning. Dokeos, 2007. – 11с.
4. Бодненко Д.М. Тестовий контроль знань студентів у системі Moodle. / Д.М. Бодненко, Л.О.Варченко, О.Б. Жильцов// Навчально-методичний посібник для користувачів системи дистанційного навчання Moodle. К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка. - 2012 р. - 112 с.
5. Приходченко С.Д. Обґрунтування вибору мікросервісної архітектури в порівнянні з монолітною.: стаття / С.Д. Приходченко, К.С. Родна, Р.В. Поштак // НТУ «Дніпровська політехніка». Дніпро. – 4с.
6. Кріс Річардсон. Мікросервіси. Патерни розробки і рефакторинга / Кріс Річардсон – 2019. – 544с.
7. REST API Developer Guide / Salesforcedocs. 2022. – 346с.
8. Hatma Suryotrisongko, Dedy Puji Jayanto, Aris Tjahyanto. Design and Development of Backend Application for Public Complaint Systems Using Microservice Spring Boot. / 4th Information Systems International Conference 2017, ISICO 2017, Indonesia.
9. React and Libraries. Your Complete Guide to the React Ecosystem. Elad Elrom / Montvale, NJ, USA. 2020. – 418с.

References (transliterated)

1. Pazushko M.A. Matematychnе ta prohramne zabezpechennia prohramnoho dodatku avtomatyzatsii protsesu testuvannia z vykorystanniam freimvorku Spring /M.A.Pazushko, K.V.Ivanchenko, D.A.Ivanchenko// Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seria: Dynamika i mitsnist mashyn. - №2. – 2022. – s. 10-16.
2. Shchkodzinskyi O.K. Rozrobka navchalnykh kursiv u systemi ATutor / O.K.Shchkodzinskyi, S.O.Voit, M.M.Lutsiv // Ternopil, 2017. – 77s.
3. The Dokeos e-learning project management guide / dokeos e-learning. Dokeos, 2007. – 11с.
4. Bodnenko D.M. Testovyi kontrol znan studentiv u systemi Moodle. / D.M. Bodnenko, L.O.Varchenko, O.B. Zhyltsov// Navchalno-metodychnyi posibnyk dlia korystuvachiv systemy dystantsiinoho navchannia Moodle. K.: Kyiv. un-t im. B. Hrinchenka. - 2012 r. - 112 s.
5. Prykhodchenko S.D. Obgruntuvannia vyboru mikroservisnoi arkhitektury v porivnanni z monolitnoiu.: stattia / S.D. Prykhodchenko, K.S. Rodna, R.V. Poshtak // NTU «Dniprovskа politekhnika». Dnipro. – 4s.
6. Kris Richardson. Mikroservisy. Paterny rozrobky i refaktoringa / Kris Richardson – 2019. – 544s.
7. REST API Developer Guide / Salesforcedocs. 2022. – 346с.
8. Hatma Suryotrisongko, Dedy Puji Jayanto, Aris Tjahyanto. Design and Development of Backend Application for Public Complaint Systems Using Microservice Spring Boot. / 4th Information Systems International Conference 2017, ISICO 2017, Indonesia.
9. React and Libraries. Your Complete Guide to the React Ecosystem. Elad Elrom / Montvale, NJ, USA. 2020. – 418с.

Надійшла (received) 13.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Ковтун Олександр Миколайович (Kovtun Oleksandr) - Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістр комп'ютерних наук; тел: (067)127-32-50; e-mail: kovtunsanter@gmail.com.

Лінник Олексій Сергійович (Linyuk Oleksii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістр комп'ютерних наук; тел: (096)701-66-97; e-mail: virich1997@gmail.com.

Іванченко Ксенія Вікторівна (Ivanchenko Kseniia) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (097) 437-89-74; e-mail: xeniya.ivanchenko@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0960-1200>

Д. О. КРАСУЛЯ, К. В. ІВАНЧЕНКО, Д. А. ІВАНЧЕНКО

РОЗРОБКА МОБІЛЬНОГО ЗАСТОСУНКУ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ РІВНЯ ЗНАНЬ АНГЛІЙСЬКОЇ МОВИ З ВИКОРИСТАННЯМ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ SWIFT ТА ФРЕЙМВОРКУ UIKIT

Ця наукова робота спрямована на розробку та впровадження інноваційного мобільного застосунку, спрямованого на оцінку рівня знань іноземних мов. Основна мета дослідження полягала в створенні зручного та швидкого інструменту, який дозволяє користувачам не лише визначати свій рівень мовної компетенції, а й виявляти недоліки та визначати оптимальний шлях для подальшого вдосконалення.

В ході дослідження було ретельно проаналізовано існуючі методики та системи оцінювання мовних навичок. На основі цього аналізу були сформульовані докладні функціональні та нефункціональні вимоги до розроблюваного програмного продукту. Вибір технічних та програмних інструментів, зокрема мови програмування Swift та операційної системи iOS, був обґрунтований їхньою актуальністю та можливістю створювати застосунки для всіх пристроїв у екосистемі Apple.

Суттєвою частиною роботи було створення бази даних, використовуючи нереляційну систему Realm для мобільних пристроїв. Застосунок взаємодіє з даними у форматі JSON, що дозволяє ефективно завантажувати та відображати списки питань для користувачів. В процесі розробки використовувалися такі бібліотеки, як Foundation, UIKit, RealmSwift та інші, з метою забезпечення оптимальної продуктивності та надійності застосунку.

Особлива увага приділялася створенню інтуїтивно зрозумілого та зручного інтерфейсу для користувачів. Процес розробки включав в себе ретельне проектування логіки та структури мобільного застосунку з метою забезпечення максимальної зручності під час використання.

Однією з ключових частин дослідження було тестування розробленого застосунку. Здійснювались UI тестування для перевірки коректності та зручності інтерфейсу, тестування сумісності для впевненості у роботі на різних пристроях та функціональне тестування для перевірки відповідності всіх визначених вимог.

В результаті дослідження була успішно розроблена інформаційна система для автоматизованого тестування, яка відповідає високим стандартам та вимогам. Отримані результати можуть служити основою для інтеграції програми у навчальний процес або для надання студентам можливості отримати практичні навички в оцінці своєї мовної компетенції.

Ключові слова: мобільний застосунок, рівень знань, swift, ios, json.

This scientific work is aimed at the development and implementation of an innovative mobile application aimed at assessing the level of knowledge of foreign languages. The main goal of the study was to create a convenient and fast tool that allows users not only to determine their level of language competence, but also to identify shortcomings and determine the optimal path for further improvement.

In the course of the study, the existing methods and systems for evaluating language skills were carefully analyzed. Based on this analysis, detailed functional and non-functional requirements for the developed software product were formulated. The choice of technical and software tools, in particular the Swift programming language and the iOS operating system, was justified by their relevance and the ability to create applications for all devices in the Apple ecosystem.

A significant part of the work was the creation of a database using the non-relational Realm system for mobile devices. The application interacts with data in JSON format, which allows you to efficiently load and display lists of questions for users. In the development process, such libraries as Foundation, UIKit, RealmSwift and others were used in order to ensure optimal performance and reliability of the application.

Special attention was paid to creating an intuitive and convenient interface for users. The development process included a careful design of the logic and structure of the mobile application in order to ensure maximum convenience during use.

One of the key parts of the research was testing the developed application. UI testing was carried out to check the correctness and usability of the interface, compatibility testing to ensure operation on different devices, and functional testing to check compliance with all defined requirements.

As a result of the research, an information system for automated testing that meets high standards and requirements was successfully developed. The obtained results can serve as a basis for the integration of the program into the educational process or to provide students with the opportunity to gain practical skills in assessing their language competence.

Keywords: mobile application, level of knowledge, swift, ios, json.

Вступ.

У сфері освіти мобільні застосунки все більше набувають популярності, забезпечуючи швидкий та зручний спосіб вивчення, засвоєння та перевірки знань. Тому створення мобільного застосунку, який буде вмщати комплексні питання для перевірки знань з іноземної мови є актуальною задачею. Існуючі застосунки для перевірки знань мають питання, які не є комплексними. Тобто це питання або лише на знання граматики, або лише на перевірку словарного запасу. Питання на аудіювання, читання, граматику, а також знання перекладу розширює як комплексність застосунку так і його функціональність. Мобільний застосунок для контролю рівня знань з іноземної мови – це зручний та швидкий спосіб перевірити свій рівень, виявити помилки та задати подальший вектор навчання тієї чи іншої мови.

Проходячи тести у розробленому мобільному

застосунку користувач зможе виявити свій поточний рівень знань обраної ним мови. Такий застосунок може бути корисним і для людей, які здають екзамени з англійської мови, такі як, наприклад, ЗНО. Питання, з яких складається тест генеруються кожен раз, коли користувач буде переходити на вкладку тестування.

Актуальність створення мобільного застосунку для контролю рівня знань іноземної мови обумовлено ще тим, що дуже часто, вивчаючи будь-яку іноземну мову люди не можуть самостійно визначити рівень своїх знань. А саме за допомогою цього мобільного застосунку користувач зможе швидко визначити свій рівень та виявити, що необхідно ще вивчити та чому необхідно надати більше уваги.

Постановка проблеми.

Метою роботи є створення мобільного застосунку, який буде вмщати комплексні питання для перевірки знань з іноземної мови, а також дозволяти

користувачеві перевірити свої знання з іноземної мови, а також користувач повинен мати можливість відслідковувати свій прогрес.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати декілька завдань:

- провести порівняльний аналіз існуючий на ринку аналогів, виявити їх плюси та мінуси;
- вибрати операційну систему, на якій буде створений мобільний застосунок та мову програмування;
- обрати мову (або декілька мов), рівень знань якої користувач може перевірити;
- розробити структуру та логіку мобільного застосунку, із чого він буде складатися та які можливості будуть у користувача;
- розробити алгоритм, який дозволяє користувачеві перевірити свої знання;
- визначити джерело інформації, звідки в застосунку будуть з'являтися тести;
- визначити потрібний функціонал застосунку, виходячи з наявної інформації і можливостей, які надає API потрібного сервісу;
- необхідно розробити інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, який буде відповідати гайдлайнам обраної операційної системи (IOS чи Android);
- необхідно визначити, яка база даних буде використовуватися у застосунку, які дані будуть зберігатися;
- здійснити розробку мобільного застосунку, враховуючи інформацію, що була отримана на попередніх етапах виконання проекту;
- реалізувати адаптивність застосунку під всі актуальні моделі смартфонів лінійки Apple;
- здійснити тестування розробленого застосунку з метою знаходження наявних дефектів, недоліків і інших відхилень у поведінки застосунку у порівнянні з результатом, який планувався.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Існує дуже багато різних методик перевірки знань з іноземної мови. В процесі розробки була поставлена задача обрати найкращу методику, яка б дозволила користувачеві швидко та якісно перевірити свій рівень знань іноземної мови. Вивчивши літературу [1] та проаналізувавши методики оцінювання і перевірки знань з будь якої іноземною мовою, що також описується у виданні [2], можна сказати, що не існує єдиної та чіткої методики, яка б дозволяла однозначно перевірити та визначити точний рівень володіння тієї чи іншою іноземною мовою.

На даний момент існує система оцінювання володіння мовою, яка називається CEFR - Загальноєвропейська система оцінки рівнів володіння іноземною мовою. Страсбурзький університет разом із радою з питань співпраці в галузі культури видав вказівки [3] із загальноєвропейськими рекомендаціями, щодо мовної освіти. Саме там й було запропоновано використовувати систему оцінювання CEFR. У виданні надані рекомендації щодо вивчення, викладання, а також оцінювання рівня володіння тієї чи іншою іноземною мовою.

Існує ціле різноманіття операційних систем та оболонок над мобільними операційними системами, проте, у своїй роботі V.V. Subrahmanyam [4] проаналізував існуючі мобільні операційні системи, та виокремив дві з них: це операційна система Android від Google, яка була представлена у 2008 році, та операційна система IOS від Apple, яка була представлена на рік раніше. Саме ці дві операційні системи займають лідируючі позиції на світовому ринку операційних систем для мобільних застосунків.

Ознайомившись із великою кількістю літератури на тему розробки мобільних застосунків та проаналізувавши сучасні методології перевірки знань з іноземної мови можна зробити такі висновки:

По-перше, в сучасному світі існує дві лідируючі мобільні операційні системи: це Google Android та Apple IOS. Проте, після ознайомлення із статтями вчених, можна зробити висновок, що саме IOS є найбільш надійною та безпечною операційною системою із усіх можливих. Тому, саме ця операційна система буде використовуватись у моїй дипломній роботі. Окрім цього, після аналізу сучасного ринку мобільних застосунків можна з упевненістю сказати, що застосунків аналогів на платформі iOS значно менше, ніж на платформі Android.

По-друге, для того, щоб створити мобільний застосунок на IOS, можна використовувати одну з двох мов програмування, а саме: Objective-C, або Swift [5-7]. Це дві офіційні мови програмування, які були представлені компанією Apple, але для більш швидкої та адаптивної роботи мобільного застосунку краще використовувати більш нову мову програмування Swift, а так як саме ця мова дає можливість створювати не лише мобільні застосунки, а й застосунки для усіх девайсів з екосистеми Apple – вона була обрана мною для написання застосунку для контролю рівня знань з іноземної мови.

По-третє, проаналізувавши літературу по мобільним базам даних, можна сказати, що база даних Realm [8] більш швидка та інтуїтивно зрозуміла, то ж було прийнято рішення використовувати саме цю базу даних для зберігання результатів тестування користувача та подальшої формування статистики занять.

Основна частина.

Увесь застосунок складається із двох основних та декількох допоміжних екранів. Екран із запитанням при кожному натисканні на варіант відповіді перезавантажується з уже новим запитанням. Вся логіка роботи програми базується на тестах, які завантажуються із файлу у JSON форматі, що має масив із завданнями та відповідями до цих завдань.

Кожна відповідь являє собою модель Answer, яка містить поле type, так як відповідь може бути як у форматі тексту, так і у форматі картинки. Поле value, яке відповідає за текст самої відповіді, або у випадку із картинкою – містить посилання на картинку. А також булеве поле isRight, за допомогою якого перевіряється чи являється ця відповідь правильною.

Після отримання даних відбувається декодування

у моделі, а також відображається перше запитання. Питання із масиву запитань витягуються рандомно.

Після того, як користувач завершить тестування, результати тесту зберігаються у локальну базу даних, у клас типу Object. Саме такі класи зберігаються у використовуваній локальній базі даних Realm.

Далі, на основі отриманих результатів формується статистика і користувач має можливість її переглянути. Якщо даних для статистики ще немає, то на екрані статистики відображається Empty State.

Загальну логіку роботи програми наведено на кросфункціональній діаграмі (рис. 1)

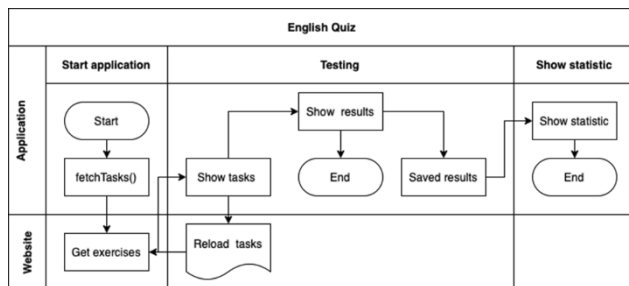


Рис. 1 – Кросфункціональна діаграма застосунку

Структура застосунку:

1 Екран тестування. Екран поділяється на три блоки. Перший блок – задача. Це може бути або текст, або картинка із завданням, або відео. Другий блок – це блок питання. Безпосередньо саме запитання. Третій блок – блок можливих відповідей. У кожному запитанні є лише одна правильна відповідь.

2 Екран статистики – екран, на якому відображається статистика тестувань користувача, вхідними даними є кількість правильних відповідей з кожного тестування, та дата самого тестування. Статистика представлена у вигляді стовпчастого графіку. Формується по дням.

На рис. 2 представлена UML-діаграма активності, що відображає роботу користувача, програми та локальної бази даних.

При кожному початку тестування із масиву запитань випадково дістається запитання, тож кожного разу список запитань та їх послідовність буде відрізнятися.

Також користувач може в будь який момент завершити тестування, тоді поточні результати тесту будуть збережені і тестування завершиться, а користувач зможе перейти на вкладку із статистикою.

На всіх екранах із запитаннями є кнопка перезавантажити список запитань, що дозволяє оновити список запитань та заново почати тестування.

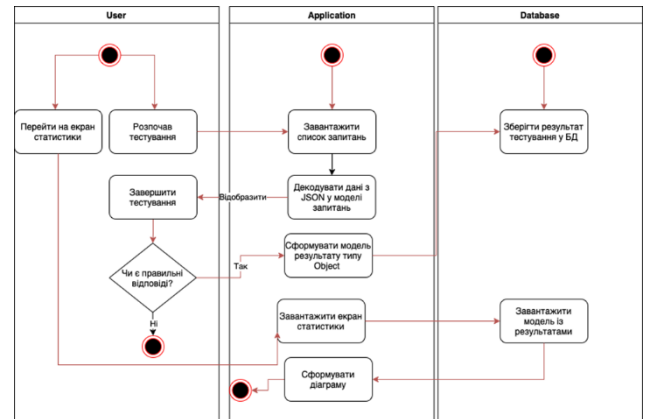


Рис. 2 – UML-діаграма активності у застосунку

При створенні застосунку необхідно було вирішити, яка архітектура застосунку, саме кодової частини програми буде використана.

Проаналізувавши необхідні вимоги до застосунку було вирішено розглядати архітектури MV(X).

Основні частини MV(X) архітектур – це, так чи інакше, моделі, види та контролери.

- Модель - відповідає за використання предметних (бізнес, domain) даних

- View - відповідає за шар подання (GUI). Саме цей слой відповідає за відрисовку UI компонентів. View не знає нічого про бізнес-логіку застосунку, він лише малює те, що йому говорить контроллер.

- Контролер/Презентер/ViewModel – так чи інакше відповідають за зв'язок моделі з контролером. Здебільшого займаються тим, що прокидають події моделі на вигляд, а події виду – на модель, відповідним чином їх перетворюючи та обробляючи. Наприклад, змінюючи модель у відповідь на дії користувача на екрані (виді), або змінюють вигляд у відповідь на зміни моделі. Зазвичай є пасивними учасниками процесу і реагують лише зовнішні стимули (події від Виду чи Моделі).

При запуску програми головний View контролер завантажує список запитань. Екран формується із одного запитання та поділяється на три блоки. Цей екран можна побачити на рисунку 3.

Для створення можливості контролювати свої результати у застосунку було вирішено створювати статистику із відповідями на запитання. Для того, щоб ця статистика не видаляється при кожному закритті застосунку було вирішено використовувати локальну базу даних, яка б запам'ятовувала всі результати та на базі цих даних формувалася статистика.

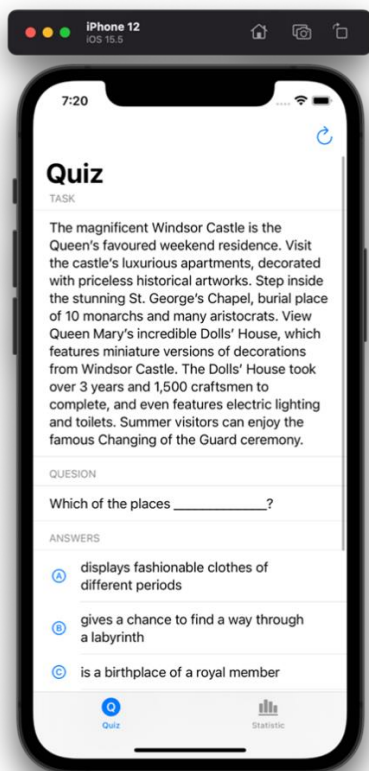


Рис. 3 – Екран із запитанням

Для цього було вирішено використовувати базу даних Realm. Для запису та витягання даних з неї повинні бути створені об'єкти (класи) типу Object.

Даний клас повинен вміщати в себе всі необхідні поля моделі, які необхідно зберігати та які в подальшому використовуються.

Як вже було сказано, для перевірки рівня знань було використано метод тестування із різними видами запитань. Всі запитання беруться із файлу типу JSON. Для завантаження списку запитань був створений метод `getExercise()` (рис. 4).

```
private func getExercises() {
    guard let jsonData = self.readLocalFile(for: "questions") else { return }
    do {
        self.exercises = try JSONDecoder().decode([Exercise].self, from: jsonData)
        self.results = []
        self.updateExercise()
    } catch {
        showAlert(error: error)
    }
}
```

Рис. 4 – Метод завантаження завдань

Сама таблиця бере дані, які їй надійшли із файлу, ці дані представлені у вигляді масиву моделей завдань. Після чого витягується рандомним образом завдання, перевіряється його тип та виходячи з цього типу таблиця формує або коміркою із відео-файлом, або з фото, або просто із текстом. Те ж саме відбувається і з коміркою, що містить відповіді. Там також перевіряється тип відповіді і в залежності від цього формується комірка (Рис. 5).

Для перевірки правильності обраної користувачем відповіді береться індекс комірки із відповіддю, після цього в конкретній моделі відповіді, так званій моделі під назвою Answer, яка була заповнена із JSON файлу,

є поле булевого типу під назвою `isRight`. Саме це поле відповідає за правильність даної відповіді.

В кожному запитанні є лише одна правильна відповідь. Тож лише у одній моделі Answer поле `isRight` буде дорівнювати `true`.

Будь який мобільний застосунок перед виведенням його на всебічне користування необхідно протестувати. У застосунку повинен бути адаптивний під різні діагоналі пристроїв UI, у застосунку не повинно бути збоїв, тобто життєвий цикл застосунку не повинен перериватися. Цикл повинен завершуватися лише тоді, коли користувач вийде з застосунку.

По-перше, необхідно було перевірити швидкість роботи застосунку та його вплив на оперативну та постійну пам'ять телефону. Результати тестування наведені на рисунку 6.

Для перевірки адаптивності інтерфейсу застосунків до різних діагоналей пристроїв було протестовано застосунок на iPhone 12, що має середню довжину діагоналі екрану, iPhone 13 Pro Max із найбільшим екраном, та iPhone SE першого покоління, який має найменшу довжину діагоналі екрану.

```
switch model {
    case .task(let task):
        switch task.type {
            case .video:
                let cell = tableView.dequeueReusableCell(cellClass: VideoCell.self, forIndexPath: indexPath)
                cell.model = model
                return cell
            case .picture:
                let cell = tableView.dequeueReusableCell(cellClass: ImageCell.self, forIndexPath: indexPath)
                cell.setValues(model: model)
                return cell
            default:
                return cell
        }
    case .answer(let answer):
        switch answer.type {
            case .picture:
                let cell = tableView.dequeueReusableCell(cellClass: ImageCell.self, forIndexPath: indexPath)
                cell.setValues(model: model, option: alphabet[indexPath.row])
                return cell
            case .text:
                cell.imageView?.image = UIImage(systemName: "\([alphabet[indexPath.row]).circle")
            default:
                break
        }
}
```

Рис. 5 – Формування таблиці із завданнями

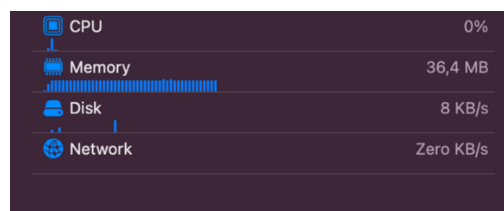


Рис. 6 – Вплив застосунку на CPU, постійну пам'ять, оперативну, та кількість витрачених kb/s

Висновки.

В результаті проведеної роботи було створено мобільний застосунок для контролю рівню знань іноземної мови.

Цей застосунок дає змогу швидко і легко перевірити рівень знань іноземної мови користувача, а також проаналізувати отримані результати та слідкувати за прогресом, що представлений у вигляді статистики, яка зберігається у базі даних та дозволяє користувачеві у будь який час відстежити свій прогрес. Застосунок був створений на платформі IOS за допомогою мови програмування Swift та повністю відповідає вимогам документації програмного продукту.

Розглянуто та використано на практиці роботу із

Cocoa Pods та об'єктно-орієнтованою базою даною RealmSwift. Крім цього, застосунок працює із даними у форматі JSON, що дозволяє завантажувати список запитань та відображати їх користувачеві.

В ході роботи було розроблено методику, за допомогою якої реалізовувалася перевірка знань користувача. Це перевірка за допомогою тестувань із різними типами запитань. Також були розглянуті та проаналізовані існуючі на ринку альтернативні застосунки. В ході розробки мобільного застосунку були використані такі бібліотеки, як Foundation, UIKit, RealmSwift та інші. Крім цього, було вивчено та додано у програму роботу з об'єктно-орієнтованою не реляційною базою даних для мобільних девайсів під назвою Realm.

В результаті наукової роботи було розроблено логіку та структуру мобільного застосунку та реалізовано його графічний інтерфейс, проаналізовано переваги та недоліки отриманого результату, а також порівняно застосунок із існуючими аналогами на ринку, а також було проведено UI тестування, тестування сумісності, а також проведено функціональне тестування.

Список літератури

1. Панова Л.С. Методика навчання іноземних мов у загальноосвітніх навчальних закладах /Л.С. Панова, І.Ф. Андрійко, С.В. Тезікова, С.І. Потапенко// Київ Видавничий центр «Академія». - 2010.
2. Присяжна О.Д. Методичні вказівки Перевірка знань іноземної мови (англійської) студентами 1 курсів усіх спеціальностей / О.Д. Присяжна, Л.В. Варчук// Нульовий контроль, 2017.
3. Загальноєвропейські рекомендації з мовної освіти: вивчення, викладання, оцінювання /Науковий редактор українського видання доктор пед. наук, проф. С.Ю.Ніколаєва. - К.: Ленвіт, 2003.-273с.
4. V.V. Subrahmanyam, Kailasam Swathi, A Study on Mobile Operating Systems and their Recent Advances// Osmania University Campus, Hyderabad, 2011.

5. M. Landman Managing smart phone security risks. Information Security Curriculum Development Conference, ser.InfoSecCD '10. - New York, NY. - 2010. - pp. 145–155. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/1940941.1940971>
6. Rostislav Fojtik. Swift a New Programming Language for Development and Education. - Digital Science, 2019. - pp.284-295.
7. ZahidaParveen, Nazish. F. Performance Comparison of Most Common High Level Programming Languages, International Journal of Computing Academic Research. - vol. 5, number 5. - 2016. - pp. 246-258.
8. Marin Todorov Realm: Building Modern Swift Apps with Realm Database (Second Edition). - Razeware LLC. - 2019. - 307 p.

References (transliterated)

1. Panova L.S. Metodyka navchannia inozemnykh mov u zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladakh /L.S. Panova, I.F. Andriyko, S.V. Tezikova, S.I. Potapenko// Kyiv Vydavnychyy tsentr «Akademiia». - 2010.
2. Prysiazna O.D. Metodychni vkazivky Perevirka znan inozemnoi movy (anhliiskoi) studentamy 1 kursiv usikh spetsialnostei / O.D. Prysiazna, L.V. Varchuk// Nulovyi kontrol, 2017.
3. Zahalnoievropeiski rekomendatsii z movnoi osvity: vyvchennia, vykladannia, otsiniuvannia /Naukovyy redaktor ukraïnskoho vydannia doktor ped. nauk, prof. S.Iu.Nikolaieva. - K.: Lenvit, 2003.-273s.
4. V.V. Subrahmanyam, Kailasam Swathi, A Study on Mobile Operating Systems and their Recent Advances// Osmania University Campus, Hyderabad, 2011.
5. M. Landman Managing smart phone security risks. Information Security Curriculum Development Conference, ser.InfoSecCD '10. - New York, NY. - 2010. - pp. 145–155. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/1940941.1940971>
6. Rostislav Fojtik. Swift a New Programming Language for Development and Education. - Digital Science, 2019. - pp.284-295.
7. ZahidaParveen, Nazish. F. Performance Comparison of Most Common High Level Programming Languages, International Journal of Computing Academic Research. - vol. 5, number 5. - 2016. - pp. 246-258.
8. Marin Todorov Realm: Building Modern Swift Apps with Realm Database (Second Edition). - Razeware LLC. - 2019. - 307 p.

Надійшла (received) 13.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Красуля Дар'я Олексіївна (Krasulia Daria) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістр комп'ютерних наук; тел: (066)346-57-14; e-mail: daria.krasulia@infiz.khpi.edu.ua.

Іванченко Ксенія Вікторівна (Ivanchenko Kseniia) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (097) 437-89-74; e-mail: xeniya.ivanchenko@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0960-1200>

Іванченко Дмитро Анатолійович (Ivanchenko Dmytro) – кандидат технічних наук, доцент, Приазовський Державний Технічний Університет, доцент кафедри рухомого складу транспортних систем; тел: (096) 368-12-37; e-mail: ukrsarterps@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3024-3930>

Ю. А. ПЛАКСІЙ, Ю. О. КУЗНЕЦОВ

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОРІЄНТАЦІЇ ТВЕРДОГО ТІЛА В КВАТЕРНІОНАХ ЧЕРЕЗ ПОСЛІДОВНІСТЬ ЕЙЛЕРОВИХ КУТІВ ДЛЯ ТОЧНОСНОГО АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ В БІНС

Розглянуті дві концепції побудування аналітичних тестових кутових рухів твердого тіла для опрацювання алгоритмів орієнтації при проектуванні безплатформених систем орієнтування. Перша концепція ґрунтується на представленні кватерніона орієнтації в послідовності трьох ейлерових кутів. Друга концепція базується на формалізованому представленні кватерніона у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних аргументів і не має чіткої наочної інтерпретації через кути елементарних поворотів. Аналітичні вирази для модельної кутової швидкості при цьому можуть бути отримані з оберненого кінематичного рівняння в кватерніонах. Розглянутий загальний випадок лінійних кутів Крилова і Ейлера, а також випадок, коли один з кутів не змінюється з плином часу. Проведено аналітично-чисельне моделювання кутового руху твердого тіла і оцінювання точності алгоритма визначення кватерніона на основі розкладень четвертого і п'ятого порядків з попереднім застосуванням алгоритма Міллера. Для цього модель тестового руху доповнюється моделюванням ідеальної інформації з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат з використанням аналітичних формул для вектора позірної повороти. Показано, що формули п'ятого порядку забезпечують покращення оцінки накопиченого обчислювального дрейфу в порівнянні з формулами четвертого порядку.

Ключові слова: ейлерові кути, вектор орієнтації, кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, алгоритм орієнтації Міллера, чисельно-аналітичне моделювання, накопичений дрейф.

Two concepts for constructing analytical angular test motions of a rigid body for testing orientation algorithms when designing strapdown orientation systems are considered. The first concept is based on representing the orientation quaternion in a sequence of three Euler angles. The second concept is based on a formalized representation of the quaternion as a superposition of trigonometric functions of linear arguments and does not have a clear visual interpretation through the angles of elementary rotations. Analytical expressions for the model angular velocity can be obtained from the inverted kinematic equation in quaternions. The general case of linear Krylov and Euler angles is considered, as well as the case when one of the angles does not change over time. Analytical-numerical modeling of the angular motion of a rigid body and an assessment of the accuracy of the algorithm for determining the quaternion based on fourth- and fifth-order expansions with preliminary application of the Miller algorithm were carried out. For this purpose, the test movement model is supplemented by modeling ideal information from the outputs of angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates using analytical formulas for the apparent rotation vector. It is shown that fifth-order formulas provide an improved estimate of the accumulated computational drift compared to fourth-order formulas.

Keywords: Euler angles, orientation vector, quaternion, reference model, test motion, quasi-coordinates, Miller orientation algorithm, numerical-analytical modeling, accumulated drift.

Вступ. Розглядається задача точного аналізу і опрацювання алгоритмів визначення орієнтації [1] в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС), яка має місце на етапі проектування системи орієнтації рухомого об'єкта. Зусиллями багатьох дослідників на теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації по ідеальній інформації з тріади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат [2-6]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної з рухомим об'єктом системи координат. Роботи з розробки і удосконалення відомих алгоритмів орієнтації тривають і досі [7, 8].

Для більшості прикладних задач в якості параметрів орієнтації застосовуються кватерніони, оскільки кватерніонне кінематичне рівняння є лінійним, має перший інтеграл, і операції перетворення векторів легко виконуються за допомогою кватерніонів. Однак, розкладення кватерніонного кінематичного рівняння в ряд в термінах квазікоординат (1) призводить до низки однокрокових алгоритмів, які практично обмежуються четвертим порядком. При цьому алгоритми третього і четвертого порядку вимагають спеціальної «розгонки». Ці обставини призвели до використання вектора орієнтації в якості «проміжного» параметру при

обчисленні кватерніона орієнтації [2,4,10,11]. Значний доробок в розробку алгоритмів визначення вектора орієнтації різного порядку в Україні вніс А.Панов [11,12]. Ним була розроблена низка алгоритмів, що використовують первинну інформацію (1) з різних тактів знімання.

В умовах високої швидкодії сучасних автономних обчислювачів виникає можливість підвищення точності орієнтації за рахунок використання інформації про квазікоординати (1) всередині такту обчислень, що є особливо важливим для високодинамічних об'єктів. Більшість таких алгоритмів заснована на поліноміальній апроксимації вектора кутової швидкості всередині кроку обчислень з використанням наближеного рівняння Борца [2].

В відомому алгоритмі Міллера [4] приріст вектора орієнтації $\vec{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2}, \theta_{n3})$ на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^1 \times \vec{\theta}_n^3) + \beta \vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (2)$$

а вихідні сигнали гіроскопів $\vec{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$, $\vec{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$, $\vec{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$ формуються всередині такту обчислень в точках знімання первинної інформації (1) $t_{n-1} + 1/3 \Delta T$,

$t_{n-1} + 2/3 \Delta T$, $t_{n-1} + \Delta T$, де ΔT – величина такту обчислень. Міллером на основі оптимізації під конічний рух отримано, що $\alpha = 33/80$, $\beta = 57/80$.

Для коректного оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації зазвичай використовують спеціальні тестові рухи твердого тіла у вигляді еталонних моделей, для яких кватерніон орієнтації і квазікоординати (1) представляються аналітичними залежностями від часу [13]. Такі тестові рухи можуть бути також застосовані для оптимізації алгоритмів орієнтації на основі мінімізації відповідних методичних похибок. Так, наприклад, коефіцієнти алгоритму (2) були отримані Міллером на основі оптимізації аналітичного виразу похибки орієнтації у вигляді степеневого ряду. Ця методика отримала подальший розвиток в роботах [9,14-16]. Характерно, що в якості тестового руху розглядався конічний (прецесійний) рух твердого тіла, для якого відомі аналітичні розв'язки в елементарних функціях сукупності кінематичних і динамічних рівнянь обертання твердого тіла.

Інший підхід до побудови тестових рухів запропоновано в роботах [17-24]. Відповідно до цього підходу в основу побудови еталонної моделі обертального руху, яка включає в собі аналітичні залежності від часу для кватерніону орієнтації $\Lambda(t)$, проєкцій вектора кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ і вектора позірного повороту

$$\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt, \quad (3)$$

покладається кватерніонна кінематична модель у вигляді певної конструкції з тригонометричних функцій від лінійних аргументів. Це дозволяє знайти аналітичні залежності від часу для проєкцій вектора кутової швидкості на основі оберненого кінематичного рівняння

$$\vec{\omega}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t),$$

де $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон до $\Lambda(t)$, і для вектора позірного повороту (3). Представлення кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних кутів забезпечує автоматичне його нормування $\|\Lambda\| = 1$. При цьому *формалізованому підході* модельний кватерніон в загальному випадку неможливо представити через послідовність елементарних поворотів на ейлерові кути. Окремим також вбачається питання реалізованості модельного руху на основі аналізу оберненої задачі динаміки.

В роботі [8] наведена аналітична модель кутового руху твердого тіла на основі представлення кватерніона в послідовності чотирьох поворотів на лінійні кути і знайдені оптимізовані коефіцієнти алгоритму Міллера для цієї моделі.

В даній роботі розглядаються методологічні аспекти застосування опису кінематики обертального руху на основі ейлерових кутів для моделювання тестових рухів твердого тіла.

Аналітичні моделі кутового руху твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації через послідовність кутів. Як відомо [25], послідовність трьох обертань навколо різних

неспівпадаючих осей задає довільне перетворення обертання на ейлерові кути. При обертанні навколо координатних осей звичайно розрізняють дві послідовності обертань: повороти на кути Ейлера і повороти на кути Крилова.

Кватерніон результуючого повороту у випадку кутів Крилова має вигляд:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3, \quad (4)$$

де $\Lambda_1 = (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2})$, $\Lambda_2 = (\cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_2 \sin \frac{\psi}{2})$,

$\Lambda_3 = (\cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2})$, φ, ψ, ϑ - кути курсу, крену і тангажу.

У випадку кутів Крилова кватерніони елементарних поворотів в формулі (4) мають вигляд:

$$\Lambda_1 = (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}), \Lambda_2 = (\cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\psi}{2}), \Lambda_3 = (\cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{i}_2 \sin \frac{\vartheta}{2}), \text{ де кути } \varphi, \psi, \vartheta - \text{відповідно кути прецесії, нутації і власного обертання.}$$

У випадку послідовності кутів Крилова маємо наступні кінематичні рівняння, розв'язані відносно проєкцій вектора кутової швидкості:

$$\omega_1(t) = \dot{\vartheta} - \dot{\varphi} \cdot \sin \psi; \\ \omega_2(t) = \dot{\varphi} \cdot \cos \psi \cdot \sin \vartheta + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta;$$

$$\omega_3(t) = \dot{\varphi} \cdot \cos \psi \cdot \cos \vartheta - \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta, \quad (5)$$

де $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$, $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t)$.

Відповідне перетворення для кватерніона орієнтації через кути Крилова в загальному випадку має вигляд:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}; \\ \lambda_1 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2}; \\ \lambda_2 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}; \\ \lambda_3 = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (6)$$

Очевидно, що початкове значення кватерніона (6) $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$.

У загальному випадку кутів Ейлера $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$ кінематичні рівняння мають вигляд:

$$\omega_1(t) = \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi; \\ \omega_2(t) = -\dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi; \\ \omega_3(t) = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta, \quad (7)$$

де $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$, $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t)$.

Кватерніон орієнтації в цьому випадку можна обчислити за формулами:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos(\frac{\psi+\varphi}{2}); \lambda_1 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos(\frac{\psi-\varphi}{2});$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right); \quad \lambda_3 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\psi + \varphi}{2} \right); \quad (8)$$

Для представлення (8) початковий кватерніон $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$. Якщо задати належним чином закон змінення кутів за часом $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, то моделі обертання (5), (6) і (7), (8) можна інтерпретувати як аналітичні розв'язки сукупності кватерніонного кінематичного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0.5 \Lambda(t) \circ \vec{\omega}(t)$$

і динамічного рівняння Ейлера

$$J \cdot \vec{\omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times J \times \vec{\omega}(t) = \vec{M},$$

де J - тензор інерції, $\vec{M}$ - вектор моменту зовнішніх сил. Аналіз показав, що це має місце тільки тоді, коли закон змінення кутів є лінійним за часом

$$\varphi = k_1 t, \psi = k_2 t, \vartheta = k_3 t. \quad (9)$$

В цьому випадку розв'язки системи динамічних і кінематичних рівнянь і результат інтегрування (3) можуть бути представлені через елементарні функції, а відповідні моделі обертання можна вважати *еталонними* для відпрацювання алгоритмів визначення параметрів орієнтації.

Для кутів Крилова в умовах їх лінійності (9) маємо наступні залежності для проекцій вектора кутової швидкості на зв'язані осі:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 - k_1 \cdot \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) + k_2 \cdot \cos(k_3 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - k_2 \cdot \sin(k_3 t), \end{aligned} \quad (10)$$

Окремо розглянемо випадок, коли початковий кут тангажу $\vartheta = k_3$ не змінюється з часом. Тоді з (10) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= -k_1 \cdot \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3) + k_2 \cdot \cos(k_3); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3) - k_2 \cdot \sin(k_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Зазначимо, що для цього випадку кутового руху твердого тіла $\|\vec{\omega}(t)\|^2 = k_1^2 + k_2^2 = \text{const}$, але умови вільного обертання не виконуються, оскільки кінетична енергія $T = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2$

$\neq \text{const}$ і для кінетичного моменту $\vec{L}$ маємо:

$$L^2 = I_1^2 \cdot \omega_1^2 + I_2^2 \cdot \omega_2^2 + I_3^2 \cdot \omega_3^2 \neq \text{const}.$$

Початкові умови кутового руху з постійним кутом тангажу: $\Lambda(0) = (\cos(0.5 \cdot k_3), \sin(0.5 \cdot k_3), 0, 0)$, $\vec{\omega}(0) = (0, k_1 \cdot \sin(k_3) + k_2 \cdot \cos(k_3), k_1 \cdot \cos(k_3) - k_2 \cdot \sin(k_3))$.

Проекції вектора кутової швидкості на зв'язані осі у випадку моделювання кутового руху на основі лінійних кутів Ейлера в умовах (9) мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 \cdot \cos(k_1 t) + k_2 \cdot \sin(k_3 t) \cdot \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= -k_3 \cdot \sin(k_1 t) + k_2 \cdot \sin(k_3 t) \cdot \cos(k_1 t); \end{aligned}$$

$$\omega_3(t) = k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3 t).$$

(12)

Моделі обертання (6), (10) і (7), (12) в умовах, коли кути елементарних поворотів змінюються за лінійним законом (9), можна інтерпретувати як *трьохчастотні* моделі кутового руху.

Коли кут нутації є постійним, а кути прецесії і власного обертання є лінійними, маємо відомий випадок кінцевого руху твердого тіла, для якого з (12) маємо:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_2 \cdot \sin(k_3) \cdot \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= k_2 \cdot \sin(k_3) \cdot \cos(k_1 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Кінематична модель кінцевого руху має вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{k_3}{2} \cdot \cos \left(\frac{k_2 + k_1}{2} \cdot t \right); \quad \lambda_1 = \sin \frac{k_3}{2} \cdot \cos \left(\frac{k_2 - k_3}{2} \cdot t \right); \\ \lambda_2 &= \sin \frac{k_3}{2} \cdot \sin \left(\frac{k_2 - k_3}{2} \cdot t \right); \\ \lambda_3 &= \cos \frac{k_3}{2} \cdot \sin \left(\frac{k_2 + k_3}{2} \cdot t \right); \end{aligned} \quad (14)$$

Початкові умови для кінцевого руху (13), (14):

$$\Lambda(0) = (\cos(0.5 \cdot k_3), \sin(0.5 \cdot k_3), 0, 0),$$

$$\vec{\omega}(0) = (0, k_2 \cdot \sin(k_3), k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3)).$$

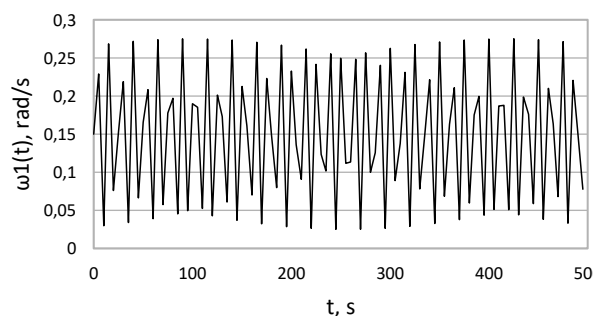
Для кінцевого руху маємо:

$$\|\vec{\omega}(t)\|^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_3) = \text{const}.$$

Якщо при цьому $\vec{M} = \vec{0}$ і два моменти інерції твердого тіла однакові ($I_1 = I_2$), то такий випадок кутового руху є вільною регулярною прецесією.

Очевидно, що модель кінцевого руху (13), (14) є *двочастотною* моделлю. Представлена модель кінцевого руху отримала широке застосування в аналізі і оптимізації алгоритмів орієнтації.

Програмно-чисельне моделювання кутового руху твердого тіла на основі послідовності кутів Крилова і Ейлера. Еталонні моделі в кутах Крилова. Проведена програмно-чисельна реалізація представленої узагальненої моделі обертального руху (6), (10) з тактом $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$, $k_3 = 0.35$. На рис. 1 наведені графіки проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі в залежності від часу.



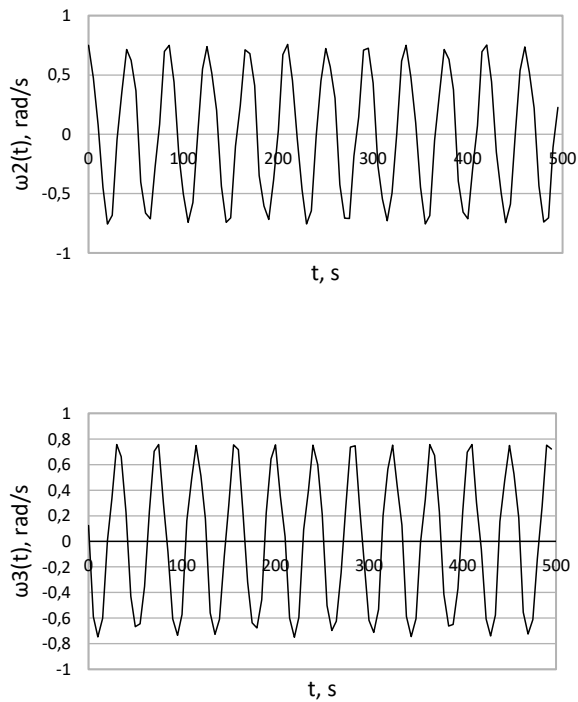


Рисунок 1 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Крилова (загальний випадок) на зв'язані осі

На також програмно-чисельна реалізація двохчастотної моделі обертального руху (6), (11) з тактом $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$ в умовах постійного кута тангажу $\vartheta = 0.35$ рад. Отримані при цьому графіки залежностей від часу проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі представлені на рис.2.

Еталонні моделі в кутах Ейлера. Програмно-чисельне моделювання обертального руху (7), (11) проведено з тактом обчислень $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$, $k_3 = 0.35$. На рис. 3 представлені графіки проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі в залежності від часу.

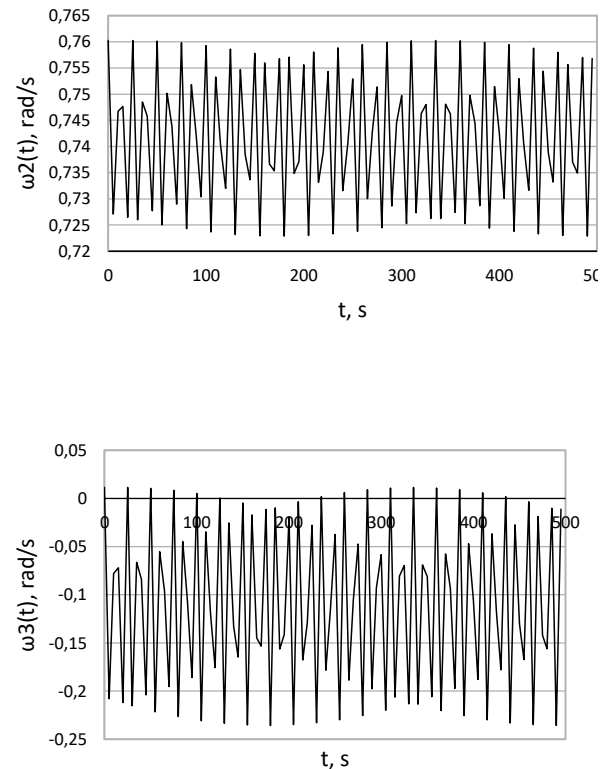
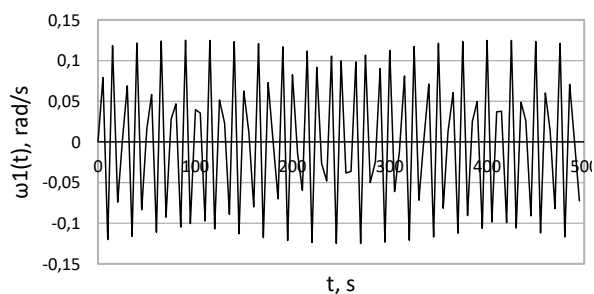
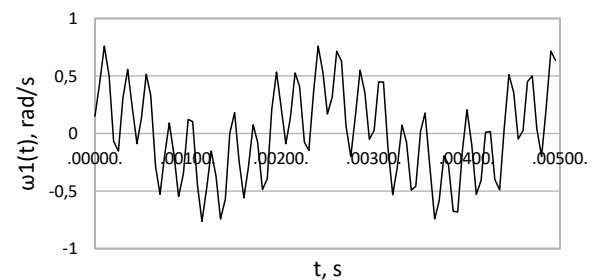


Рисунок 2 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Крилова (кут тангажу не змінюється з часом) на зв'язані осі

Чисельно-аналітичне моделювання конічного руху (7), (12) проведено на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$ в умовах постійного кута нутації $\vartheta = 0.35$ рад. Графіки залежностей від часу проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі представлені на рис.4.



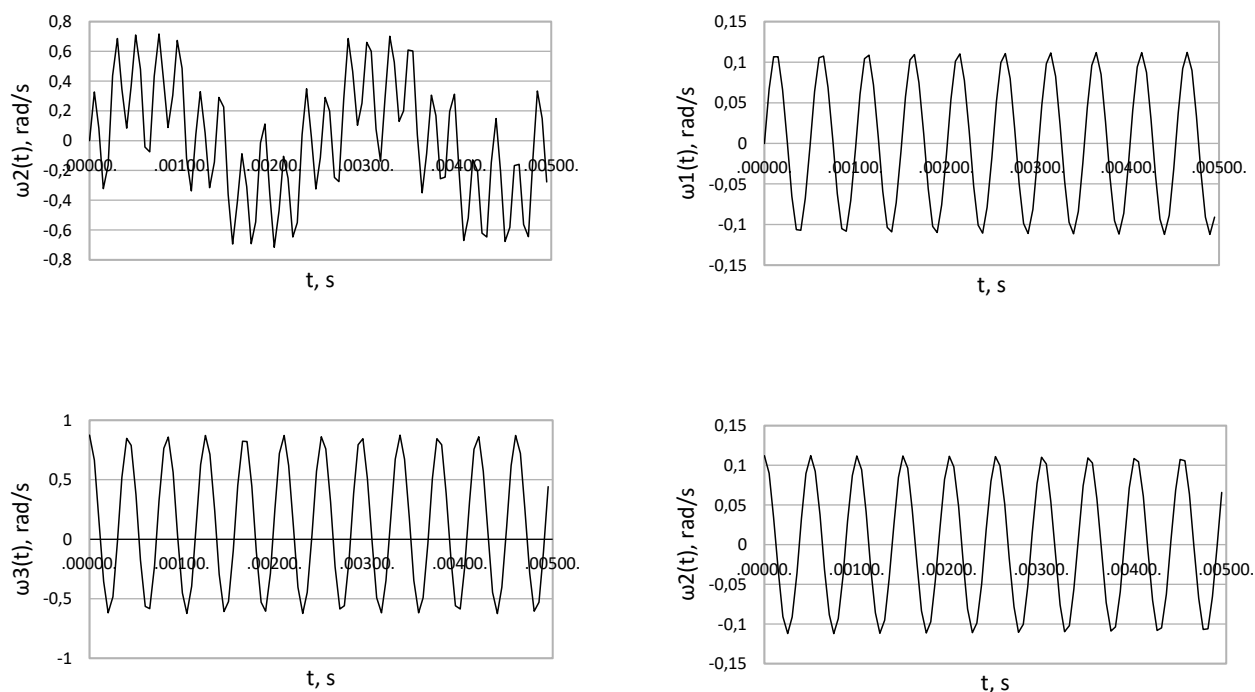


Рисунок 3 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Ейлера (загальний випадок) на зв'язані осі

Точносний аналіз алгоритму Міллера на еталонних моделях. Щоб визначити кватерніон повороту $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_n^*, \Delta\lambda_n^*, \Delta\lambda_n^*)$ на такі обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ на основі приросту вектора орієнтації за алгоритмом Міллера (2), можна використати дві схеми. За першою схемою, яка має четвертий порядок, маємо:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_n^* &= 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4, \\ \Delta\lambda_i^* &= (1/2)\theta_{ni}(1 - \theta_n^2/24), i = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (14)$$

де $\theta_n^2 = \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2$.

Друга схема має п'ятий порядок за рахунок збільшення кількості членів розкладання для векторної частини кватерніона повороту:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_n^* &= 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4, \\ \Delta\lambda_i^* &= (1/2)\theta_{ni}(1 - \theta_n^2/24 + \theta_n^4/1920), i = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (15)$$

Поточний кватерніон орієнтації при цьому може бути обчислений на основі застосування формули додавання кватерніонів.

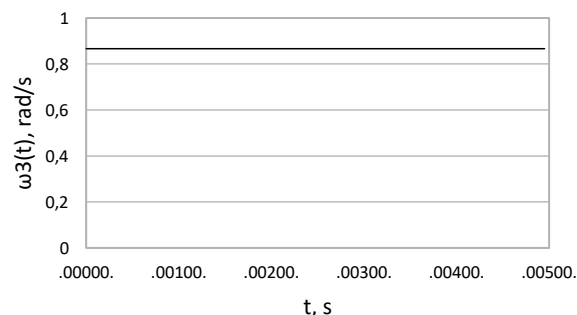


Рисунок 4 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі кінчного руху на зв'язані осі

Для оцінювання точності алгоритма орієнтації була застосована неусувна оцінка накопиченого обчислювального дрейфу в інтерпретації [8]. Експериментально показано, що для всіх наведених моделей оцінки накопиченого обчислювального дрейфу алгоритму обчислення кватерніона мають зростаючий характер. В таблиці 1 наведені отримані фінальні оцінки накопиченого дрейфу для низки моделей кутового руху, що розглядалися. Отримано, що алгоритм визначення кватерніонів на основі розкладень *п'ятого порядку* забезпечує кращу точність визначення кватерніонів за оцінкою накопиченого обчислювального дрейфу у зрівнянні з формулою *четвертого порядку* для всіх представлених моделей.

Таблиця 1. - Значення похибки накопиченого дрейфу від часу

Еталонна модель обертання	Похибка накопиченого дрейфу, рад	
	формули 4-го порядку	формули 5-го порядку
Кути Крилова (загальний випадок лінійних кутів)	6.528E-06	5.278E-06
Кути Крилова (кут тангажу не змінюється з часом)	6.062E-06	4.986E-06
Кути Ейлера (загальний випадок лінійних кутів)	5.944E-06	1.657E-06
Кути Ейлера (кут нутації не змінюється з часом)	1.310E-05	1.618E-08

Висновки. Представлені дві концепції побудування аналітичних тестових рухів твердого тіла для опрацювання алгоритмів орієнтації. Перша концепція основана на представленні кватерніона орієнтації в послідовності трьох ейлерових кутів і має наочну інтерпретацію. Друга концепція базується на формалізованому представленні кватерніона у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних аргументів і не має чіткої наочної інтерпретації через кути елементарних поворотів. При цьому для отримання аналітичних формул для модельної кутової швидкості застосовується обернене кватерніонне кінематичне рівняння.

Розроблена розрахункова програма мовою C++, яка дозволяє отримувати з заданим тактом еталонну кінематичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритма орієнтації і отримувати оцінку накопиченого дрейфу. Проведено оцінювання двох схем обчислення кватерніонів на основі використання алгоритма Міллера на тестових рухах і показано, що схема з використанням формул п'ятого порядку має більшу точність обчислення кватерніону у зрівнянні з формулою четвертого порядку.

В подальшому концепція побудування еталонних моделей кутового руху може бути розповсюджена на випадок поворотів навколо некоординатних осей.

Список літератури

1. Savage P.G. Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.
2. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.7, No.1, 1971, PP.61-66.
3. Musoff H., Murphy J.H. Study of Strapdown Navigation Attitude Algorithms, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 2, 287-290 (1995).
4. Miller R.B. A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287-291.
5. Плаксий Ю.А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації// Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП». – 2013. – №58 (1031). – С.168-177.
6. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К.: Наук. думка, 1995. – 280 с.
7. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm//International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 9, No 8, 2013, PP. 3449-3462.

8. Плаксий Ю.А. Гомозкова И.О. Анализ точности алгоритма ориентации Р. Миллера на четырехчастотный эталонный модели обертання твердого тіла //Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП». – 2019. – №22 (1347). – С.81-88.

9. Ignagni M.B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.13, No 2, 1990. P.363-369.

10. Mark J.G., Tzartas D.A., Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 4, 641-647 (2001).

11. Панов А.П. Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Космич. исслед. на Украине. – К.: Наук. думка, 1974. – Вып. 5. – С.76-82.

12. Панов А.П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып. 47. – С. 59-71.

13. Savage P.G. Strapdown Analytics, Strapdown Associates, Inc., Maple Plain, MN, 2000.

14. Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гироск. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105-112.

15. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3-9.

16. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С.47-52.

17. Плаксий Ю.А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі / Ю.А.Плаксий /Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків , №6(1178), 2016. С.96-104.

18. Плаксий Ю.А. Нові аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла: двочастотні мультиплікативні параметричні кватерніонні моделі / Ю.А.Плаксий /Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків , №16(1188), 2017. С.117-122.

19. Плаксий Ю.А. Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точного аналізу алгоритмів орієнтації БІНС/ Ю.А.Плаксий, І.О.Гомозкова /Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків , №27(1303), 2018. С.93-99.

20. Plaksiy Yu. A. Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation //The 7-th world Congress "AVIATION IN THE XXI CENTURY" Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.

21. Plaksiy Yu.A. New reference model of rotation for orientation algorithms analysis/ Yu.A.Plaksiy, I.A.Homozkova// Proceedings The 9-th world Congress "AVIATION IN THE XXI-st CENTURY" Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2020, Kyiv.-8 p. <http://congress.nau.edu.ua/>

22. Kuznetsov, Yu.A., Plaksiy, Yu.A. Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation //21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings. – 2014. -P. 357-360.

23. Plaksiy Yu. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ D.Breslavsky, I.Homozkova, K.Naumenko/ Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2021, 33(4). С. 1141-1160.

24. Кузнецов Ю.А., Деменков В.А. Оценка точности алгоритмов определения ориентации с учетом погрешности измерителей угловой скорости//Автоматика/Automatics - 2011, 28-30 вересня 2011 року, Львів, Україна. С.261-262.

25. Goldstein, H. The Euler Angles" and "Euler Angles in Alternate Conventions. §4-4 and Appendix B in Classical Mechanics, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 143-148 and 606-610, 1980.

References (transliterated)

1. Savage P.G. Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.
2. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.7, No.1, 1971, PP.61-66.

3. *Musoff H., Murphy J.H.* Study of Strapdown Navigation Attitude Algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2, 287-290 (1995).
4. *Miller R.B.* A new strapdown attitude algorithm. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287–291.
5. *Plaksiy Yu.A.* Stepenevi alhorytmy vyznachennia kvaternioniv oriantatsii ta yikh interpolatsiini modifikatsii [Degree algorithms for determining quaternions olaksiyf orientation and their interpolation modifications]. // *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines], – Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no 58 (1031), pp.168–177.
6. *Panov A.P.* Matematicheskie osnovy teorii inertsialnoy navigatsii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation] – K.: Nauk. dumka, 1995. – 280 s.
7. *Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z.* A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm//*International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No 8, 2013, PP. 3449-3462.
8. *Plaksiy Yu.A. Homozkova I.O.* Analiz tochnosti alhorytma oriantatsii R. Millera na chotyrokhschastotnii etalonnii modeli obertannia tverdoho tila [Analysis of the accuracy of R. Miller's orientation algorithm on the four-frequency reference model of rotation of a rigid body]//*Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU "KhPI". - Kh.: NTU "KhPI"]. – Kharkiv: NTU «KhPI». – 2019.– №22 (1347).– S.81–88.
9. *Ignagni M.B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.13, No 2, 1990. P.363–369.
10. *Mark J.G., Tzartas D.A.*, Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 4, 641-647 (2001).
11. *Panov A.P.* Dvushagovyie algoritmyi vyichislenii parametrov oriantatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]// *Kosmich. issled. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no 5, pp.76–82.
12. *Panov A.P.* Asimptoticheskie otsenki pogreshnostey metodov vyichisleniya parametrov oriantatsii tverdogo tela [Asymptotic error estimates for methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]// *Kibernetika i vyichisl. Tehnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1980, vol. 47, pp. 59-71.
13. *Savage P.G.* Strapdown Analytics, Strapdown Associates, Inc., Maple Plain, MN, 2000.
14. *Panov A.P.* Optimizatsiya metodov vyichisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions with conic vibrations of a rigid body]// *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
15. *Panov A.P.* Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vyichisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vyichislitel'naya tekhnika*. K. 1987. Vyp. 73, pp. 3-9.
16. *Panov A.P.* Adaptivnyie pretsessionnyie algoritmyi vyichisleniy kvaternionov vrascheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]// *Kibernet. i vyichisl. tehn* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, PP. 47–52.
17. *Plaksiy Yu.A.* Uzahalnennia trokhchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdoho tila. Druhyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of solid body rotation. The second type of model] // *Visnyk NTU «KhPI»* Matematychni modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №6(1178), 2016. PP.96-104.
18. *Plaksiy Yu.A.* Novi analitychni rozviazky rivnian obertannia tverdoho tila: dvochastotni multiplykatyvni parametrychni kvaternionni modeli [New analytical solutions of the equations of rotation of a rigid body: two-frequency multiplicative parametric quaternion models]//*Visnyk NTU «KhPI»*. Matematychni modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №16(1188), 2017. PP.117-122.
19. *Plaksiy Yu.A.* Novi dvochastotni etalonnii modeli obertannia tverdoho tila dlia tochnosnoho analizu alhorytmiv oriantatsii BINS/ Yu.A.Plaksiy, I.O.Homozkova // *Visnyk NTU «KhPI»*. Matematychni modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №27(1303), 2018. PP.93-99.
20. *Plaksiy Yu. A.* Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation //The 7-th world Congress “AVIATION IN THE XXI CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.
21. *Plaksiy Yu.A.* New reference model of rotation for orientation algorithms analysis/ Yu.A.Plaksiy, I.A.Homozkova// *Proceedings The 9-th world Congress “AVIATION IN THE XXI-st CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies*, September 19-21, 2020, Kyiv.-8 p. <http://congress.nau.edu.ua/>
22. *Kuznetsov, Yu.A., Plaksiy, Yu.A.* Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation //21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings.– 2014. -P. 357-360.
23. *Plaksiy Yu., Breslavsky D., Homozkova I., Naumenko K.* Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2021, 33(4). C. 1141–1160.
24. *Kuznetsov Yu.A., Demenkov V.A.* Otsenka tochnosti alhorytmov opredeleniya oryentatsyy s ucheto pohreshnosty yzmyrtelei uhlovoi skorosty [Estimation of the accuracy of orientation determination algorithms taking into account the error of angular velocity meters // *Automatics/Automatics*, 2011, 28-30 September 2011 Lviv, Ukraine. PP.261-262.
25. *Goldstein, H.* The Euler Angles" and "Euler Angles in Alternate Conventions. §4-4 and Appendix B in *Classical Mechanics*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 143-148 and 606-610, 1980.

Надійшла (received) 17.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Плаксій Юрій Андрійович (Plaksiy Yuriy) – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ “ХПІ”, Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Кузнєцов Юрій Олексійович (Kuznyetsov Yuriy) – кандидат технічних наук, доцент, начальник лабораторії НВП ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, Науково-виробниче підприємство ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, м. Харків; тел.: (050) 231-55-37; e-mail: kuznyetsovy@gmail.com.

В.М. ГРИЩЕНКО**СУЧАСНИЙ АЛГОРИТМ ЛІНІЙНОГО ТА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ ЗМІННОЇ СТРУКТУРИ В УМОВАХ КОНТАКТУВАННЯ**

Різноманітні математичні задачі, в яких поставлена мета пошуку екстремуму функціоналу, відносяться до задач математичного програмування, задач оптимізації. Практично спрямованих проблем пошуку оптимального рішення надзвичайно багато в економіці, управлінні, техніці та інших. Вони пов'язані з підвищенням ефективності виробництва, зниженням витрат ресурсів, удосконаленням конструктивних рішень та технологічних процесів, зниженням маси, габаритів тощо. Серед них важлива роль приділяється методам обмеження максимальних напружень, обумовлених зовнішніми навантаженнями. Розв'язання таких задач розпочинається з математичної формалізації. В якості параметрів варіювання вибирають конструктивні, економічні або технологічні показники. Пошук найкращого рішення зводиться до підбору сукупності параметрів, які надають стаціонарне значення функції цілі. Екстремальні задачі практичної орієнтації містять в математичних моделях обмеження типу рівності-нерівності. В поліпшенні технічних характеристик машин суттєва роль належить інженерно-технічним працівникам, які на етапі проектування знаходять оптимальні варіанти. При цьому суттєвим елементом процесу проектування є моделювання визначальних процесів в конструкціях з врахуванням основних факторів впливу та сценаріїв поведінки. Оптимізація – важливий напрямок прикладної математики, який надає ефективні інструменти проведення такого моделювання. В роботі [3] запропоновано Universal Algorithm – чисельну схему рішення задач квадратичного програмування (КП), для обчислення оптимальної точки широкого кола прикладних задач. При цьому задача лінійного програмування (ЛП) розглядається як частинний випадок задачі (КП). Тобто в універсальному алгоритмі постановки 2-х задач оптимізації формалізовані в єдиній та зручній формі симетричної матричної залежності, що дає змогу побудувати єдиний ефективний алгоритм на базі операцій матричної алгебри. Зокрема, дозволяє розглядати практичні задачі обчислення НДС в конструкціях змінної структури, що складаються з окремих частин пов'язаних односторонніми зв'язками. Основна ціль даної роботи в аналізі поведінки алгоритму при збільшенні кількості обмежень типу нерівності, уточненні обчислювальної схеми, формулюванні висновків. В якості прикладів роботи алгоритму розглянуті дві модельні задачі. Це класична "транспортна" задача ЛП та поведінка моделі мостової споруди з односторонніми зв'язками у вантах при варіаціях вітрових навантажень. Кількість вант збільшена до 20 а обмежень нерівностей до 40.

Ключові слова: лінійне та квадратичне програмування, оптимізація, деформування конструкцій змінної структури

Various mathematical problems, in which the goal of finding the extremum of a functional is set, belong to the problems of mathematical programming and optimization problems. Practically directed problems of finding the optimal solution are extremely numerous in economics, management, technology, and others. They are related to increasing production efficiency, reducing resource costs, improving design solutions and technological processes, reducing mass, dimensions, etc. Among them, an important role is given to the methods of limiting the maximum stresses caused by external loads. Solving such problems begins with mathematical formalization. Constructive, economic or technological indicators are chosen as variation parameters. The search for the best solution is reduced to the selection of a set of parameters that provide a stationary value of the objective function. Extreme problems of practical orientation contain equality-inequality constraints in mathematical models. In improving the technical characteristics of machines, a significant role belongs to engineering and technical workers, who find optimal options at the design stage. At the same time, an essential element of the design process is the modeling of the determining processes in structures, taking into account the main influencing factors and behavior scenarios. Optimization is an important area of applied mathematics that provides effective tools for such modeling. Universal Algorithm is proposed in work [3] – a numerous scheme for solving quadratic programming (QP) problems for calculating the optimal point of a wide range of applied problems. At the same time, the linear programming (LP) problem is considered as a partial case of the (QP) problem. That is, in the universal algorithm for setting 2 optimization problems, they are formalized in a single and convenient form of symmetric matrix dependence, which makes it possible to build a single effective algorithm based on matrix algebra operations. In particular, it allows you to consider the practical tasks of calculating VAT in constructions of a variable structure consisting of separate parts connected by one-way connections. The main goal of this work is to analyze the behavior of the algorithm when increasing the number of constraints of the inequality type, to refine the computational scheme, and to formulate conclusions. Two model problems are considered as examples of the algorithm. This is a classic "transport" problem of LP and the behavior of a model of a bridge structure with one-way connections in cables under variations of wind loads. The number of ropes has been increased to 20, and the limits of one-way connections to 40.

Keywords: linear and quadratic programming, optimization, deformation of structures of variable structure

Вступ. Викладаються теоретичні основи роботи Universal Algorithm (UA) та єдиної схеми обчислень задач лінійного (ЛП) та квадратичного програмування (КП) в сучасному трактуванні, направлені на їх широке використання в прикладних розрахунках. Результати даної роботи є продовженням досліджень, що були розпочаті в статті [3]. Увага головним чином направлена на застосування в двох прикладних напрямках. Це оптимізація об'єктів (Орті) та проблеми аналізу напружено-деформованого стану в конструкціях, що складаються з окремих лінійно деформованих частин, які в процесі експлуатації можуть допускати контактування (мають лінійні односторонні зв'язки). Будемо говорити про об'єкти змінної структури.

А загалом це комплекс проблем, для яких математична модель формалізується як задача квадратичного програмування. Що стосується першого напрямку, то існує загальний консенсус в розумінні тенденцій

розвитку різних видів ціле направленої діяльності. Це прагнення до постійного вдосконалення рішень в організаційній діяльності, системах управління, економіці та багатьох інших. Причому цей процес постійно ускладнюється на фоні значного зростання об'ємів інформації. Пошук найкращих рішень, які називаються оптимальними, потрібен для великої кількості проблем у виробничій діяльності, інженерній справі: зниження матеріалоемності, витрат енергії, ресурсів, збільшення довговічності і т.д.

При великому різноманітті задач Орті саме математика надає інструменти розв'язання проблем. Оптимізація – це важливий напрямок сучасної математики, одна з головних проблем прикладної математики. Про множини проблем, в яких ставиться за мету пошук екстремуму функціоналу, говорять як про задачі математичного програмування. Для практично спрямованих задач Орті потрібна їх формалізація у вигляді

математичної моделі. У формалізованому стані конструктивним, експлуатаційним характеристикам підбирають у відповідність параметри проектування з множиною допустимих значень. Пошук найкращого рішення полягає у підборі сукупності параметрів варіювання, які надають стаціонарне значення функціоналу якості. Зараз в науковій та учбовій літературі сформувався певна класифікація задач Опті по характерним ознакам та особливостям. Серед множини екстремальних задач в математичному програмуванні проблеми лінійного (ЛП) та квадратичного програмування (КП) розглядаються як два окремих класи з різними підходами до їх аналізу. Більш того, в багато чисельній літературі, присвяченій алгоритмам пошуку оптимальної точки в ЛП, склались різні варіації, спостерігається різноманіття підходів. Проте в цих задачах є багато спорідненого. Наприклад, задачі ЛП виглядають як вироджений випадок класу задач КП. Візьмемо також такий аргумент: якщо вилучити з постановки задачі ЛП обмеження, то проблема лінійного програмування зникає. Чисельний універсальний алгоритм, викладений в роботі, вказує на єдність підходу до рішення цих двох задач, як задач одного класу КП. Це один з напрямків застосування УА в практичних проблемах Опті.

Тепер звернемо увагу на інші не менш важливі об'єкти досліджень, які в кінцевому рахунку є родинним до проблем Опті. Це задачі аналізу НДС в будівельній механіці, суцільному середовищі, машинобудуванні, що також належать до надзвичайно актуальних. Тенденції розвитку машинобудування пов'язані з розширенням номенклатури машин, необхідністю забезпечення галузей промисловості високопродуктивним та економічним устаткуванням. Основні показники якості цих виробів (техніко-економічні, матеріалоємності, надійності тощо) закладаються ще на стадії проектування, коли вирішальна роль належить інженерно-технічній складовій. Забезпечення цих критеріїв потребує моделювання основних процесів роботи з більш достовірним врахуванням сценаріїв поведінки конструкцій, факторів впливу, подробиць функціонування. Важливо одержувати вичерпну інформацію про силовий стан конструкції на різних режимах.

При цьому особливе значення мають методи визначення та конструктивного регулювання напруженого стану, їх максимальних значень, обумовлених зовнішніми навантаженнями; контролюванням концентрації напружень в небезпечних перерізах. В наш час, в своїй більшості, детально розроблені та успішно застосовуються (зокрема, з використанням САПР) розрахункові моделі складних конструкцій, які представляють їх як єдиний об'єкт, без врахування взаємного руху одних частин по відношенню до інших. Реальні умови роботи машин більш складні, винятково різноманітні, навантаження в більшості випадків змінні. При проектуванні машин ці умови часто задаються типовими програмами навантажень.

Такий характер зміни навантажень може призводити до зміни структури самої конструкції внаслідок дотикань – відривів її різних частин, наприклад, в кінематичних парах, в односторонніх зв'язках. Серед

науковців, інженерів значну увагу викликають явища, що відбуваються безпосередньо в зонах контактів, та які складають відомий напрямок під назвою "контактна задача". В цій роботі розглядається інший аспект контактування, саме той, що пов'язаний зі зміною структури самої конструкції. Та який вносить особливості в передачу навантаження по силовому ланцюгу, в характер розподілу напруженості, зміну зв'язків у з'єднаннях між частинами (рис.1). Відбувається суттєвий перерозподіл силових потоків по несучим частинам конструкцій. Можливості моделювання таких сценаріїв потребують розробки методів аналізу конструкцій змінної структури.

Разом з цим потрібно також відмітити, що ряд фундаментальних законів природи формуються у вигляді екстремальних принципів, а рішення знаходяться з використанням оптимальних підходів в інженерії. Так серед методів, що найбільш широко використовуються при рішенні різних крайових задач, теорії пружності, будівельної механіки знаходяться варіаційні. Варіаційні підходи приводять проблему до визначення функцій, що надають силовим функціоналам енергії мінімальних значень. Стан рівноваги деформованої консервативної системи – це положення, в якому енергетична функція роботи всіх сил системи має стаціонарне значення. Методи Рітца, МСЕ, що надають об'єктам дискретну форму, дозволяють привести варіаційну задачу до задачі на пошук екстремуму функції багатьох незалежних змінних.

Таким чином, в цьому розділі наведені два з багатьох практичних напрямків, які можуть бути формалізовані у вигляді задач ЛП та КП, рішення яких мають важливі практичні застосування.

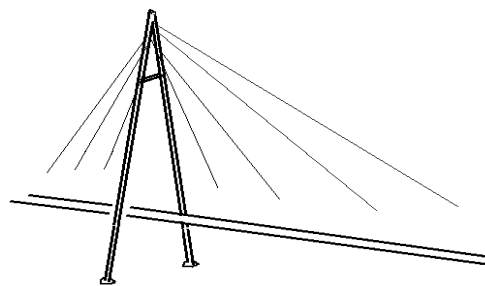


Рис. 1 – Приклад споруди з односторонніми зв'язками

Ціль даної роботи полягає в деталізації наведеної схеми; аналізі роботи алгоритму УА при збільшенні числа обмежень типу нерівності; аналізі чисельних розрахунків, на прикладах, що допускають відносно прості рішення. Зокрема, розглянута задача деформування моделі вантової споруди, кількість вант якої збільшена до 20 а односторонніх обмежень типу нерівності до 40.

1. Постановка задач пошуку оптимальної точки ЛП та КП. Формулювання постановок задач, теоретичних основ, обчислювальних схем визначення оптимальної точки відомі. Їх можна знайти в багато чисельній літературі [1,4-12]. Загалом під задачею НП розуміють пошук точки x^* мінімуму функції якості $f(x)$ від n змінних:

$$f(x^*) = \min f(x), \quad (x \in X);$$

де допустима точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ належить області X , яка обмежена m умовами рівності:

$$\omega_j(x) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad m < n;$$

та s умовами нерівності:

$$\Omega_j(x) \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

$$X = \{x \in R_n; \omega_j = 0, (j = 1, \dots, m), m < n; \Omega_j \leq 0, (j = 1, 2, \dots, s)\}.$$

Точка x^* може знаходитись як всередині областей Ω_j так і на їх границях.

В даному алгоритмі коло проблем обмежується задачами квадратичного програмування (1):

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T K x - x^T R \rightarrow \min,$$

$$\omega(x) = cx - \delta = 0;$$

$$\Omega(x) = ax - \Delta \leq 0;$$

де: c, a – задані матриці;

R, δ, Δ – задані вектори коефіцієнтів.

В задачах механіки деформованого твердого тіла K – є матрицею жорсткості, а $f(x)$ – квадратичним функціоналом енергії.

В такій постановці задача ЛП з функціоналом

$$f(x) = -x^T R \rightarrow \min$$

є частинним випадком задачі КП, коли $K = 0$. Наведена формалізація цілком відповідає проблемі деформування конструкцій, що складаються з набору окремих лінійно деформованих блоків, та які здатні при дії зовнішнього навантаження змінювати структуру з контактуванням частин.

2. Теоретичні положення універсального алгоритму. Нагадаємо основні положення проблеми та універсального алгоритму УА для задач ЛП та КП, які викладені в роботі [3]. Для загального випадку задачі НП з обмеженнями нерівності Кун і Такер запропонували підхід з невизначеними множниками аналогічними класичним лагранжевим. Для цього введено функціонал Лагранжа у вигляді:

$$L(x, u, t) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^s t_j \Omega_j(x).$$

У наведеній формі множники u_j при обмеженнях рівності, виступають як неперервні функції, в той час як множники t_j при обмеженнях нерівності є розривними. Зручно невизначені множники Лагранжа t_j вважати розділеними на неперервний множник Лагранжа $v_j(x)$ та розривну частину $w_j(x)$:

$$t_j = v_j w_j;$$

$$\text{де: } w_j(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{sign}(\Omega_j(x)) \right), \quad \text{sign}(0) = 1.$$

Це дає змогу формально обмеження типу нерівності $\Omega_j \leq 0$ перевести в еквівалентні обмеження типу рівності для $w_j \Omega_j(x) = 0$, які позначають одну й ту ж саму область (рис.2).

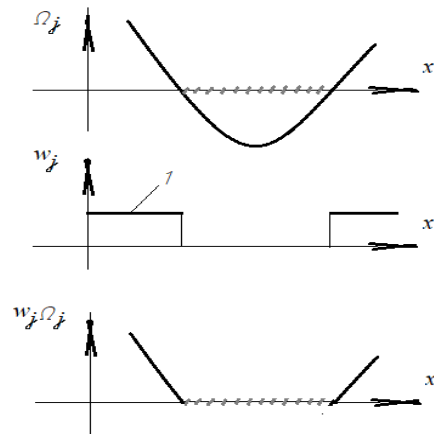


Рис. 2 – Еквівалентні обмеження типу нерівності $\Omega_j \leq 0$ та рівності $w_j \Omega_j(x) = 0$

Таким чином, задачу НП з обмеженнями типу нерівності можна розглядати як еквівалентну класичну задачу з обмеженнями рівності з функціоналом:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^s v_j w_j \Omega_j(x)$$

За допомогою методу множників u_j, v_j встановлюються необхідні умови мінімуму. Для випадку квадратичного та лінійного функціоналів маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Kx - R + c^T u + a^T v w = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = cx - \delta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \text{diag}(w)(ax - \Delta) = 0, \text{ або: } w_j \Omega_j = 0.$$

Зручно побудовані рівняння формалізувати в матричній формі, залучивши до неї функціонал $f(x)$:

$$\begin{bmatrix} K & c^T & a^T & R \\ c & \cdot & \cdot & \delta \\ a & \cdot & \cdot & \Delta \\ R^T & \delta^T & \Delta^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Суть алгоритму УА в тому, що постановки 2-х класів задач оптимізації об'єднані в єдиний та зручний формі симетричної матричної залежності, рішення яких як єдиний алгоритм можна побудувати на базі операцій матричної алгебри.

Прийmemo до уваги, що основна матриця A отриманої системи є симетричною. До складу невідомих, що підлягають визначенню, включені такі вектори: x, u, t, Ω розмірами n, m, s, s загальною кількістю $(n+m+2s)$. Зауважимо що в цю групу одночасно входять як множники Лагранжа t при обмеженнях нерівності, так і самі значення нерівності Ω .

t і Ω будемо називати ключовими невідомими, а x і u штатними. Розглянемо тепер структуру системи (2) в термінах числа рядків. Матриці K, c , і a формують систему рівнянь розмірами n, m, s , загалом $(n+m+s)$. Таким чином, система (2) є невизначеною. Але треба пам'ятати, що додаткові s умов Куна-Такера слугують замиканням системи до повної форми, але становлять нелінійний блок залежностей.

Наведені особливості структури рівнянь визначають порядок роботи алгоритму пошуку оптимальної

точки задачі квадратичного програмування. Як було зазначено вище ЛП – це частинний випадок алгоритму. Визначення оптимальної точки задач КП і ЛП зводиться до аналізу однієї й тієї ж системи алгебраїчних рівнянь. Центральна задача подальших перетворень полягає в побудові безпосереднього лінійного зв'язку між ключовими невідомими. Потім організація послідовного перебору значень цих ключових параметрів, в кожному з яких забезпечується виконання умов Куна-Такера. Це відома відпрацьована схема симплекс процедури. Вибір кращого варіанта відбувається після обчислення $f(x)$. Всі перетворення згідно алгоритму відповідають операціям матричної алгебри над системою (2).

Для побудови ключових співвідношень спочатку потрібно виразити вектори (x, u) , через ключові (t, Ω) . Потім виключити їх з системи. Це спрощує рівняння. Представимо два верхніх кліткових рівняння в формі:

$$\begin{bmatrix} K & c^T & a^T & R \\ c & \cdot & \cdot & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & a^T & R \\ \cdot & \cdot & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Клітковий блок A_{11} розміром $(n+m)$ повністю визначає зв'язок штатних невідомих з ключовими. При цьому, для випадку присутності в задачі умов рівності матриця A_{11} буде виродженою. Цю матрицю потрібно привести до діагональної форми. Можливості матричної алгебри допускають використання різних варіантів стійких перетворень для вирішення цього завдання. Але симетрія надто дорогоцінна якість, щоб, можна було нею нехтувати. Симетрія – це додаткові аргументи в питаннях точності, стійкості алгоритму особливо для задач великого розміру. Тому доцільно використовувати подібні перетворення, які переносять симетрію на результат. Будемо використовувати заміну змінних та подібне перетворення з матрицею P_1 .

$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & E & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$$

Система (2) після еквівалентного перетворення:

$$P_1^T A P_1 \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = P_1^T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix},$$

набуває більш простого виду, що допускає визначення вектору r :

$$\begin{bmatrix} E & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \times \\ \cdot & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix} \quad (4)$$

Далі продовжується спрощення матриці з допомогою лівих перетворень для визначення вектора ξ . Залежності, що залишаються, встановлюють безпосередній зв'язок між компонентами множників Лагранжа t та Ω . Для наочності роботи схеми введемо два вектори $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_s)$ та $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_s)$. Вважатимемо y_i базисними компонентами векторів t та Ω , а z_j – поза базисними. Як вектор y так і z можуть формуватись як

з компонентів t_j так і Ω_j , за одним виключенням: для кожного j компоненти t_j та Ω_j не можуть одночасно входити в один з цих векторів, вони повинні стояти по різні боки рівності. Залежність базисних компонент y від небазисних z можна представити у такій стандартній формі:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y \\ y_s \\ -2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ b_1 & b_2 & b_3 & b & b_s & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z \\ z_s \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Таким чином, стартова розрахункова система (2) переходить до залежності (5), що пов'язує t і Ω . Надалі виконується циклічна процедура симплекс-схеми. Це, по-перше, забезпечення виконання умов Куна-Такера ($t_j \Omega_j = 0$). Будемо робити це традиційним шляхом призначення всім поза базисним координатам z значення нуль. За ходом процедури можна слідкувати по значенням поточного базисного рішення y . Цей вектор повинен бути допустимим, тобто потрібна відповідність між невизначеними множниками Лагранжа t_j та активністю кожної нерівності Ω_j . Наприклад, якщо $\Omega_j < 0$ (є неактивною), то t_j повинен дорівнювати нулю. Якщо поточне рішення недопустиме, потрібно ввести зміни: відповідні базисні координати перевести в небазисні і навпаки. Тобто переписати форму рівняння (5). Після чого знову представити залежність базисних координат від небазисних в канонічному вигляді. За тенденцією зменшення цільової функції від поза базисних координат потрібно слідкувати по значенням коефіцієнтів b_j .

Чисельна процедура складається з конкретного набору операцій, лінійних рівнянь, що надають шлях до результату. Відповідь на питання про існування рішення, одного чи безлічі можна отримати по результатах роботи чисельної процедури над конкретним актуальним набором числових даних.

Якщо рішення існує, допустиме і подальше зменшення функціоналу неможливе, то процедуру можна виконати за скінченну кількість операцій. Алгоритм працює по цій схемі як для задач ЛП так і КП.

3. Приклад модельної задачі лінійного програмування. Розпочнемо аналіз роботи Universal Algorithm з прикладу пошуку оптимальної точки задачі ЛП з шістьма параметрами $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 5-ма обмеженнями рівності та 6-ма обмеженнями нерівності. Він пов'язаний з модельною "транспортною" задачею..

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_4 &= 50; \\ x_2 + x_5 &= 60; \\ x_3 + x_6 &= 50; \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 90; \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 70. \\ x_i &\geq 0; \quad (i = 1, 6); \end{aligned} \quad (6)$$

або:

$$f(x) = -[-9 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \quad -4 \quad -3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix};$$

$$\omega(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 50 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \leq 0;$$

Матрична форма запису всієї задачі з матрицею A , згідно (2), виглядає так:

.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	-1	.	.	.	.	-9	x_1
.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	-1	.	.	.	-1	x_2
.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	-1	.	.	-1	x_3
.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	-1	.	-6	x_4
.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	-1	-4	x_5
.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	-3	x_6
1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50	u_1
.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	60	u_2
.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50	u_3
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	90	u_4
.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	70	u_5
-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_1
.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_2
.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_3
.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_4
.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_5
.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		t_6
-9	-1	-1	-6	-4	-3	50	60	50	90	70	.	.	.	.	.	.	

Основна матриця A системи симетрична. Невідомі, що підлягають визначенню, це вектори: x, u, t, Ω розмірами $n=6, m=5, s=6, s=6$ загальною кількістю 23. Лінійна частина залежностей для визначення цих невідомих складає 17 рівнянь. Додатковий нелінійний блок з 6 рівнянь формулюється як умови Куна-Такера $t_j \Omega_j = 0, \quad (j=1, 6)$.

Варіанти рішення поставленої проблеми можуть бути різними. В цій роботі основні перетворення над матрицею системи виконуються як операції матричної алгебри. Як було зазначено вище, головна задача наступних дій полягає у встановленні безпосереднього лінійного зв'язку між ключовими невідомими (t, Ω). Для цього виконуються декілька послідовних перетворень. Спочатку здійснюється заміна змінних з матрицею P_1 , розміром 18×18 . Її завдання виразити штатні невідомі $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ через ключові, щоб надалі виключити їх з системи рівнянь:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
x_1 & 1 & 1 & -1 & 1 & . & . & . & -1 & -1 & . & . & . \\
x_2 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
x_3 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
x_4 & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
x_5 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & -1 & . & . & . & . \\
x_6 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & -1 & . & . & . \\
\hline
u_1 & -1 & 1 & 1 & -1 & . & . & . & . & -1 & . & . & . \\
u_2 & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & -1 & . & . & . \\
u_3 & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & -1 & . & . & . \\
u_4 & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
u_5 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
\hline
t_1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
t_2 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
t_3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
t_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
t_5 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
t_6 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{array} = \left[\begin{array}{l} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \\ \xi_{14} \\ \xi_{15} \\ \xi_{16} \\ \xi_{17} \\ \xi_{18} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ 1 \end{array} \right]$$

Матриця P_1 підбрана так, щоб подібне перетворення $P_1^T A P_1$ приводило клітковий блок A_{11} розміром (11×11) до діагонального виду.

Результат цього перетворення приведений нижче:

[illegible]

Наступним буде подібне перетворення з матрицею P_2 наступної структури :

$$\begin{array}{c} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \\ \xi_{14} \\ \xi_{15} \\ \xi_{16} \\ \xi_{17} \\ \xi_{18} \end{array} = \begin{array}{cccccccc|cccccc} 1 & . & . & . & . & . & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}$$

Елементи матриці вибираємо з умов, щоб в результаті перетворення $P_2^T A' P_2$ було видалено елементи першого кліткового рядка та стовбця розміром 8. Результат буде таким:

$$\begin{bmatrix} -2 & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & -2 & & & & & \\ & & & & -2 & & & & \\ & & & & & 2 & & & \\ & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & 2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ -2f \end{bmatrix}$$

Якщо тепер виконати невелике число операцій та перестановок, то система розпадається на групи.

З них можна визначити компоненти вектора η , залежності для ξ_{ij} :

$$\eta_j = 0, \quad (j=1,8).$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_5 + 60 \\ \Omega_6 + 50 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

А також потрібні нам ключові співвідношення – лінійний зв'язок між множниками Лагранжа t та Ω . Форм запису такого зв'язку, тобто рішень задачі ЛП може бути багато. Спосіб вибрати серед них найкращий варіант полягає в їх переборі, кількість яких обмежена. Працює симплекс-процедура. Стартові рівняння мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ \Omega_5 \\ \Omega_6 \\ -2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & -20 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 60 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 50 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 70 \\ 1 & -1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 6 \\ 1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot & 5 \\ 90 & \cdot & \cdot & -40 & 6 & 5 & 1310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ \Omega_5 \\ \Omega_6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7).$$

Зручною вважатимемо таку форму запису, коли легко визначати рішення.

В наведеному вигляді за компоненти базисного вектора прийняті такі: $y = (\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 t_5 t_6)$, а поза базисні – ті, що стоять в правій частині ключових залежностей: $z = (t_1 t_2 t_3 t_4 \Omega_5 \Omega_6)$. Функціонал f виражається через коефіцієнти нижнього рядка.

Щоб виконати умови Куна-Такера процес рішення розпочинається з призначення всім поза базисним координатам значення нуль:

$$(t_1 t_2 t_3 t_4 \Omega_5 \Omega_6) \rightarrow 0.$$

В такому разі базисним координатам будуть відповідати наступні значення:

$$(\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 t_5 t_6) = (20, -60, -50, -70, 6, 5).$$

Тепер настає черга аналізу отриманого варіанту рішення. Він показує, що воно недопустиме. Так, якщо $\Omega_2 < 0$ (нерівність неактивна), то t_2 повинно дорівнювати нулю; це правильно. Але якщо $\Omega_1 > 0$, то t_1 не може дорівнювати нулю; це неправильно.

Тому переходимо до іншого варіанту рішення. Для цього плануємо виконати перестановку невідомих: вивести з базисних компоненту Ω_1 , а замість неї ввести t_1 . Але на цьому шляху, в даному випадку, виникає особливість – діагональний елемент M_{11} матриці рівняння (7) дорівнює нулю. В такому разі в першому стовбці шукаємо інший (максимальний) елемент 1. Він належить п'ятому рядку. Тому приймається рішення в процесі перестановки вивести з базисних дві компоненти Ω_1 та t_5 , а ввести t_1 та Ω_5 .

В результаті перебудування канонічна форма залежностей (7) стане такою:

$$\begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -90 & \cdot & \cdot & \cdot & -6 & -50 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ \Omega_5 \\ t_6 \\ -2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & 6 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 40 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 50 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 20 \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -40 & 60 & 5 & 1310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ \Omega_6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Повторюємо процес аналізу рішення для цього варіанту запису системи. Знову призначаємо всім поза базисним координатам значення нуль:

$$(\Omega_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \Omega_6) \rightarrow 0.$$

Тоді базисним координатам будуть відповідати нові значення:

$$(t_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 \Omega_5 t_6) = (6, -40, -50, -50, -20, -1).$$

Аналіз показує, що це рішення допустиме. Від'ємним значенням $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ (обмеження не активні) відповідають значення 0 для t_2, t_3, t_4, t_5 . Це правильно. Значення функціоналу $f = 470$.

Таким чином, знайдене рішення задовольняє обмеженням як рівності так і нерівності, і надає функціоналу якості мінімального значення. Приведемо повне рішення задачі:

$$f(x) = 9x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 \rightarrow \min;$$

$$x^* = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) = (0, 40, 50, 50, 20, 0);$$

$$(u_1 u_2 u_3 u_4 u_5) = (-6, -4, -4, 3, 0);$$

$$(\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 \Omega_5 \Omega_6) = (0, -40, -50, -50, -20, 0);$$

$$(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6) = (6, 0, 0, 0, 0, -1); \quad (8)$$

$$(\xi_1) = \left(\frac{53}{2}, \frac{47}{2}, -\frac{43}{2}, -\frac{37}{2}, 32, 28, 27, 23 \right);$$

$$(\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}) = (40, 50, 0);$$

$$f(x^*) = 470 \rightarrow \min.$$

4. Деформування моделі одноплонної вантової споруди зі змінною структурою.

Конструкції, що складаються з окремих частин, пов'язаних між собою односторонніми зв'язками, які в процесі експлуатації можуть як входити в контакт (ставати активними) так і роз'єднуватись – це об'єкти змінної структури. Проблеми аналізу напружено-деформованого стану в них є надзвичайно актуальними. Структурні зміни супроводжуються складними процесами дотикань – відривів між областями контактів, наприклад, в кінематичних парах, в односторонніх зв'язках та інших.

В якості основного підходу моделювання в таких об'єктах приймають метод розрахунку конструкцій по частинам, який знайшов широке застосування в різних напрямках механіки деформованого тіла. Цей ідеологічний стержень закладений також в основний інженерний інструмент чисельного аналізу яким є МСЕ. В основі його функціонування лежать два основних етапи: дискретизація об'єктів на СЕ та інтеграція ансамбля цих елементів в СЕ-модель всієї конструкції. Суть етапу інтеграції в класичному МСЕ полягає в тому, що при побудові СЕ-моделі всієї конструкції призначаються умови рівності відповідних локальних вузлових

координат різних СЕ.

В запропонованому Universal Algorithm ці функції розширені: тепер при об'єднанні в СЕ модель конструкції між локальними вузловими координатами різних СЕ можливо призначати не тільки обмеження рівності але і нерівності, наприклад, задавати роботу односторонніх зв'язків.

Серед сучасних елегантних та економічних об'єктів будівництва вантові споруди вирізняють відносна легкість та міцність. Їх несучі елементи (ванти) працюють тільки на розтягнення.

З'явилась можливість поєднання значної довжини прольотів, відносної легкості, високої ефективності, зі значною напруженістю в елементах металоконструкцій. Для проектування таких об'єктів необхідна підготовка методів розрахунків в умовах односторонніх зв'язків, оптимальних рішень.

Дослідження різних аспектів функціонування конструкцій з гнучкими елементами, що працюють лише на розтягнення, в тому числі і визначення оптимальних значень параметрів можна знайти, поряд з іншими, в [3-7, 17-20].



Рис. 3 [2] – Вантова мостова споруда

Запропонована в цій роботі схема загального алгоритму визначення оптимальної точки задач квадратичного програмування (КП) працює в тій же послідовності, що і для задач ЛП. Різниця в тому, що в квадратичний функціонал додатково входить матриця жорсткості, яка доповнює основну матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2). Разом з тим квадратична постановка дозволяє значно розширити коло об'єктів моделювання задачами лінійного деформування ланок конструкцій в умовах контактної взаємодії (при лінійних обмеженнях).

Для чисельної демонстрації особливостей поведінки алгоритму розглянуто модельну задачу однопілонної вантової споруди (рис.4). Конструкція складається з декількох окремих частин. Це пілон, дорожнє полотно, ванти. Вона відноситься до споруд змінної структури.

Взаємодія пілону та полотна дороги здійснюється лише при односторонній деформації розтягнення 20-ти канатів, прикріплених в їх точках. Встановлено по 10 вант з боку берегового та руслового прольотів. У випадках деформування окремих вант, при їх навантаженнях або монтажних операціях, коли має місце

зближення точок кріплення, зв'язки перериваються. В таких випадках канати не активні і не приймають участі в перерозподілі силового потоку. В подібному стані може опинитись кожен з канатів, а врахувати його можна з допомогою обмежень типу нерівності.

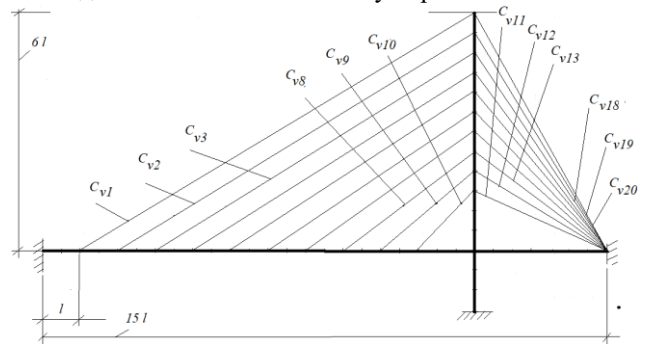


Рис. 4 – Модель однопілонної вантової споруди

Схема споруди, тип елементів, розміри, характеристики матеріалу, характер навантаження вибрані в цілому типовими та такими, що допускають, в певних випадках, просту аналітичну перевірку результатів розрахунків. Споруда представляє собою плоску стержневу конструкцію, що здійснює згинально-поздовжню деформацію.

Основні числові дані такі:

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності матеріалу;

$L_b = 150$ м – довжина балки полотна;

$L_p = 75$ м – висота пілону;

$l = 10$ м – довжина одного прольоту;

$F = 0.5$ м² – площа перерізу як полотна так і пілону;

$I = F/12$ м⁴ – це ексаторіальні моменти інерції перерізу;

$F_v = 0.01F$ – переріз канату ($d \approx 0.1$ м).

В процесі експлуатації вантові мостові конструкції знаходяться під впливом різноманітних видів навантаження (власної ваги, транспортного та будівельного устаткування, вітрового навантаження та інших). В даному прикладі до загального навантаження включено такі: вагу пілону, подвоєну вагу дорожнього полотна та змінне по напрямку вітрове зусилля. Всі складові розподілені по глобальним вузлам за схемою (рис.5).

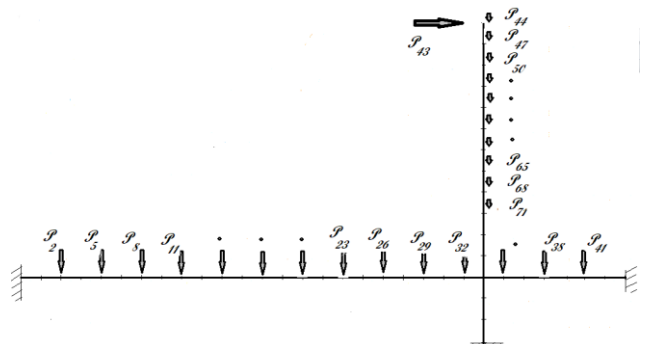


Рис. 5 – Розподілення зовнішнього навантаження по глобальним вузлам СЕ сітки.

За $P_0 = 400$ кН прийнята умовна вага одного прольоту полотна дороги. Саме ж полотно

рівномірно навантажене у вузлах силами, що еквівалентні його 2-х кратній вазі:

$$P_2 = P_5 = P_8 = \dots P_{35} = P_{38} = P_{41} = \frac{15}{7} P_0.$$

Вага пілону теж рівномірно розподілена по його висоті і прикладена у вузлах:

$$P_{44} = P_{47} = P_{50} = \dots P_{65} = P_{68} = P_{71} = \frac{3}{4} P_0.$$

Вітрове навантаження моделюється горизонтальною складовою P_{43} вузлового зусилля на вершині пілону. Проведені числові розрахунки, коли воно змінюється як по величині так і по напрямку. Розглядаються різні випадки-варіанти зміни структури конструкції, викликані дією вітру.

Для чисельних розрахунків використана процедура скінченно-елементного моделювання (МСЕ). Пілон та балка прольоту розбиті відповідно на 10 (від 16 до 25) та 15 однакових СЕ (рис.6).

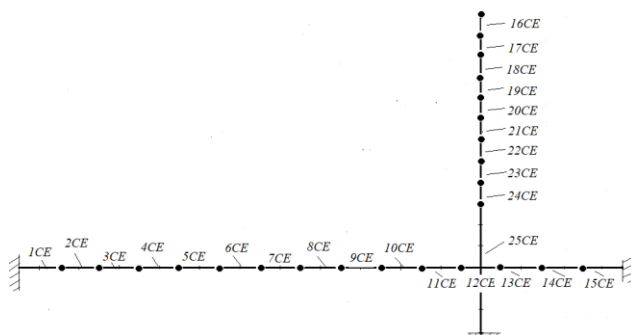


Рис. 6 – Скінченно-елементна модель споруди

Для врахування особливостей деформування елементів металоконструкції в якості стандартного використано стержневий 2-х вузловий згинально-поздовжній СЕ з 6 степенями свободи (рис.7).

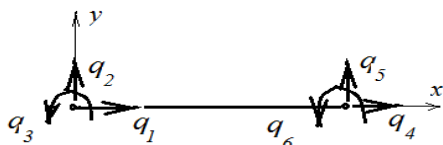


Рис. 7 – Схема 2-х вузлового згинально-поздовжнього СЕ

Матрична форма зв'язку вектора реакцій Q , що утримує СЕ в рівновазі, та його вузлових переміщень q така:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12S & 6lS & \cdot & -12S & 6lS \\ \cdot & 6lS & 4l^2S & \cdot & -6lS & 2l^2S \\ -C & \cdot & \cdot & C & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12S & -6lS & \cdot & 12S & -6lS \\ \cdot & 6lS & 2l^2S & \cdot & -6lS & 4l^2S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix},$$

де: $C = \frac{EF}{l}$ - коефіцієнт жорсткості на розтягнення;

$S = \frac{EI}{l^3}$ - параметр жорсткості на згинання.

Вся СЕ-модель конструкції включає 25 СЕ та 92 степені свободи, які показані на рис.8. Відмітимо характерну особливість дискретизації моделі, яка створює необхідні передумови для можливості введення різних

обмежень. В точках кріплення канатів та пілону введені спільні для них глобальні координати (використані умови рівності). Це переміщення (q_{43} - q_{72}). На відміну від них глобальні вузлові переміщення точок кріплення на полотні дороги (q_1 - q_{30}) та переміщення нижніх країв канатів (q_{73} - q_{92}) приймаються різними. Тобто ці вузлові точки на старті процесу деформування вважаються роз'єднаними. Це надає можливості встановлювати між потрібними вузлами обмеження типу нерівності потрібної якості, тобто розглядати задачі деформування конструкцій змінної структури.

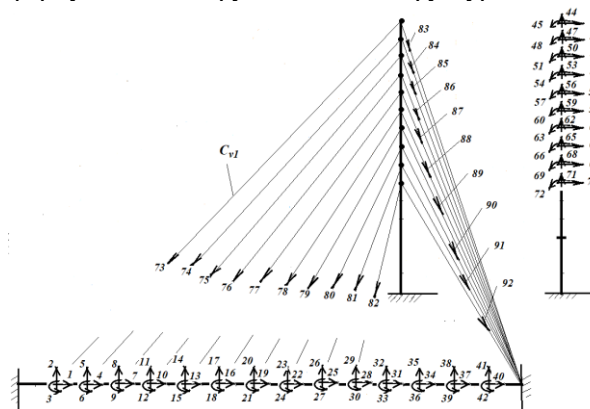


Рис. 8 – СЕ схема споруди з 92 глобальними степенями свободи

І тільки процес мінімізації функціоналу надасть заключну відповідь про дійсний характер контактування. Саме такі варіанти передбачені в Universal Algorithm.

Для формування основного функціоналу Лагранжа розрахункової моделі (рис.4), потрібні значення функціоналу цілі та обмеження-нерівності. Запишемо його в такому вигляді:

$$L(q, t) = f(q) + \sum_{j=1}^{40} t_j \Omega_j(q).$$

При цьому функціонал цілі $f(q)$ є квадратичним та відповідає повній потенціальній енергії всієї споруди, тобто всіх структурних складових. Він включає:

$$f(q) = \frac{1}{2} q_p^T K_p q_p + \frac{1}{2} q_b^T K_b q_b + \sum_{j=1}^{20} C_{vj} (\Delta l_{vj})^2 - q^T R;$$

де: K_p – матриця жорсткості пілону;

K_b – матриця жорсткості балки полотна

C_{vj} – коефіцієнти жорсткості вантів на розтягнення;

Δl_{vj} – величини видовження вант при розтягненні;

R – вектор вузлових навантажень.

4.1. Формування СЕ-рівнянь пілону та балки полотна. Матричні рівняння рівноваги окремих частин споруди (пілону та балки полотна) мають відповідно порядки (30×30) та (42×42). Для їх побудови використано матрицю індексів, яка встановлює відповідність між локальною нумерацією стандартного СЕ (рис.7) та глобальною нумерацією координат споруди (рис.8). Це фактично умови рівності:

	1	2	3	4	5	6
1CE	•	•	•	1	2	3
2CE	1	2	3	4	5	6
3CE	4	5	6	7	8	9
4CE	7	8	9	10	11	12
-	-	-	-	-	-	-
14CE	37	38	39	40	41	42
15CE	40	41	42	•	•	•
16CE	46	47	48	43	44	45
17CE	49	50	51	46	47	48
-	-	-	-	-	-	-
25CE	•	•	•	70	71	72

СЕ-рівняння пілона розміром 30 буде таким:

$$Q_p = K_p q_p - R_p,$$

СЕ-рівняння балки полотна розміром 42 має вигляд:

$$Q_b = K_b q_b - R_b.$$

4.2. Визначення 2-х обмежень-нерівностей для кожної з вант при односторонньому деформуванні.

Розглянемо особливості деформування вант при контактній взаємодії з полотном на прикладі 1-го канату (рис.9). З одного боку кріплення канату в точці B прив'язане до пілону - має спільні узагальнені координати (q_{43} , q_{44}). З іншого боку в точці кріплення канату до полотна, призначені свої незалежні координати окремо для балки в точці A (q_1 , q_2) та канату в точці A' (q_{73}). Зручно для канату ввести також допоміжні (локальні) координати (s_1 , s_2).

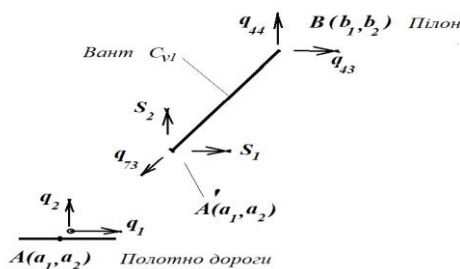


Рис. 9— Схема взаємодії 1-го канату та полотна:

Знайдемо величину видовження канату через його узагальнені координати.

$$\Delta l = l_{AB'} - l_{AB} \approx (l_{AB'}^2 - l_{AB}^2) / (2l_{AB}).$$

Якщо позначити $q_{73} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} s_i$; то:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} q_{42+i} + q_{73}.$$

Відповідне віддалення між точками A і B , що належать конструкції, буде таким:

$$\Delta AB = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} (q_{42+i} - q_i).$$

Таким чином, зміна відстаней між точками

конструкції при її деформуванні в лінійній постановці є лінійною функцією глобальних координат споруди.

Такі особливості деформування 1-го канату можна записати у вигляді 2-х нерівностей:

$$\Delta l \geq 0 \text{ та } \Delta l \geq \Delta AB, \text{ або:}$$

$$\begin{cases} q_{73} + \frac{b_1 - a_1}{l_{AB}} q_{43} + \frac{b_2 - a_2}{l_{AB}} q_{44} \geq 0, \\ q_{73} + \frac{b_1 - a_1}{l_{AB}} q_1 + \frac{b_2 - a_2}{l_{AB}} q_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Одержані результати для одного канату можуть бути узагальнені на весь комплект, та записані для всієї споруди у вигляді 40 нерівностей:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Omega_{39} \\ \Omega_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -c \\ -c & -s & \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \times & \times & -c & -s & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \times & \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_{28} \\ q_{29} \\ q_{43} \\ q_{44} \\ q_{46} \\ \cdot \\ q_{70} \\ q_{71} \\ q_{74} \\ \cdot \\ q_{92} \end{bmatrix}.$$

Тепер отримано всі необхідні залежності для формування розрахункових рівнянь задачі квадратичного програмування (2):

$$\begin{bmatrix} K & a^T & R \\ a & \cdot & \Delta \\ R^T & \Delta^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При цьому :

$n = 92$ - кількість вузлових невідомих;

$m = 0$ - кількість обмежень рівності;

$s = 40$ - кількість обмежень нерівностей.

Матриця A системи має розмір (133×133) , симетрична і підготовлена для подальшого аналізу в проблемі квадратичного програмування. Важливим є наступний крок схеми. Це - перетворення форми рівнянь (10) шляхом виключення з неї вектору q та встановлення безпосереднього зв'язку між компонентами множників Лагранжа t та Ω .

На основі побудованої системи рівнянь в роботі виконані варіативні розрахунки НДС споруди для різних варіантах вітрового навантаження. Приведені випадки, коли для деяких з канатів нерівності стають активними або навпаки приводять до структурних змін.

4.3. Результати моделювання НДС вантової мостової споруди як конструкції змінної структури при варіюванні вітрового навантаження. Споруди з використанням гнучких силових елементів (вантові споруди), є здебільшого висотними. Вони відносяться до відповідальних об'єктів проектування. Особливістю їх навантаження є змінність структури цього навантаження та комплексність. Можна виділити регулярну складову та додаткову а саме: вітрове, монтажне,

транспортне, тощо. В інженерній практиці в таких випадках використовують варіативні комбінації сил, які призначають в залежності від умов експлуатації. Розглядають також особливі комбінації як то: штормові, вибухові, монтажні та інші. Такі конструкції при змінах навантаження самі можуть змінювати свою структуру. З допомогою універсального алгоритму проведено розрахунок ряду задач.

1) $P_{43} = -3P_0$. Напрямок вітру направлений в бік берега. Розглядається споруда за відсутності вант. Цей приклад розподілу НДС по конструкції вибрано з метою виконання порівняльної оцінки ефективності встановлення канатів. Пілон здійснює згинально-поздовжнє деформування, яке незалежне від згинальної деформації балки. На рис.10 приведені епюри поперечних переміщень пілона та полотна (м), поздовжньої сили в пілоні (10^6 , н) та згинального моменту (10^7 , нм)

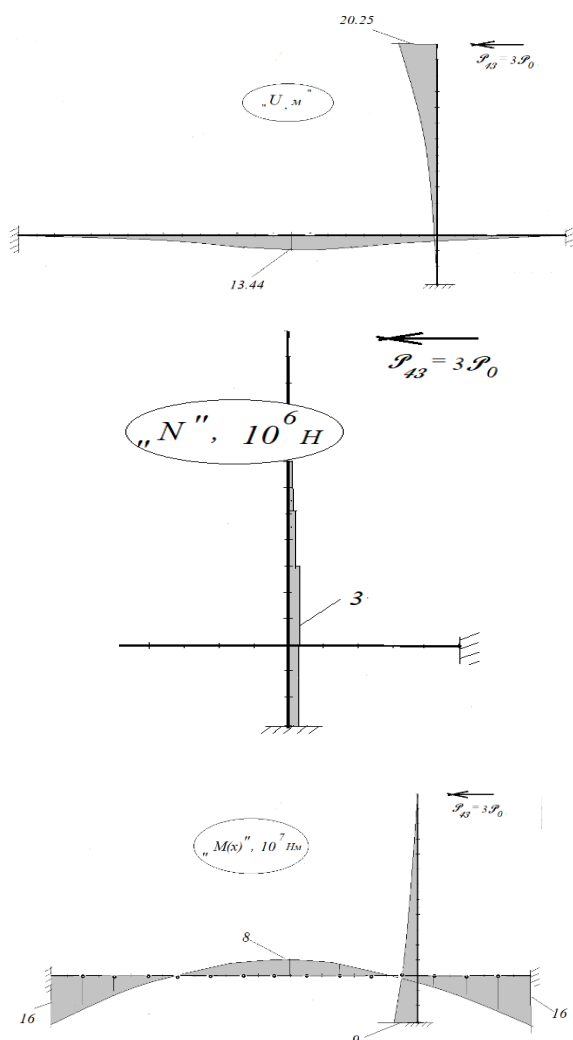


Рис. 10 – Вітрове навантаження направлене в бік берега. Деформування споруди розглядається без впливу вант

Задача допускає просте аналітичне рішення, яке добре співпадає з чисельними розрахунками. Спостерігається значний рівень напруженості та

деформування.

2) $P_{43} = -3P_0$. Напрямок вітру не змінений, діє в бік берега. Але Споруда тепер підкріплена вантами. На рис.11 приведені епюри поперечних переміщень пілона та полотна (м), поздовжньої сили в пілоні (10^6 , н), розподіл сил по канатах. А також епюра згинального моменту по металокопструкції (10^7 , нм).

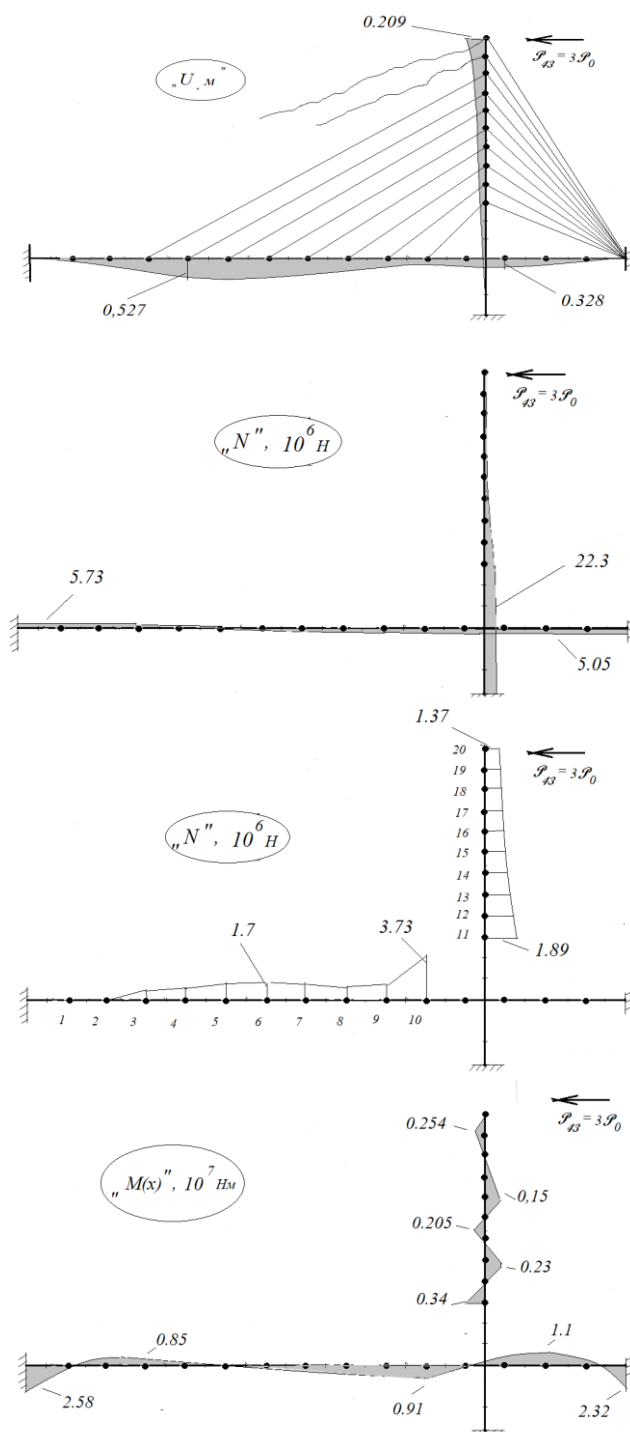


Рис. 11 – Деформування споруди з вантами. Під впливом навантаження структура споруди змінилась.

Спостерігаються радикальні зміни. Силова напруженість споруди суттєво перерозподілилась. Сили

стискання в пілоні виросли в декілька разів. Зате можна відмітити значне зменшення переміщень, згинального моменту по елементах конструкції. Відповідні зміни можна порівняти на приведених епюрах

Але найбільш радикальна зміна пов'язана зі зміною структури об'єкта, коли 2 крайніх берегових вант виявились розвантаженими.

3) $P_{43} = -P_0$. Цей приклад пов'язаний з поступовим зменшенням сили вітру. Напрямок його дії залишився в бік берега. Споруда підкріплена 20 вантами, але для цього варіанту тепер не працює один береговий вант. Основні параметри напружено-деформованого стану наведені на рисунку 12. Загальний характер розподілу параметрів деформування мало змінився.

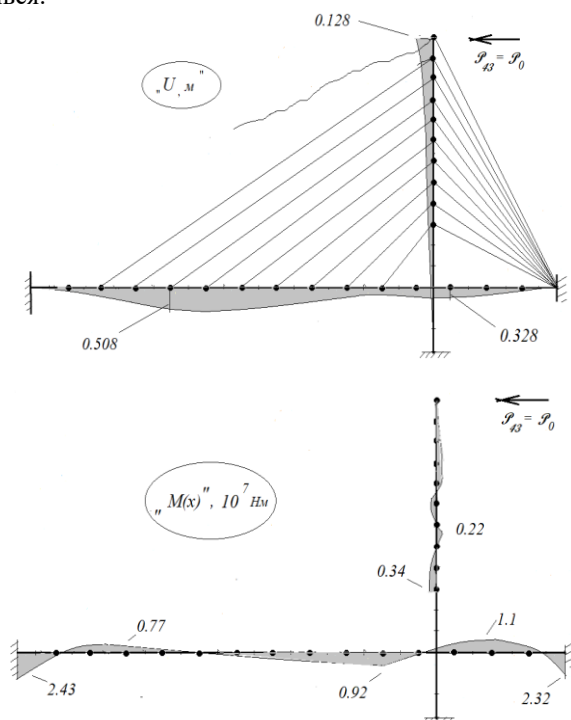


Рис. 12 – Деформування споруди при зменшенні дії вітру в бік берега. Залишились активно працювати лише 19 канатів.

В цьому варіанті спостерігається продовження структурних змін споруди внаслідок змін величини та характеру зовнішнього навантаження.

4). $P_{43} = 3P_0$. Сила вітру збільшена при змінненні також і напрямку. Тенденції змін в параметрах стану залишаються незмінними. Епюри переміщень згинально-поздовжнього деформування наведені на рисунку 13.

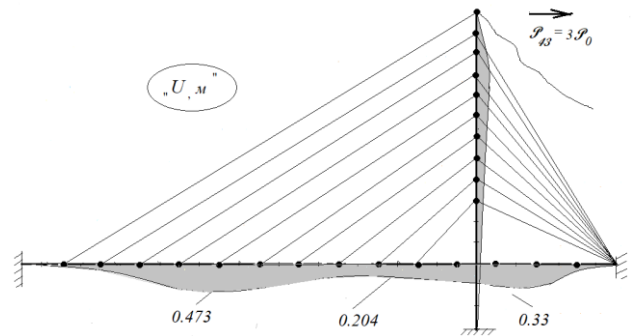


Рис. 13 – Зростання вітрового навантаження, розвантаження правого руслового канату, перерозподіл силових параметрів.

Результати показують, що не всі канати в вантових спорудах ефективно виконують свою роботу. По результатам проведених розрахунків також видно, що для споруд з односторонніми зв'язками в процесі експлуатації можуть суттєво змінюватись як структура навантаження так і структура самої споруди. В багатьох випадках для оцінки напруженості можуть бути корисними методи нелінійного, зокрема квадратичного, програмування.

5. Висновки. На підставі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

- Представлений в роботі Universal Algorithm дозволяє поєднати постановки 2-х класів задач нелінійного програмування (ЛП та КП) в єдиній універсальній формі симетричної матричної залежності.
- Приведений алгоритм квадратичного програмування може бути використаний в оптимізації та рішенні широкого кола задач деформування конструкцій змінної структури в умовах контактної взаємодії при односторонніх зв'язках за скінченну кількість операцій.
- Ефективний алгоритм рішення проблеми квадратичного програмування може бути реалізований з використанням операцій матричної алгебри.
- Для зменшення кількості операцій в циклічній процедурі симплекс-схеми доцільно попередньо з допомогою матричних перетворень виключити з системи розрахункових рівнянь "зайві" невідомі та встановити безпосередній зв'язок між компонентами множників Лагранжа та значеннями нерівностей.
- Як приклад, можуть бути корисними наведені результати чисельних розрахунків модельних задач деформування вантової споруди.

Список літератури

1. Аоки М. Introduction to Optimization Techniques. Fundamentals and Application of Nonlinear Programming. The Macmillan Company, New York, 1971.
2. Інтернет ресурс: <https://my-obolon.kiev.ua/ua/longridi/nivnichnij-mist-podrobiczi-proektuvannya-i-budivnicztva.html>
3. Грищенко В. М. Універсальний алгоритм лінійного та квадратичного програмування в задачах контактного деформування вантових споруд з односторонніми зв'язками // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ "ХПІ", 2022. – №2(2022), – с. 29-38.
4. P.E.Gill, W.Murray, M.H.Wright. Practical Optimization,

Academic Press, London, 1981.

5. J.A.Snyman, Practical mathematical optimization. Springer Science+Business Media, Inc, 2005.

6. S.S. Rao, Engineering Optimization. Theory and Practice. John Wiley, New York, 2009.

7. Бобаєнко І.М., Григорків В.С., Бойчук М.В., Рюмишин М.О. Математичне програмування. –К.:Логос, 1996. –266с.

8. Lute V. Genetic algorithms-based optimization of cable-stayed bridges//V.Lute, A.Upadhyay, K.K.Singh// J.Software Engineering&Applications.-2011.-№4.-pp571-578.

9. Hassan M.M.Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element,genetic algorithm,and B-spline combined techiqu/M.M.Hassan//EngineeringStructures.-2013.-Vol.49.-pp643-654.

10. Asgari, Banafsheh, Siti Aminah Osman, Azlan Bin Adnan. Optimization of Pre-Tensioning Cable Forces in Highly Redundant Cable-Stayed Bridges. International Journal of Structural Stability and Dynamics 15, no. 1 (January 2015).

11. Amornvivat, Pongpun. Optimal designs for cable-stayed bridge. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

12. Mao, Yuanfu. Mathematical Modeling of Cable - Stayed Bridge. In 7th International Conference on Education, Management, Information and Mechanical Engineering (EMIM 2017). Paris, France: Atlantis Press, 2017.

References (transliterated)

1. Aoki M. Introduction to Optimization Techniques. Fundamentals and Application of Nonlinear Programming. The Macmillan Company, New York, 1971.

2. Internet resurs: <https://my-obolon.Kiev.ua/ua/longridi/nivnichnij-mist-podrobiczi-proektuvannya-i-budivnicztva.html>

3. Grischenko V. M. Universalnyi alhorytm liniinoho ta

kvadratynoho prohramuvannya v zadachakh kontaktynoho deformuvannya vantovykh sporud z odnostoronnimy zviazkamy // Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn. – Kh.: NTU "KhPI", 2022. – №2(2022), –s. 29-38.

4. P.E.Gill, W.Murray, M.H.Wright. Practical Optimization, Academic Press, London, 1981.

5. J.A.Snyman, Practical mathematical optimization. Springer Science+Business Media, Inc, 2005.

6. S.S. Rao, Engineering Optimization. Theory and Practice. John Wiley, New York, 2009.

7. Bohaienko I.M., Hryhorkiv V.S., Boichuk M.V., Riumshyn M.O. Matematychnе prohramuvannya. –K.:Lohos, 1996. –266s.

8. Lute V. Genetic algorithms-based optimization of cable-stayed bridges//V.Lute, A.Upadhyay, K.K.Singh// J.Software Engineering&Applications.-2011.-№4.-pp571-578.

9. Hassan M.M.Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element,genetic algorithm,and B-spline combined techiqu/M.M.Hassan//EngineeringStructures.-2013.-Vol.49.-pp643-654.

10. Asgari, Banafsheh, Siti Aminah Osman, Azlan Bin Adnan. Optimization of Pre-Tensioning Cable Forces in Highly Redundant Cable-Stayed Bridges. International Journal of Structural Stability and Dynamics 15, no. 1 (January 2015).

11. Amornvivat, Pongpun. Optimal designs for cable-stayed bridge. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

12. Mao, Yuanfu. Mathematical Modeling of Cable - Stayed Bridge. In 7th International Conference on Education, Management, Information and Mechanical Engineering (EMIM 2017). Paris, France: Atlantis Press, 2017.

Надійшла (received 19.12.2023)

Відомості про авторів / About the Authors

Грищенко Володимир Миколайович (Grischenko Volodimir) – кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії, Національний технічний університет «ХПІ»; м. Харків; тел.: (057) 707 6879. E-mail: grivn_dmm@ukr.net; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>.

Ю. А. ВЯЗОВИЧЕНКО, О. О. ЛАРІН

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ПІДХІД МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМО-НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШИНИ НА ОСНОВІ АЛГОРИТМУ АНАЛІЗУ ЇЇ САМОНАГРІВУ. ЧАСТИНА 2 – ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ЗАСТОСУВАННЯ ПІДХОДУ

Використання еластомерів та їхніх композитів в інженерії стало основою для створення багатьох важливих конструкцій, таких як шини, антивібраційні елементи, демпфери, а також різноманітні прокладки, підшипники та інші компоненти, що піддаються високим динамічним навантаженням. Особливістю таких елементів є циклічна динаміка навантажень, що супроводжується утворенням гістерезисних петель і, як наслідок, самонагріванням матеріалу. Підвищення температури в еластомерних матеріалах може призвести до зміни їх механічних властивостей, зниження міцності, прискорення старіння та деградації, а також до значного впливу на процеси втоми. Крім того, високі температури викликають термічні напруження, які можуть змінити картину напружено-деформованого стану (НДС) конструкції. Метою даної роботи є розробка чисельного підходу для оцінки термо-напруженого стану елементів конструкцій з еластомерних матеріалів в умовах експлуатації. Теоретичні основи запропонованого підходу, що базуються на методах скінченних елементів (МСЕ) і комплексному застосуванні моделей теплопровідності, термопружності та в'язкопружності, докладно викладено у статті, частина 1. У цьому дослідженні застосовано розроблений підхід до аналізу пневматичної шини, що дозволило вивчити її поведінку за різних температурних і механічних навантажень. Для цього побудовано температурне поле, що отримане на основі попереднього розрахунку задачі теплопровідності, яке накладається на модель для розрахунку Т-НС. Порівняння результатів НДС та Т-НС було проведене для різних режимів навантаження (нормативного, перевантаженого та ненормативного) і швидкості руху. Зокрема, особливу увагу приділено аналізу деформацій і напружень в гумокордних шарах шини, таких як каркас і брекер. Виявлено суттєві зміни у характері розподілу деформацій та напружень, що підтверджує важливість врахування температурних ефектів для більш точного аналізу та оцінки робочих характеристик конструкцій. Таким чином, запропонований підхід дозволяє проводити комплексний і точніший аналіз термо-напруженого стану конструкцій з еластомерів, що може бути використано для їх оптимізації в реальних умовах експлуатації.

Ключові слова: т термонапружений стан, алгоритм, еластомерні композити, в'язкопружність, дисипація, самонагрівання, пневматична шина.

Yu. A. VIAZOVYCHENKO, O. O. LARIN

COMPUTATIONAL APPROACH TO THERMAL-STRESSED STATE MODELING OF TIRE BASED ON THE ALGORITHM OF ITS SELF-HEATING ANALYSIS .PART 2 – PRACTICAL RESULTS OF APPLYING THE APPROACH

The use of elastomers and their composites in engineering has become fundamental for the creation of many important structures, such as tires, antivibration elements, dampers, as well as various seals, bearings, and other components exposed to high dynamic loads. A distinctive feature of such elements is the cyclic nature of the loads, which is accompanied by the formation of hysteresis loops and, as a result, self-heating of the material. An increase in temperature in elastomeric materials can lead to changes in their mechanical properties, reduced strength, accelerated aging and degradation, as well as significantly affect fatigue processes. Moreover, high temperatures induce thermal stresses, which can alter the picture of the stress-strain state (SSS) of the structure. The aim of this study is to develop a numerical approach for assessing the thermo-stress state of elastomeric construction elements under operating conditions. The theoretical foundations of the proposed approach, based on finite element methods (FEM) and the comprehensive application of heat conduction, thermoelasticity, and viscoelasticity models, are presented in detail in Part 1 of the article. In this work, the developed approach was applied to the analysis of a pneumatic tire, allowing the study of its behavior under various thermal and mechanical loads. For this, a temperature field was constructed, which was obtained based on a preliminary heat conduction problem calculation, and this was applied to the model for calculating thermal stress state. A comparison of the results of stress-strain state and thermal stress state was carried out for different loading modes (nominal, overloaded, and non-nominal) and vehicle speed. Special attention was given to the analysis of deformations and stresses in the elastomeric layers of the tire, such as the carcass and breaker. Significant changes in the distribution of deformations and stresses were observed, confirming the importance of considering temperature effects for a more accurate analysis and assessment of the operational characteristics of the structures. Thus, the proposed approach allows for a more comprehensive and accurate analysis of the thermo-stress state of elastomeric constructions, which can be used for their optimization in real-world operating conditions. To determine the thermo-strain-stress characteristics of a pneumatic tire and corresponding pictures of its distribution were obtained.

Key words: thermal stress state, algorithm, composite materials, elastic properties, pneumatic tire.

Шина є однією з найважливіших частин транспортного засобу, яка забезпечує безпеку, комфорт та ефективність руху. Водночас, вона піддається різноманітним навантаженням, серед яких особливу роль відіграють температурні напруження. Несправність шини може стати результатом як зовнішніх факторів (погода, дорожнє покриття), так і внутрішніх джерел тепла, що виникають безпосередньо в самій шині під час її експлуатації [1]. Внутрішнє тепло є одним із основних факторів, які можуть призвести до деградації матеріалу, утворення

втомних тріщин та скорочення ресурсу шини [2]. Оскільки ці дефекти не завжди видимі при зовнішньому огляді, розуміння їхнього походження і впливу є критично важливим для забезпечення надійності та безпеки транспорту [3].

Найбільша небезпека для шини полягає саме в утворенні внутрішнього тепла, оскільки воно може призвести до змін у властивостях матеріалу без очевидних зовнішніх ознак. Наприклад, перегрів шини не завжди проявляється у вигляді змін форми або тріщин, які можна побачити під час зовнішнього

огляду. Високі температури, що виникають через тертя об поверхню дороги, можуть спричинити структурні зміни в гумі, які не відразу видно [4]. Це явище може призвести до втомного руйнування матеріалу через циклічні навантаження та накопичення тепла [5]. Перегрів шини може привести до таких наслідків, як зменшення еластичності гуми, зміни її молекулярної структури, погіршення зчеплення з дорогою та збільшення ризику виникнення втомних тріщин [6]. В результаті шина може втратити свої властивості значно раніше, ніж очікувалося. Це також веде до зниження ефективності пального, підвищення витрат на обслуговування та скорочення терміну служби шини [7].

Температурні напруження в шинах виникають через декілька факторів. Тертя між шиною та дорогою є основним джерелом тепла, оскільки постійний контакт шини з дорогою створює тертя, яке перетворюється на тепло. Коли шина працює за великих швидкостей або при високих навантаженнях, це може призводити до перегріву. Циклічні навантаження, що виникають під час руху, сприяють розвитку втомних пошкоджень, які неможливо виявити під час звичайного огляду [8]. Погіршення властивостей гуми через перегрів призводить до того, що шина втрачає свою здатність ефективно працювати, і її ресурс зменшується. Такі пошкодження можуть проявлятися тільки в разі значного зносу чи вибуху, що може статися через накопичення тепла в її структурі [9]. Іншими важливими факторами є надмірне навантаження або неправильний тиск у шинах, що також спричиняють збільшене тертя і, як наслідок, надмірне перегрівання. Це, своєю чергою, значно зменшує термін служби шини та збільшує ризик її пошкодження [10].

Дослідження показали, що шини, що працюють на високих швидкостях, мають значно більшу температуру через постійне тертя та нагрівання, що впливає на швидкість їх деградації. При великих швидкостях температура в шинах може перевищувати допустимі межі, що негативно позначається на їхньому ресурсі та безпеці. Внутрішнє тепло — це важливий фактор, який безпосередньо впливає на втому матеріалу шини. Циклічні навантаження сприяють розвитку втомних пошкоджень, а перегрів може призвести до змін у структурі гуми, що не завжди видно під час огляду [11]. За умов високих температур та неналежного тиску в шинах виникає великий ризик виникнення внутрішніх дефектів, які важко виявити без спеціалізованих досліджень. Це веде до того, що навіть невеликі пошкодження можуть значно зменшити ресурс шини та створити небезпеку для транспортного засобу [12].

Останні дослідження показують, що перегрів шини може спричинити утворення втомних тріщин, що є основною причиною збоїв у роботі шинних конструкцій і зменшення їхнього ресурсу. Підвищене навантаження та неправильне балансування колеса сприяють накопиченню тепла, що впливає на термін служби шини та її працездатність. У дослідженні,

проведеному дослідниками із Michelin, акцентується увага на тому, що температурні напруження значно знижують безпеку шини, оскільки вони можуть спричинити мікротріщини, що розвиваються на молекулярному рівні та не виявляються при зовнішньому огляді [13]. Несправності у конструкції або дефекти виробництва також можуть сприяти збільшенню внутрішнього тепла в шинах, що ще більше погіршує їх ресурс. За умов високих температур температура в шинах може досягати критичних значень, що зменшує їх ефективність та безпеку на дорозі [14].

Високі температури не тільки погіршують зчеплення з дорогою, але й ведуть до швидшого старіння гуми, що в свою чергу значно зменшує ефективність роботи шин. Тому контроль температурного режиму є важливими чинниками для забезпечення безпеки та комфорту водіїв. Наявність технологій для контролю температури в шинах допомагає знизити ризик виникнення дефектів, пов'язаних з перегрівом. У випадку перевантаження або неправильно підібраного тиску температурні напруження значно збільшуються, що також може призвести до пошкодження шини або навіть її вибуху [15; 16].

Інші дослідження також підкреслюють, що неправильний баланс, високі швидкості та великі навантаження можуть спричинити додаткові температурні зміни в шинах [17], що прискорює їх деградацію та збільшує ймовірність аварійних ситуацій на дорогах. Ці факти підтверджують, що управління температурними напруженнями є ключовим для продовження терміну служби шин та забезпечення безпеки транспортних засобів [18].

У першій частині статті «Обчислювальний підхід моделювання термо-напруженого стану шини на основі алгоритму аналізу її самонагріву. Частина 1 [19]. — Теоретичні основи підходу» була описана методологія і основні особливості побудови КС моделей та розрахунку термо-напруженого стану (Т-НС) шини в експлуатації, що формується в наслідок прояву явища самонагріву.

Такий підхід може бути застосований для розрахунку Т-НС на різних експлуатаційних режимах з метою аналізу кількісних і якісних залежностей характеристик Т-НС від умов навантаження.

Відомо, що є декілька експлуатаційних режимів роботи шини, що класифікуються за величиною внутрішнього тиску, вертикального навантаження від ваги автомобіля, крім того вони включають різні швидкісні режими.

В даній роботі запропоновано дослідити варіанти навантаження, для яких зазвичай проводяться експериментальні тести на стенді:

- 1) за величиною внутрішнього тиску:
 - а) номінальний (0.21 МПа);
 - б) ненормативний (0.158 МПа);
- 2) за величиною вертикального навантаження:
 - а) нормативний (1.2 т.);

- б) перевантажений (2.5т);
- 3) за швидкістю обертання:
 - а) номінальний (50 км/год);
 - б) максимальний (240 км/год).

Залежно від поєднання різних значень основних параметрів навантаження, а саме внутрішнього тиску в шині та ваги транспортного засобу, було сформовано три характерних режими роботи конструкції:

1. Нормативний режим — відповідає стандартним умовам експлуатації, при яких внутрішній тиск у шині становить 210 кПа, а маса автомобіля дорівнює 1 тонні. Цей режим приймається як базовий для аналізу напружено-деформованого стану (Т-НС) конструкції.
2. Перевантажений режим — імітує умови надмірного навантаження, за яких внутрішній тиск залишається на рівні 210 кПа, однак маса автомобіля зростає до 2.5 тонн. Такий режим дозволяє оцінити, як конструкція реагує на надлишкову вагу без зміни внутрішнього тиску.
3. Ненормативний режим — моделює умови, що не відповідають технічним нормам, з одночасним зниженням внутрішнього тиску до 158 кПа та збільшенням ваги автомобіля до 2.5 тонн. Цей режим дозволяє оцінити найкритичніший сценарій навантаження на конструкцію.

Для кожного з трьох режимів навантаження Т-НС (напружено-деформований стан) визначався з урахуванням двох варіантів швидкості руху автомобіля:

- Номінальна швидкість — 50 км/год, що відповідає стандартним умовам руху по міських або заміських дорогах;
- Максимальна швидкість — 240 км/год, що дозволяє оцінити поведінку конструкції в умовах високошвидкісного руху, наприклад, на автомагістралях.

Крім того, з метою врахування впливу температурного чинника на поведінку матеріалу та конструкції в цілому, проводився аналіз температурної складової Т-НС. Для цього здійснювались розрахунки напружено-деформованого стану в умовах різних температур, застосованих до кожного з трьох вищезначених режимів навантаження. Такий підхід дозволив оцінити зміни Т-НС в залежності від комбінації навантаження та температурного впливу, що є важливим при прогнозуванні надійності конструкції в реальних умовах експлуатації.

Результати проведених розрахунків представлені на рис. 1-12.

Оскільки основним джерелом теплогенерації в шині, а відповідно і осередком виникнення термонапружено-деформованого стану (термо-НДС), є кордні шари, особлива увага була приділена аналізу їх поведінки при різних умовах навантаження. Результати розрахунків Т-НДС, виконаних з урахуванням

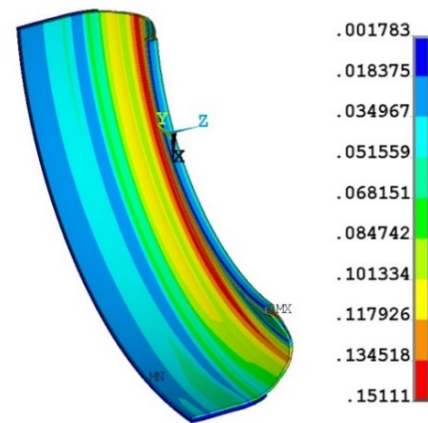
температурної складової, представлені окремо для кордних шарів на рисунках 2 та 3.

На рисунку 2 подано розподіл деформацій по кордних шарах для нормативного режиму навантаження (внутрішній тиск 210 кПа, вага автомобіля 1 т), та за номінальної швидкості руху 50 км/год. отриманий для двох сценаріїв:

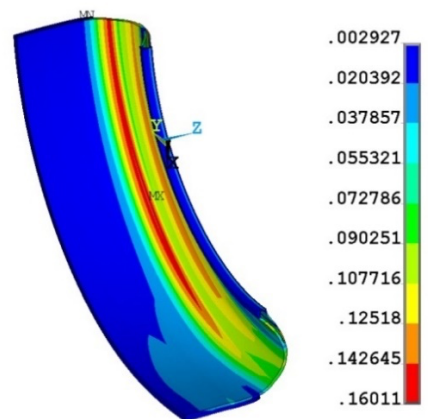
- без урахування температурного впливу (НДС);
- з урахуванням температурної складової (Т-НС).

На рисунку 3 наведено порівняння відповідних полів напружень у кордних шарах для нормативного режиму навантаження.

Проведений порівняльний аналіз рисунків 2 (а) та 2 (б) виявив важливі особливості зміни характеру деформацій у кордних шарах залежно від врахування теплових ефектів.



а



б

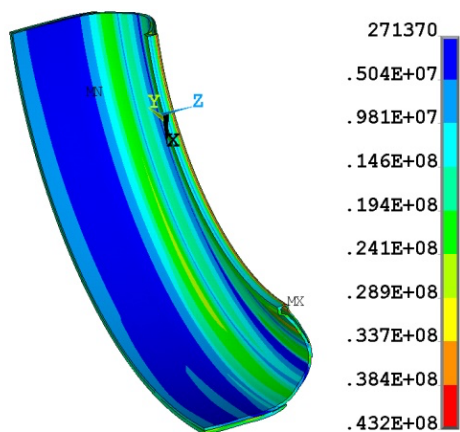
Рис. 2 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для нормативного режиму навантаження при швидкості руху 50 км/год: розподіл деформацій по кордним шарам

Зокрема, встановлено, що зона максимальних значень деформацій каркасу при

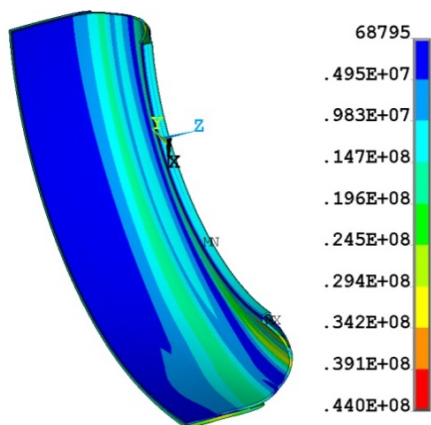
включенні температурної складової зміщується з бортової частини шини (у випадку без врахування температури) до плечової зони. Це свідчить про перерозподіл зусиль у шині, викликаний внутрішнім нагріванням під час руху.

При цьому різниця в максимальних значеннях деформацій у зазначених зонах становить 26% для бортової зони та 20% для плечової, що вказує на істотний вплив температурного чинника навіть у межах нормативного режиму навантаження.

Щодо розподілу напружень, представленого на рисунку 3, результати демонструють суттєву різницю між розрахунками з урахуванням та без урахування температурної складової. Зокрема: у плечовій зоні шини напруження зростає на 32% при врахуванні температури, а у бортовій зоні — відповідна різниця становить 24%.



a



б

Рис. 3 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для нормативного режиму навантаження при швидкості руху 50 км/год: розподіл напружень по кордним шарам

Однак, якщо порівнювати максимальні абсолютні значення деформацій та напружень по всій конструкції, то вони відрізняються не суттєво:

деформації — близько 6%, а напруження — приблизно 1%.

Ці відмінності є очікувано невеликими, оскільки аналіз проводився для номінального режиму навантаження, який характеризується близькими до оптимальних умовами експлуатації. Однак, навіть за таких умов тепловий вплив здатен змінити локалізацію зон концентрації деформацій і напружень, що є критично важливим для довготривалої надійності шини.

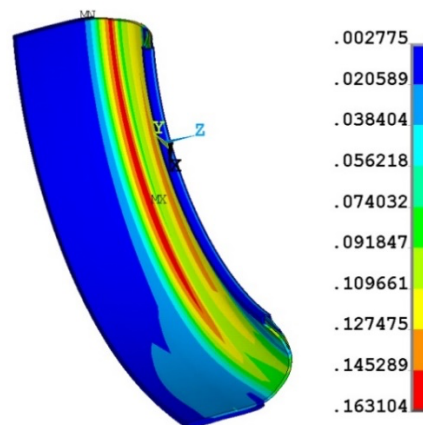


Рис. 4– Результати розрахунку Т-НС для номінального режиму навантаження при швидкості руху 240 км/год: розподіл деформацій по кордним шарам

На рисунках 4 і 5 подано результати чисельного аналізу термонапружено-деформованого стану конструкції для двох характерних режимів роботи – нормативного навантаження та максимального швидкісного режиму.

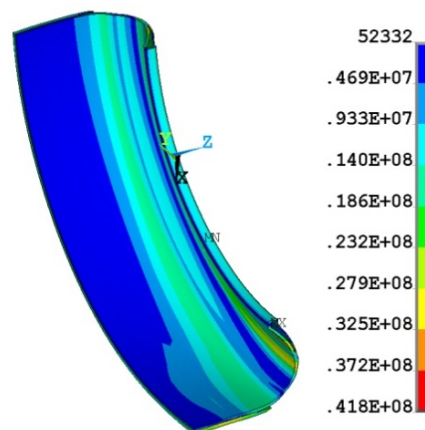


Рис. 5– Результати розрахунку Т-НС для номінального режиму навантаження при швидкості руху 240 км/год: розподіл напружень по кордним шарам

Разом з тим, порівняльний аналіз кількісних параметрів виявив помітні відмінності між двома режимами. Зокрема, деформації в плечовій зоні зросли на 9%, а в зоні борту – на 5%. Ще виразніше

проявляється вплив швидкісного навантаження на рівень напружень: у відповідних зонах приріст склав 13% та 9%. Це свідчить про підвищене навантаження на найбільш вразливі ділянки конструкції за умов інтенсивної експлуатації.

Загалом, максимальне абсолютне значення деформацій збільшилось на 5%, а напружень – на 7% у порівнянні з нормативним режимом.

Подібні відхилення, хоч і не виходять за межі допустимих значень, вказують на необхідність їх урахування при оцінці довговічності та надійності елементів, зокрема з огляду на можливість накопичення втомних пошкоджень в умовах тривалої експлуатації на підвищених швидкостях.

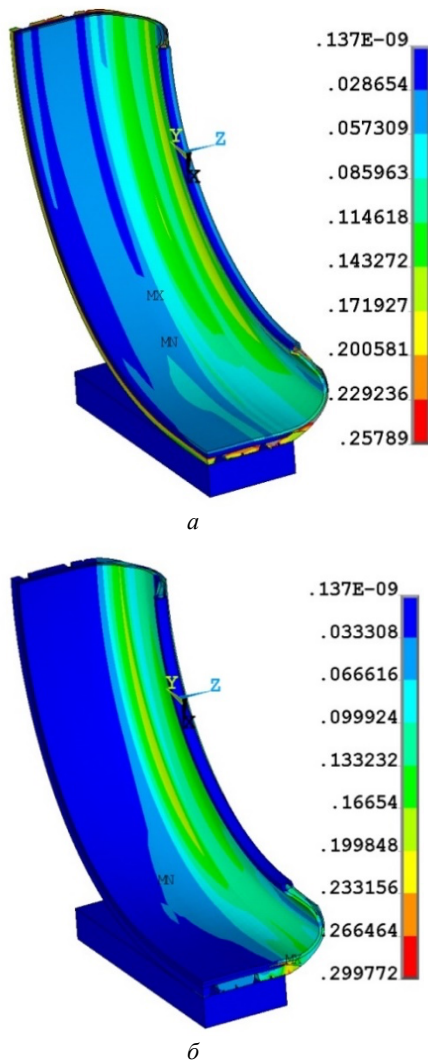


Рис. 6 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для перевантаженого режиму при швидкості руху шини 50 км/год: розподіл деформацій по шині

На рисунках 6–8 наведено результати чисельного моделювання напружено-деформованого стану (НДС) шини в умовах перевантаженого режиму експлуатації (внутрішній тиск 210 кПа, маса автомобіля 2,5 т), за номінальної швидкості руху 50

км/год, із урахуванням температурного впливу та без нього.

Аналіз розподілу деформацій та напружень свідчить про суттєвий вплив температурної складової на просторову структуру навантаження.

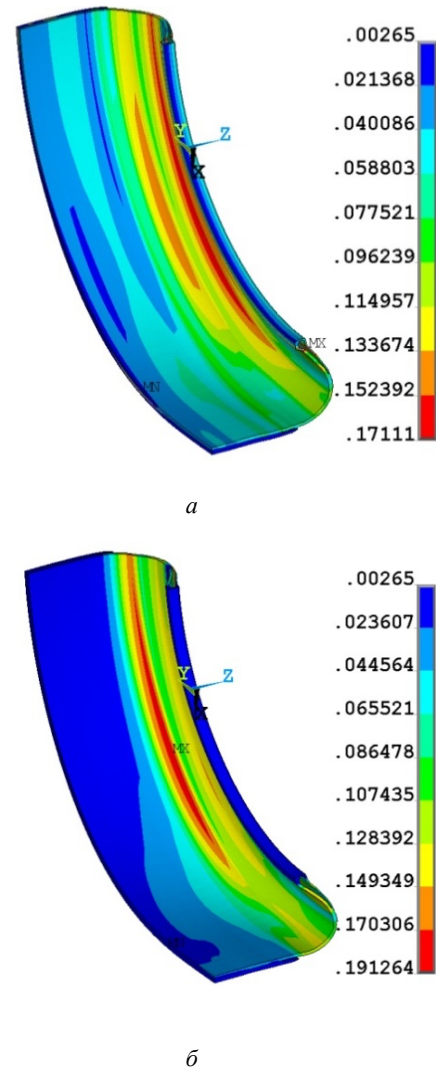


Рис. 7 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для перевантаженого режиму при швидкості руху шини 240 км/год: розподіл деформацій по кордних шарах

Подібно до ситуації, спостереженої при нормативному режимі (див. Рис. 4), температура викликає зміщення зони концентрації екстремальних значень у напрямку плечової ділянки шини. Така локалізація зумовлена зміною жорсткісних характеристик матеріалу при нагріванні та нерівномірністю температурного поля в поперечному перерізі.

Кількісна оцінка впливу температури засвідчує значні відмінності в рівнях деформацій та напружень між термомеханічним (Т-НС) та суто механічним (НДС) розрахунками. У плечовій зоні деформації зростають на 27%, тоді як у бортовій – навпаки, зменшуються на 23%. Подібна тенденція простежується і щодо напружень: у плечовій частині їх

значення збільшуються на 23%, а в зоні борту спостерігається зменшення на 21%.

Порівняння результатів чисельного моделювання для номінального (рис. 6-8) та високого швидкісного режиму (рис. 9-10) при нормативному навантаженні дозволяє оцінити вплив швидкісного фактора на напружено-деформований стан конструкції.

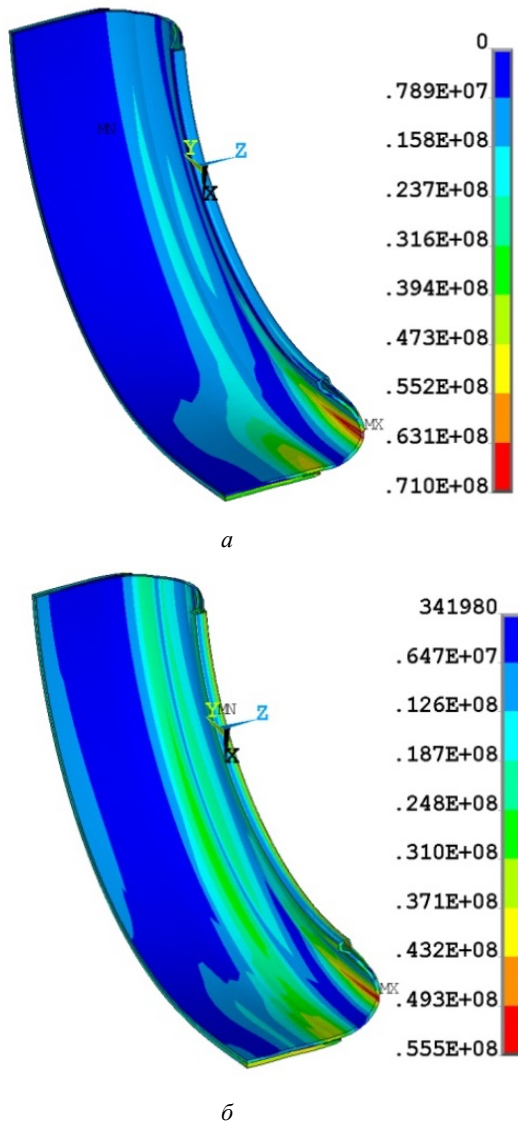


Рис. 8 – Результати розрахунку НДС – *a* та Т-НС – *б* для перевантаженого режиму при швидкості руху шини 50 км/год: розподіл напружень по кордних шарах

Зокрема, у плечовій зоні спостерігається зростання деформацій на 13%, що вказує на більш інтенсивне механічне навантаження в умовах високої швидкості. Це може бути зумовлено як збільшенням динамічного впливу на матеріал шини, так і зміною її поведінки в умовах підвищеного термічного режиму, характерного для швидкісної експлуатації.

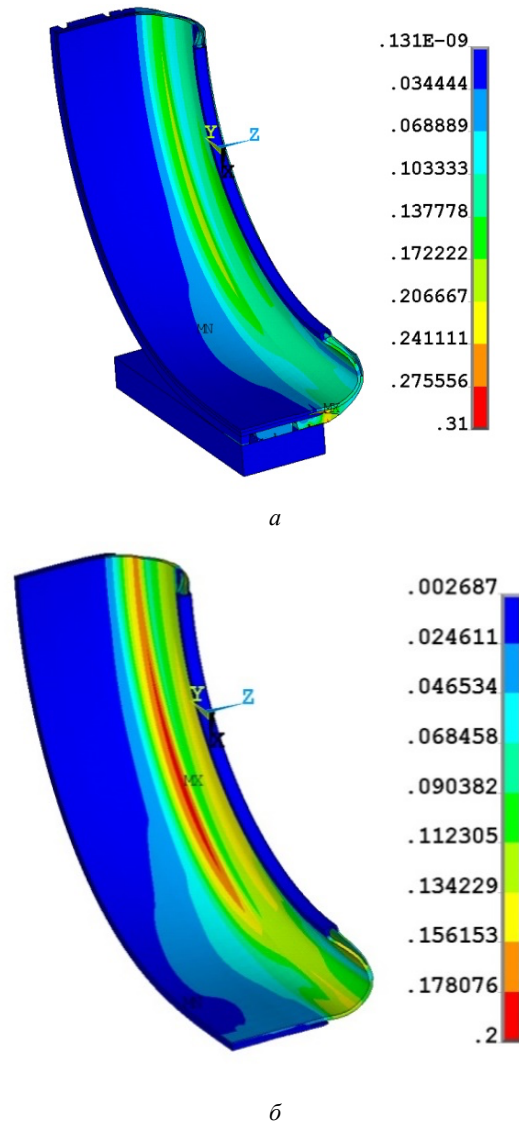


Рис. 9 – Результати розрахунку Т-НС для перевантаженого режиму при швидкості руху шини 240 км/год: розподіл деформацій по шині – *a*, по кордним шарам – *б*

Водночас у бортовій зоні деформації збільшуються на 10%. Це свідчить про зростання навантаження не лише на периферійні, але й на більш віддалені від центру конструкції елементи, що може вказувати на значний розподіл сил у поперечному перерізі шини.

Крім того, було встановлено, що підвищення швидкості руху транспортного засобу в умовах нормативного режиму навантаження призводить до суттєвих змін у розподілі напружень в основних зонах конструкції шини. Зокрема, розмір значення напружень у плечовій зоні збільшився на 10%, що свідчить про зростання інтенсивності силового впливу в цій критичній області конструкції. Аналогічно, у бортовій зоні шини приріст напружень становить 9%, що вказує на загальну тенденцію до підвищення навантаження у всіх частинах каркасу під впливом динамічних чинників.

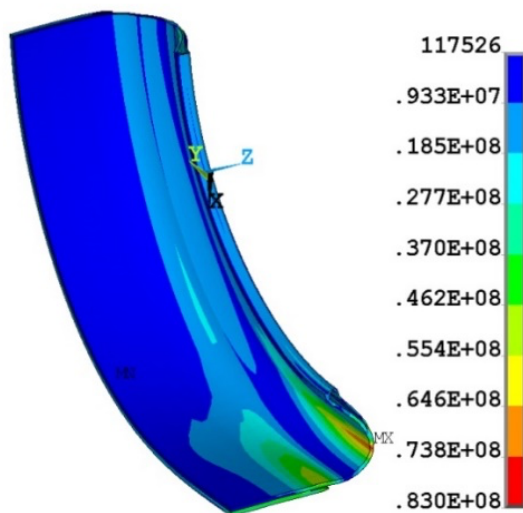
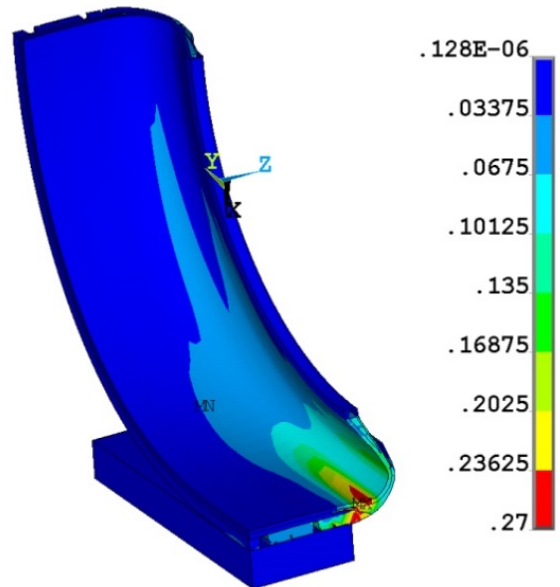


Рис. 10 – Результати розрахунку Т-НС для перевантаженого режиму при швидкості руху шини 240 км/год: розподіл напружень по кордним шарам

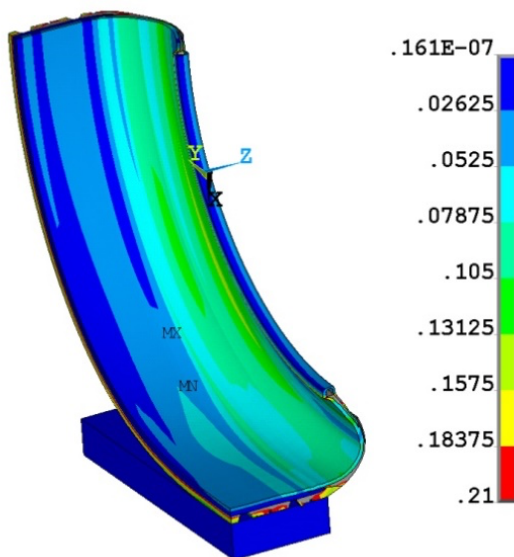
Також, спостерігається приріст абсолютних максимальних значень: деформації збільшилися на 12%, а напруження — на 8%. Такий результат свідчить про загальну тенденцію до підвищення рівня як деформаційної, так і силової активності шини при переході до високошвидкісного режиму. Незважаючи на те, що приріст напружень є дещо меншим за приріст деформацій, це все ж свідчить про посилення навантажувального стану, що може негативно позначитись на довговічності шини при тривалому використанні в екстремальних умовах.



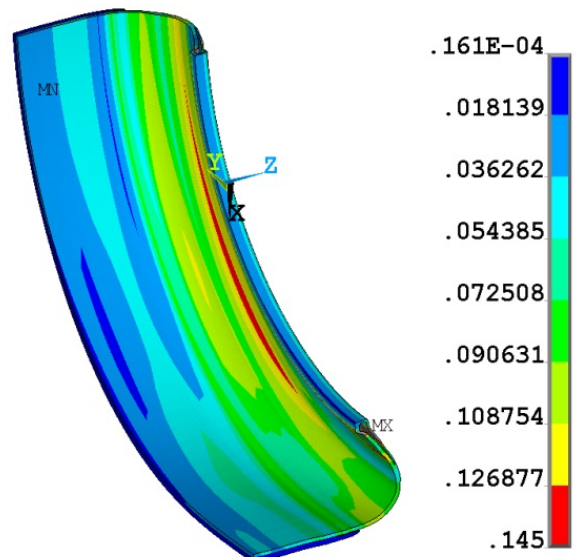
б

Рис. 11 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для ненормативного режиму при швидкості руху шини 50 км/год: розподіл деформацій по шині

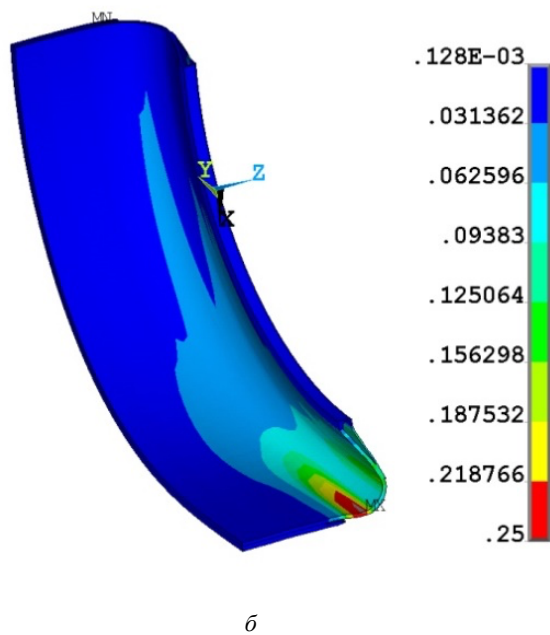
Рисунки 11–13 ілюструють результати чисельного моделювання напружено-деформованого стану (НДС) шини за умов ненормативного режиму експлуатації, що передбачає внутрішній тиск 210 кПа та вертикальне навантаження 2.1 т при номінальній швидкості руху автомобіля — 50 км/год.



а



а



рівень внутрішніх напружень, що виникають у матеріалі.

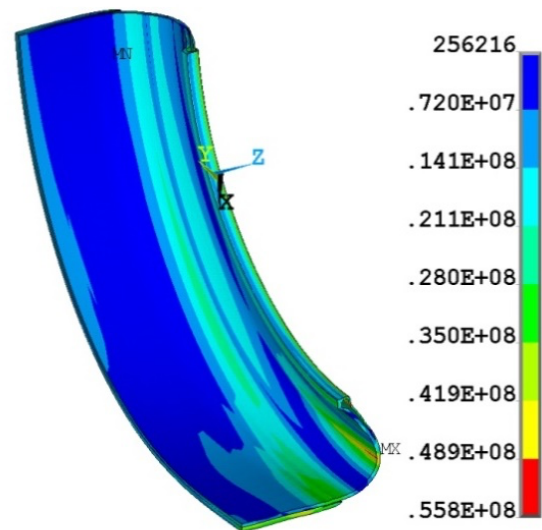


Рис. 12 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для ненормативного режиму при швидкості руху шини 50 км/год: розподіл деформацій по кордним шарам

Тенденція зміни характеру розподілу деформацій у шині зберігається й для ненормативного режиму навантаження, що характеризується внутрішнім тиском 210 кПа та вертикальним навантаженням 2.1 т при номінальній швидкості руху (50 км/год). Аналіз отриманих результатів розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) із урахуванням температурного поля (Т-НС) свідчить про суттєвий вплив теплового чинника на розподіл механічних характеристик у гумокордних шарах.

Зокрема, у плечовій зоні спостерігається зростання значень деформацій на 30% порівняно з розрахунком без урахування температури. Це свідчить про підвищену гнучкість матеріалу у цій зоні внаслідок термічного розширення та зниження модуля пружності при підвищених температурах.

Натомість, у бортовій зоні деформації зменшуються на 14%, що може бути зумовлено локальним зменшенням температурного впливу внаслідок тепловідведення через контакт з ободом колеса та нижчою температурною чутливістю даної зони.

Щодо розподілу напружень, то у плечовій зоні зафіксовано зростання на 34%, що вказує на підвищене навантаження матеріалу у цій ділянці при термічному впливі, можливо, внаслідок концентрації механічних і теплових навантажень. У бортовій зоні, навпаки, напруження знижуються на 20%, що корелює зі зменшенням деформацій у цій області. Абсолютні максимальні значення деформацій у всій шині змінилися на 6%, тоді як відповідні зміни для напружень склали 15%. Це вказує на те, що температурне поле має помірний вплив на загальну деформативність конструкції, але суттєвіше впливає на

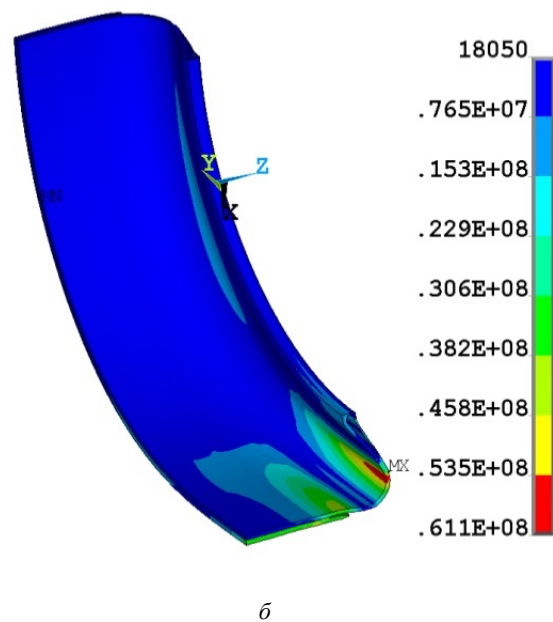


Рис. 13 – Результати розрахунку НДС – а та Т-НС – б для ненормативного режиму при швидкості руху шини 50 км/год: розподіл напружень по кордним шарам

На основі аналізу результатів, представлених на рисунках 13, 14(б) та 15, було встановлено виразну залежність напружено-деформованого стану (НДС) шини від зміни швидкісного режиму руху транспортного засобу в умовах ненормативного навантаження. Зокрема, спостерігається суттєве зростання рівня деформацій у плечовій зоні каркасу при переході від номінальної швидкості (50 км/год) до максимального швидкісного режиму (240 км/год) — значення зростає на 16%, що свідчить про посилення механічної активності в найбільш навантаженій ділянці шини.

Водночас у бортовій зоні каркасу відмічається зростання деформацій на 7%, що вказує на менш виражену, але все ж відчутну реакцію цієї зони на підвищення швидкості.

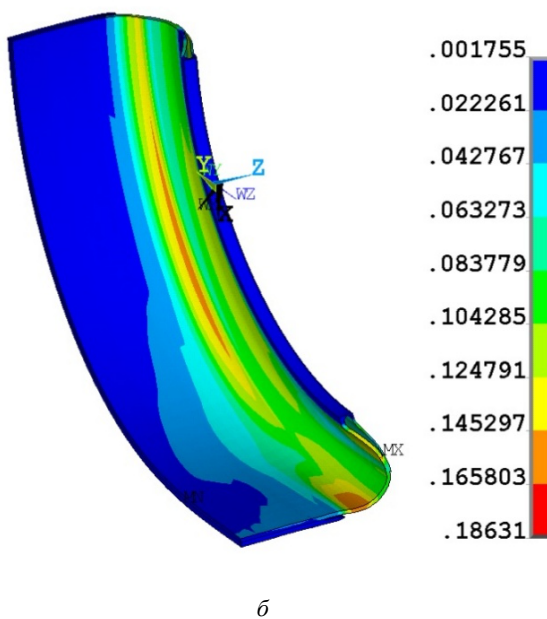
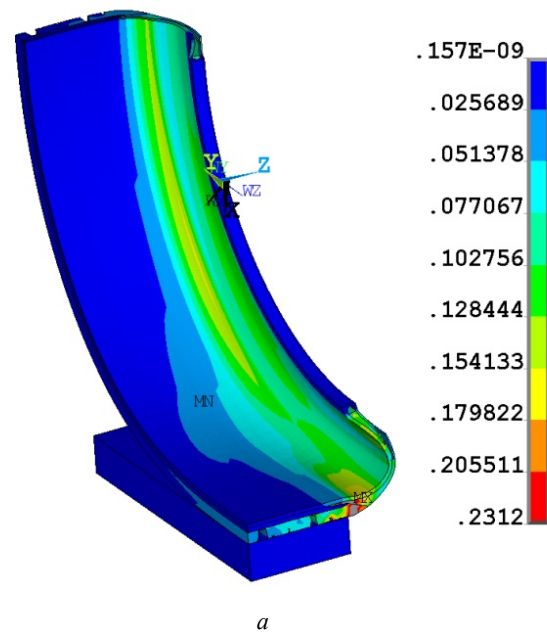


Рис. 14 – Результати розрахунку Т-НС для ненормативного режиму при швидкості руху шини 240 км/год: розподіл деформацій по шині – а, по кордним шарам – б

Такий характер змін може бути зумовлений складною взаємодією інерційних та контактних сил, а також перерозподілом температурного поля, яке інтенсифікується із зростанням швидкості руху та, відповідно, збільшенням тепловиділення внаслідок внутрішнього тертя.

Щодо напруженого стану, то результати моделювання показують, що напруження у плечовій зоні каркасу зростають на 19%, що є критичним з

огляду на можливість локального перевантаження матеріалу конструкції. У бортовій зоні напруження зростають на 17%, що також є суттєвим і потребує врахування при конструюванні шин для умов експлуатації на високих швидкостях.

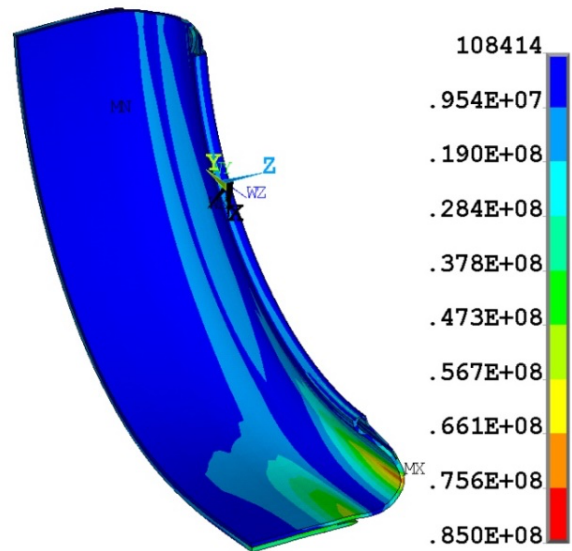


Рис. 15 – Розподіл напружень по кордним шарам шини для ненормативного режиму навантаження при швидкості руху 240 км/год

Абсолютні максимальні значення деформацій при цьому зросли на 6%, тоді як напруження – на 18%, що свідчить про переважаючий вплив швидкісного режиму саме на силову компоненту термомеханічного стану. Такий дисбаланс між приростами деформацій і напружень вказує на потенційно небезпечне підвищення внутрішніх силових факторів у структурі шини без суттєвої зміни її геометрії, що може призводити до крихкого руйнування при тривалій експлуатації.

Висновки

В статті запропоновано підхід до розв'язку зв'язаної задачі розрахунку термо-напруженого стану, що формується у шині під час її кочення і супроводжується процесом самонагріву. Запропонована методологія базується на низці послідовних розрахунків методом скінченних елементів НДС, що формується у шині протягом її кочення при різних режимах навантаження.

Отримані результати вказують на зростання локального механічного навантаження в умовах інтенсифікації експлуатаційного режиму. Виявлені зміни можуть бути критичними в контексті аналізу втомної довговічності та оцінки граничного ресурсу конструкції, що вимагає додаткового врахування в інженерних розрахунках та експлуатаційних рекомендаціях.

Загалом, отримані результати дозволяють зробити важливий висновок: температурний вплив має більш виражену чутливість до варіацій вертикального

навантаження, ніж до змін внутрішнього тиску в шині. Це означає, що при перевантаженні транспортного засобу навіть за стабільного тиску у шині, термомеханічна взаємодія компонентів конструкції суттєво змінюється. Ігнорування термічного впливу може призвести до суттєвого недооцінювання ризиків перевантаження окремих зон конструкції, зокрема плечової, яка демонструє як зростання деформацій, так і напружень. Це підкреслює необхідність комплексного термомеханічного аналізу при оцінці працездатності шини в умовах інтенсивної експлуатації, зокрема у високотемпературних режимах руху.

Швидкісний режим є важливим фактором, що впливає на зміну напружено-деформованого стану шини, особливо у поєднанні з ненормативним навантаженням. Отримані результати підкреслюють необхідність врахування експлуатаційних швидкостей при проектуванні шин та оцінці їхньої довговічності, зокрема у високошвидкісних режимах.

Список літератури

- Anupam, K., Srirangam, S. K., Scarpas, A., & Kasbergen, C. (2013). Influence of temperature on tire-pavement friction analyses. *Transportation Research Record*, 2369, 114–124. <https://doi.org/10.3141/2369-13>
- Qiu, X., Yin, H., Xing, Q., & Jin, Q. (2023). Development of Fatigue Life Model for Rubber Materials Based on Fracture Mechanics. *Polymers*, 15(12). <https://doi.org/10.3390/polym15122746>
- Premarathna, W. A. A. S., Jayasinghe, J. A. S. C., Wijesundara, K. K., Gamage, P., Ranatunga, R. R. M. S. K., & Senanayake, C. D. (2021). Investigation of design and performance improvements on solid resilient tires through numerical simulation. *Engineering Failure Analysis*, 128, 105618. <https://doi.org/10.1016/J.ENGFAILANAL.2021.105618>
- Ma, S., Wu, L., & Liu, W. V. (2023). Numerical Investigation of Temperatures in Ultra-Large Off-the-Road Tires Under Operating Conditions at Mine Sites. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 15(2). <https://doi.org/10.1115/1.4056086/1148486>
- Nguyen, T. C., Cong, K. D. do, & Dinh, C. T. (2023). Rolling Tires on the Flat Road: Thermo-Investigation with Changing Conditions through Numerical Simulation. *Applied Sciences (Switzerland)*, 13(8). <https://doi.org/10.3390/AP13084834>
- Luo, W., Li, M., Huang, Y., Yin, B., & Hu, X. (2019). Effect of temperature on the tear fracture and fatigue life of carbon-black-filled rubber. *Polymers*, 11(5). <https://doi.org/10.3390/POLYM11050768>
- Choi, J. H., Kang, H. J., Jeong, H. Y., Lee, T. S., & Yoon, S. J. (2005). Heat aging effects on the material property and the fatigue life of vulcanized natural rubber, and fatigue life prediction equations. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19(6), 1229–1242. <https://doi.org/10.1007/BF02984044/METRICS>
- Woo, C. S., Kim, W. D., Lee, S. H., Choi, B. I., & Park, H. S. (2009). Fatigue life prediction of vulcanized natural rubber subjected to heat-aging. *Procedia Engineering*, 1(1), 9–12. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2009.06.004>
- Zarrin-Ghalami, T., & Fatemi, A. (2013). Fatigue life predictions of rubber components: Applications to an automobile cradle mount. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 227(5), 691–703. https://doi.org/10.1177/0954407012461863/ASSET/958516E9-DE81-4429-97B4-784A5FAB6E11/ASSETS/IMAGES/LARGE/10.1177_0954407012461863-FIG12.JPG
- Zarrin-Ghalami, T., & Fatemi, A. (2013). Multiaxial fatigue and life prediction of elastomeric components. *International Journal of Fatigue*, 55, 92–101. <https://doi.org/10.1016/J.IJFATIGUE.2013.05.009>
- Tobajas, R., Elduque, D., Ibarz, E., Javierre, C., & Gracia, L. (2020). A New Multiparameter Model for Multiaxial Fatigue Life Prediction of Rubber Materials. *Polymers* 2020, Vol. 12, Page 1194, 12(5), 1194. <https://doi.org/10.3390/POLYM12051194>
- Wang, H., Xuan, F., & Liu, X. (2021). Prediction and evaluation of fatigue life under random load based on low load strengthening characteristic. *International Journal of Fatigue*, 151, 106346. <https://doi.org/10.1016/J.IJFATIGUE.2021.106346>
- Zhu, X., Pan, X., & Shangguan, W. bin. (2022). A Fatigue Life Prediction Method of Rubber Material for Automobile Vibration Isolator under Road Load Spectrum. *SAE Technical Papers*, 2022. <https://doi.org/10.4271/2022-01-0253>
- Mars, W. V., & Fatemi, A. (2004). Factors that Affect the Fatigue Life of Rubber: A Literature Survey. *Rubber Chemistry and Technology*, 77(3), 391–412. <https://doi.org/10.5254/1.3547831>
- Shaw, B., Ramier, J., & Busfield, J. J. C. (2022). The Effect of Thermal Ageing on the Fatigue Resistance of Hydrogenated Acrylonitrile Butadiene Rubber (HNBR) Compounds. *Advances in Polymer Science*, 289, 143–165. https://doi.org/10.1007/12_2022_122
- Luo, W., Huang, Y., Yin, B., Jiang, X., & Hu, X. (2020). Fatigue Life Assessment of Filled Rubber by Hysteresis Induced Self-Heating Temperature. *Polymers* 2020, Vol. 12, Page 846, 12(4), 846. <https://doi.org/10.3390/POLYM12040846>
- Ruellan, B., le Cam, J. B., Jeanneau, I., Canévet, F., Mortier, F., & Robin, E. (2019). Fatigue of natural rubber under different temperatures. *International Journal of Fatigue*, 124, 544–557. <https://doi.org/10.1016/J.IJFATIGUE.2018.10.009>
- Neuhaus, C., Lion, A., Jöhrlitz, M., Heuler, P., Barkhoff, M., & Duisen, F. (2017). Fatigue behaviour of an elastomer under consideration of ageing effects. *International Journal of Fatigue*, 104, 72–80. <https://doi.org/10.1016/J.IJFATIGUE.2017.07.010>
- Вязовиченко Ю. А., Ларін О. О. (2022). "Обчислювальний підхід моделювання термо-напруженого стану шини на основі алгоритму аналізу її самонагріву. Частина 1 – теоретичні основи підходу." *Вісник Національного технічного університету "ХПІ"*. Сер. : Динаміка і міцність машин. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.2.270935>

References (transliterated)

- Anupam, K., Srirangam, S. K., Scarpas, A., & Kasbergen, C. (2013). Influence of temperature on tire-pavement friction analyses. *Transportation Research Record*, 2369, 114–124. <https://doi.org/10.3141/2369-13>
- Qiu, X., Yin, H., Xing, Q., & Jin, Q. (2023). Development of Fatigue Life Model for Rubber Materials Based on Fracture Mechanics. *Polymers*, 15(12). <https://doi.org/10.3390/polym15122746>
- Premarathna, W. A. A. S., Jayasinghe, J. A. S. C., Wijesundara, K. K., Gamage, P., Ranatunga, R. R. M. S. K., & Senanayake, C. D. (2021). Investigation of design and performance improvements on solid resilient tires through numerical simulation. *Engineering Failure Analysis*, 128, 105618. <https://doi.org/10.1016/J.ENGFAILANAL.2021.105618>
- Ma, S., Wu, L., & Liu, W. V. (2023). Numerical Investigation of Temperatures in Ultra-Large Off-the-Road Tires Under Operating Conditions at Mine Sites. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 15(2). <https://doi.org/10.1115/1.4056086/1148486>
- Nguyen, T. C., Cong, K. D. do, & Dinh, C. T. (2023). Rolling Tires on the Flat Road: Thermo-Investigation with Changing Conditions through Numerical Simulation. *Applied Sciences (Switzerland)*, 13(8). <https://doi.org/10.3390/AP13084834>
- Luo, W., Li, M., Huang, Y., Yin, B., & Hu, X. (2019). Effect of temperature on the tear fracture and fatigue life of carbon-black-filled rubber. *Polymers*, 11(5). <https://doi.org/10.3390/POLYM11050768>
- Choi, J. H., Kang, H. J., Jeong, H. Y., Lee, T. S., & Yoon, S. J. (2005). Heat aging effects on the material property and the fatigue life of vulcanized natural rubber, and fatigue life prediction equations. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19(6), 1229–1242. <https://doi.org/10.1007/BF02984044/METRICS>
- Woo, C. S., Kim, W. D., Lee, S. H., Choi, B. I., & Park, H. S. (2009). Fatigue life prediction of vulcanized natural rubber subjected to heat-aging. *Procedia Engineering*, 1(1), 9–12. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2009.06.004>
- Zarrin-Ghalami, T., & Fatemi, A. (2013). Fatigue life predictions of rubber components: Applications to an automobile cradle mount.

- Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 227(5), 691–703.
10. Zarrin-Ghalami, T., & Fatemi, A. (2013). Multiaxial fatigue and life prediction of elastomeric components. *International Journal of Fatigue*, 55, 92–101. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.05.009>
 11. Tobajas, R., Elduque, D., Ibarz, E., Javierre, C., & Gracia, L. (2020). A New Multiparameter Model for Multiaxial Fatigue Life Prediction of Rubber Materials. *Polymers* 2020, Vol. 12, Page 1194, 12(5), 1194. <https://doi.org/10.3390/POLYM12051194>
 12. Wang, H., Xuan, F., & Liu, X. (2021). Prediction and evaluation of fatigue life under random load based on low load strengthening characteristic. *International Journal of Fatigue*, 151, 106346. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106346>
 13. Zhu, X., Pan, X., & Shangguan, W. bin. (2022). A Fatigue Life Prediction Method of Rubber Material for Automobile Vibration Isolator under Road Load Spectrum. *SAE Technical Papers*, 2022. <https://doi.org/10.4271/2022-01-0253>
 14. Mars, W. V., & Fatemi, A. (2004). Factors that Affect the Fatigue Life of Rubber: A Literature Survey. *Rubber Chemistry and Technology*, 77(3), 391–412. <https://doi.org/10.5254/1.3547831>
 15. Shaw, B., Ramier, J., & Busfield, J. J. C. (2022). The Effect of Thermal Ageing on the Fatigue Resistance of Hydrogenated Acrylonitrile Butadiene Rubber (HNBR) Compounds. *Advances in Polymer Science*, 289, 143–165. https://doi.org/10.1007/12_2022_122
 16. Luo, W., Huang, Y., Yin, B., Jiang, X., & Hu, X. (2020). Fatigue Life Assessment of Filled Rubber by Hysteresis Induced Self-Heating Temperature. *Polymers* 2020, Vol. 12, Page 846, 12(4), 846. <https://doi.org/10.3390/POLYM12040846>
 17. Ruellan, B., le Cam, J. B., Jeanneau, I., Canévet, F., Mortier, F., & Robin, E. (2019). Fatigue of natural rubber under different temperatures. *International Journal of Fatigue*, 124, 544–557. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.10.009>
 18. Neuhaus, C., Lion, A., Jöhitz, M., Heuler, P., Barkhoff, M., & Duisen, F. (2017). Fatigue behaviour of an elastomer under consideration of ageing effects. *International Journal of Fatigue*, 104, 72–80. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.07.010>
 19. Viazovychenko Yu., Larin O. (2022). "Computational Approach to Modeling the Thermo-Stressed State of a Tire Based on the Self-Heating Analysis Algorithm. Part 1 – Theoretical Foundations of the Approach." *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Dynamics and Strength of Machines*. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.2.270935>

Надійшла (received) 19.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Вязовиченко Юлія Андріївна (Yuliia Viazovychenko) – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6510-3164>; e-mail: Yuliia.Viazovychenko@khpi.edu.ua

Ларін Олексій Олександрович (Larin Oleksiy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор навчально наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>; e-mail: oleksiy.larin@khpi.edu.ua

Є. О. НЕМАНЕЖИН, Г. І. ЛЬВОВ, Ю. І. ТОРБА

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ ЛОПАТКИ ТУРБИНИ З МОНОКРИСТАЛІЧНОГО СПЛАВУ

Статтю присвячено моделі повзучості монокристалічного сплаву та розробці методики ідентифікації матеріальних параметрів по результатам фізичних експериментів. Виконано скінчено-елементний аналіз повзучості лопатки газотурбінного двигуна. Повзучість є одним із найнебезпечніших видів деформування в умовах експлуатації лопаток турбін. В процесі вивчення проблематики оцінки міцності турбінних лопаток авіаційних двигунів та енергетичних установ, особливу увагу слід приділити дослідженню перерозподілу напружень при повзучості. Характеристики кристаліграфічних структур сучасних лопаток турбін мають дуже значний вплив на проходження процесу розвитку тріщин на деталі в процесі роботи двигуна. На сьогоднішній день, турбінні лопатки виготовляються методом монокристалічного лиття. Такий тип структури матеріалу лопаток характеризують ортотропні механічні властивості. У цьому дослідженні розглядається модель стаціонарної повзучості для анізотропного жароміцного монокристалічного сплаву з кубічною симетрією. Авторами проведено чисельне моделювання параметрів матеріалу з використанням відомих літературних властивостей повзучості монокристалів. Описано алгоритм, який дозволяє визначити деякі характеристики повзучості монокристалів. Параметри наведених співвідношень можна отримати після проведення прямих експериментів, або базуючись на мікроелементному аналізі, на прикладі композиційних матеріалів. Авторами проведено розрахунок констант повзучості типового жароміцного монокристалічного сплаву в результаті апроксимації його кривих повзучості, які були отримані в результаті проведення експерименту. На основі рівняння Нортона-Бейлі та використовуючи розрахунковий комплекс Maple Release 2021.0, було побудовано графік залежності швидкості деформації повзучості від рівня прикладеного до матеріалу навантаження, а також визначено мінімальну швидкість деформації та константи повзучості. Результати обчислень були застосовані для скінчено-елементного моделювання повзучості на прикладі твердотільної моделі лопатки турбіни високого тиску. На базі комплексу ANSYS Workbench проведено декілька серій розрахунків, зокрема, обчислення пружної задачі при навантаженні деталі відцентровими силами, а також накопиченню деформацій повзучості при різному часі дії впливу. Побудовано графіки зміни еквівалентних напружень та деформацій повзучості в залежності від часу.

Ключові слова: стаціонарна повзучість, лопатки турбін, анізотропія, монокристалічний сплав, закон Нортона, скінчено-елементний аналіз.

The article is devoted to the creep model of a monocrystalline alloy and the development of a methodology for identifying material parameters based on the results of physical experiments. A finite element analysis of the creep of a gas turbine engine blade was performed. Creep is one of the most dangerous types of deformation in the operating conditions of turbine blades. In the process of studying the problems of assessing the strength of turbine blades of aircraft engines and power plants, special attention should be paid to the study of stress redistribution during creep. The characteristics of the crystallographic structures of modern turbine blades have a very significant influence on the progress of the crack development process during engine operation. To date, turbine blades are manufactured by the method of single-crystal casting. This type of blade material structure is characterized by orthotropic mechanical properties. This study considers the steady-state creep model of an anisotropic heat-resistant single-crystal alloy with cubic symmetry. The authors carried out a numerical simulation of the material parameters using the well-known literary creep properties of single crystals. An algorithm is described that allows you to determine some creep characteristics of single crystals. The parameters of the given ratios can be obtained after conducting direct experiments, or based on micromechanical analysis, using the example of composite materials. The authors calculated the creep constants of a typical heat-resistant monocrystalline alloy as a result of the approximation of its creep curves, which were obtained experimentally. Based on the Norton-Bailey equation and using the Maple Release 2021.0 calculation complex, a graph of the dependence of the rate of creep deformation on the level of load applied to the material was plotted, and the minimum rate of deformation and creep constants were also determined. The results of the calculations were used for finite-element simulation of creep on the example of a solid-state model of a high-pressure turbine blade. Several series of calculations were carried out on the basis of the ANSYS Workbench complex, in particular, the calculation of the elastic problem when the blade is loaded by centrifugal forces, as well as the accumulation of creep deformations at different exposure times. Graphs of the change in equivalent stresses and creep deformations as a function of time are plotted.

Keywords: steady-state creep, turbine blades, anisotropy, monocrystalline alloy, Norton's law, finite-element analysis.

Вступ. Один із найнебезпечніших видів пошкодження лопаток турбін – це руйнування при повзучості. Повзучість – це прогресивна залежність від часу непружної деформації при високій температурі та механічному навантаженні. Процес повзучості супроводжується багатьма різними мікроструктурними перебудовами, включаючи рух дислокацій, кавітацію меж зерен та старіння мікроструктури [1].

Якщо до зразка, виготовленого з певного матеріалу, прикласти розтягуюче навантаження, яке створює постійне напруження, з плином часу він буде повільно деформуватися.

На початковій стадії такий зразок зазнає миттєвої деформації ϵ_0 . В подальшому він проходить через три стадії: 1-стадія нестационарної повзучості, яка проходить зі зменшенням швидкості деформації з плином часу, 2-стадія стаціонарної повзучості, коли швидкість деформації повзучості постійна, 3-стадія прискореної повзучості, яка характеризується

збільшенням швидкості деформації повзучості і завершується руйнуванням. Більшість матеріалів зазвичай мають більш виражену другу стадію повзучості, оскільки швидкість повзучості стає постійною дуже швидко і зберігає це значення протягом тривалого часу. Саме тому, у даному дослідженні особлива увага приділяється стаціонарній (другій) стадії повзучості.

Літературний огляд. Моделювання анізотропної повзучості та принципи анізотропної повзучості матеріалу обговорюються деяких книгах з механіки повзучості, представлених Хіллом [2] та Мізесом [3] і сучасними авторами [4-6]. Складність моделювання процесів повзучості обумовлена нелінійністю фізичних залежностей та значним відхиленням (в межах 20% або більше) одержуваних з випробувань на повзучість експериментальних результатів. Важливість моделювання анізотропної повзучості матеріалів та структур обговорюється у багатьох публікаціях, таких як [7-10].

У джерелах [11-13] зроблено огляд основних причин руйнування лопаток турбін та наведено прикладі таких явищ із експлуатації. Особлива увага приділена дослідженню пошкоджуваності лопаток від найнебезпечнішого впливу – процесу повзучості. У публікаціях [14,15] мова ведеться про руйнування при повзучості лопаток. Пропонується використовувати чисельний підхід до оцінки терміну служби лопатки турбіни на основі моделі пошкоджуваності від повзучості Lemaitre-Chaboche. Дослідження [16,17] висвітлюють дуже цікавий підхід виявлення впливу високотемпературної повзучості на радіальний робочий зазор між кінчиками лопаток турбін високого тиску авіаційних двигунів. Для вирішення такої задачі пропонується використання розподіленої узагальненої регресійно- екстремумальної нейронної мережі, щоб покращити аналіз надійності визначення зазору кінчика лопатки з поведінкою повзучості з точки зору точності моделювання та ефективності моделювання. У цьому методі узагальнена нейронна мережа екстремуму використовувалася для обробки перехідних процесів шляхом спрощення response-процесу та для відслідковування сильної нелінійності за допомогою її здатності нелінійного відображення. Авторами публікацій [18,19] розроблено та описано модель оцінки пошкоджень, яку можна використовувати для прогнозування терміну служби лопаток турбін під навантаженням від втоми та повзучості як в ізотермічних, так і в умовах змінної температури. Ця модель базується на ретельному визначенні основних фізичних механізмів, які беруть участь у процесі пошкодження одиничного мікроструктурного елемента.

Експериментальні результати повзучості монокристалічних матеріалів [19-21] показують значну анізотропію поведінки повзучості для зразків з різною орієнтацією з урахуванням кристалографічних осей монокристалу.

Модель повзучості монокристалічного сплаву.

Розглянемо модель повзучості монокристалічного сплаву, з механічними властивостями притаманними ортотропному матеріалу з кубічною симетрією. При побудові фізичних рівнянь на другій стадії повзучості застосовано гіпотезу про існування потенціалу для швидкостей деформацій повзучості:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial W}{\partial \sigma}, \quad (1)$$

де W – питома міцність розсіювання енергії при повзучості.

Ця міцність повинна бути інваріантною відносно поворотів системи координат, тобто має залежити від сумісних інваріантів тензора напружень та тензора властивостей матеріалу. В якості такої характеристики вводиться еквівалентне напруження, за допомогою якого задається потенціал повзучості:

$$W(\sigma) = W(\sigma_{eq}(\sigma)). \quad (2)$$

Представимо, аналогічно [4], еквівалентне напруження для повзучості анізотропних матеріалів з використанням тензора четвертого рангу:

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma \cdot \cdot^{(4)} B \cdot \cdot \sigma. \quad (3)$$

Тензор четвертого рангу $^{(4)}B$ з фізичних міркувань повинен бути позитивно визначеним:

$$a \cdot \cdot^{(4)} B \cdot \cdot a \geq 0, \quad (4)$$

та задовольняти наступним умовам симетрії

$$a \cdot \cdot^{(4)} B = ^{(4)} B \cdot \cdot a, \quad c \cdot \cdot^{(4)} B = 0. \quad (5)$$

де a та c – тензори другого рангу

$$\forall a, c \text{ with } a = a^T, \quad c = -c^T. \quad (6)$$

В залежності від виду симетрії матеріалу кількість незалежних компонент тензора $^{(4)}B$ зменшується. Додаткові обмеження з'являються при умові нестисливості матеріалу. Для ортотропних матеріалів з кубічною симетрією кількість незалежних компонентів тензора $^{(4)}B$ зменшується до трьох.

При використанні прямокутної декартової системи координат, напрямки осей якої співпадають з кристалографічними напрямками кубічного монокристалу, еквівалентне напруження (3) запишемо у компонентному вигляді:

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_{ij} \cdot b_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}, \quad (7)$$

де $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Існує багато можливостей для задання вигляду залежності потенціалу повзучості від еквівалентного напруження. Досить поширеним є використання ступеневого закону Нортона. Для зручнішої подальшої ідентифікації параметрів приймемо потенціал повзучості в наступному вигляді:

$$W = \frac{1}{n+1} \sigma_{eq}^{n+1}. \quad (8)$$

Тоді залежність компонентів тензора швидкості деформацій повзучості від напружень набуває вигляду:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{eq}^{n-1} \cdot b_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}. \quad (9)$$

Природним способом визначення параметрів теоретичної моделі матеріалу є проведення необхідної кількості базових експериментів. Чисельна обробка експериментів з повзучості з використанням відомих літературних характеристик повзучості монокристалічних сплавів є альтернативною можливістю отримання необхідних даних.

Методика ідентифікації параметрів матеріалу за визначеною моделлю повзучості монокристалічного сплаву. Якщо розглянути швидкість стаціонарної повзучості $\dot{\epsilon}_{11}^1, \dot{\epsilon}_{11}^2$, наприклад по кристалографічному напрямку [100], коли матеріал розтягується двома різними рівнями напружень $\sigma_{11}^1, \sigma_{11}^2$, то для визначення констант n та b_{1111} доречним є використання наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} \lg \dot{\epsilon}_{11}^1 &= \lg b_{1111} + n \lg \sigma_{11}^1, \\ \lg \dot{\epsilon}_{11}^2 &= \lg b_{1111} + n \lg \sigma_{11}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

З рівнянь (5) обчислюються константи повзучості:

$$n = \frac{\lg \frac{\dot{\epsilon}_{11}^1}{\dot{\epsilon}_{11}^2}}{\lg \frac{\sigma_{11}^1}{\sigma_{11}^2}}, b_{1111} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{11}^1}{(\sigma_{11}^1)^n} \right). \quad (11)$$

Аналогічним способом, вираховуючи швидкість стаціонарної повзучості для двох інших напрямків можна знайти наступні параметри:

$$b_{2222} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{22}^1}{(\sigma_{22}^1)^n} \right), b_{3333} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{33}^1}{(\sigma_{33}^1)^n} \right). \quad (7)$$

Крім того, при зсувах в координатних площинах $x_i x_j$, з використанням розрахункових даних швидкостей стаціонарної повзучості можна визначити ще декілька констант:

$$b_{1212} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{12}^1}{(\sigma_{12}^1)^n} \right), b_{2323} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{23}^1}{(\sigma_{23}^1)^n} \right), b_{3131} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{31}^1}{(\sigma_{31}^1)^n} \right). \quad (8)$$

Підводячи підсумок, можна стверджувати, що описаний вище алгоритм дозволяє визначити всі властивості повзучості монокристалу. Параметри повзучості установчих співвідношень можна знайти в результаті прямих фізичних експериментів або на основі мікромеханічного аналізу [22], наприклад, як у випадку композиційних матеріалів.

Результати апроксимації експериментальних кривих повзучості типового монокристалічного сплаву. Початковою точкою обчислень є припущення, що швидкість деформації повзучості можна представити у вигляді добутку двох окремих функцій температури та напруження [4]:

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = f_{\sigma}(\sigma_{eq}) f_T(T). \quad (9)$$

Функція температури у співвідношенні (9) може бути представлена законом Арреніуса:

$$f_T(T) = \exp[-Q/RT]. \quad (10)$$

Приймаючи температуру постійною величиною, рівняння еквівалентної швидкості деформації повзучості можна виразити рівнянням Нортон-Бейлі:

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = k \sigma_{eq}^n, \quad (11)$$

де k та n – константи повзучості матеріалу.

У випадку монокристала з кубічною симетрією при розтягненні вздовж кристалографічних осей $k = b_{1111} = b_{2222} = b_{3333}$.

Проведемо розрахунок швидкості деформації повзучості на стаціонарній стадії для експериментальних кривих повзучості [23] типового жароміцного монокристалічного сплаву (див. рис.1).

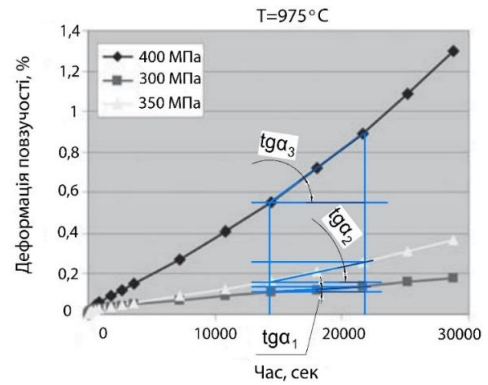


Рисунок 1 – Експериментальні криві повзучості типового жароміцного сплаву

Використовуючи наявні експериментальні відомості, для знаходження параметрів повзучості з рівняння Нортон-Бейлі, можна скористатися методом найменших квадратів. Виділяємо ділянки з постійною швидкістю деформації повзучості. Наступним кроком є обчислення мінімальних швидкостей деформації повзучості $\dot{\epsilon}_{min1}^{cr}$, $\dot{\epsilon}_{min2}^{cr}$, $\dot{\epsilon}_{min3}^{cr}$, які відповідають трьом рівням прикладеного навантаження із графіку кривих повзучості:

$$\dot{\epsilon}_{min i}^{cr} = \text{tg} \alpha_i. \quad (12)$$

Отримуємо рівняння, яке є результатом логарифмування рівняння Нортон-Бейлі:

$$\dot{\epsilon}_{min}^{cr} = k \sigma^n \Rightarrow \lg \dot{\epsilon}_{min}^{cr} = \lg k + n \cdot \lg \sigma. \quad (13)$$

Ступеневе співвідношення (13) можна привести до вигляду лінійного наступним чином:

$$y_i = \lg \dot{\epsilon}_{min i}^{cr}; a = \lg k; x_i = \lg \sigma_i \quad (14)$$

$$y = a + n \cdot x.$$

В результаті обчислень отримуємо шукані константи повзучості $n \approx 9$ та $k \approx 2 \cdot 10^{-30} \frac{1}{\text{сек}} (\text{МПа})^{-n}$ і будемо графік залежності мінімальної швидкості деформації повзучості від прикладеного навантаження (див. рис. 2). Усі розрахунки та побудови виконувалися з допомогою програмного забезпечення Maple Release 2021.0.

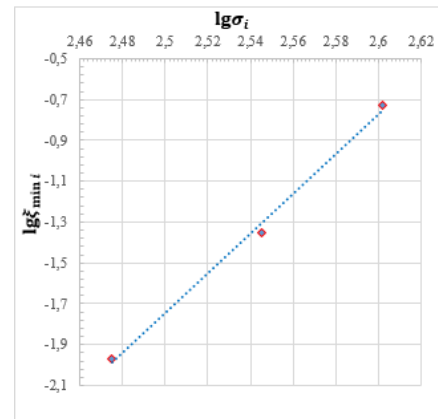


Рисунок 2 – Графік залежності мінімальної швидкості деформації повзучості на стаціонарній стадії від напруження

Моделювання процесу повзучості лопатки турбіни у ANSYS Workbench. На прикладі моделі охолоджуваної лопатки турбіни, проведено розрахунки деформації в процесі повзучості. Твердотільна 3D-модель лопатки побудована з використанням потужностей графічного комплексу NX, скінчено-елементна модель створена у ANSYS Workbench (див. рис. 3).

Скінчено-елементна сітка побудована методом Patch Conforming, для її генерації використовувався об'ємний просторовий елемент Tetrahedron (тип – SOLID187). Розмір елемента – 0,5 мм, точність та якість побудови сітки – 0,95. Кількість елементів розрахункової скінчено-елементної моделі – 217555 (333831 вузлів).

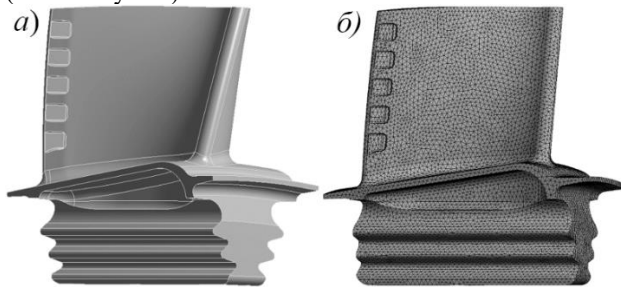


Рисунок 3 – 3D-модель лопатки турбіни:
а – твердотільна; б – скінчено-елементна

Значення густини матеріалу, яке застосовувалося при розрахунках – $8,75 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³. В зв'язку з відсутністю повних експериментальних даних по повзучості монокристалічного сплаву, розрахунки повзучості виконані по моделі ізотропного матеріалу. Початковим етапом було проведення пружного розрахунку лопатки, де в якості граничних умов виступали:

– обмеження переміщень на площинах, що контактують з диском турбіни;

– відцентрова сила, задана по X-компоненті, частота обертів – $N = \text{const} = 50000$ об/хв.

Результати розрахунку приведені на рис. 4. Наступним кроком скінчено-елементного моделювання був розрахунок повзучості. В якості вихідних даних для обчислення повзучості було прийнято використовувати, як зазначено раніше, закон Нортон. В ANSYS Workbench цей закон прийнято у вигляді наступного рівняння:

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = C_1 \sigma_{eq}^{C_2} e^{-C_3/T}, \quad (15)$$

де C_1, C_2, C_3 – константи повзучості.

Параметри повзучості були розраховані за наявними експериментальними даними і дорівнюють $C_1 = 2 \cdot 10^{-30}$; $C_2 = 9$. Коефіцієнт $C_3 = 0$ при постійній температурі на лопатці ($T = \text{const}$). Час дії повзучості було прийнято рівним 20000 секунд. Результати обчислень можна спостерігати на рис. 5.

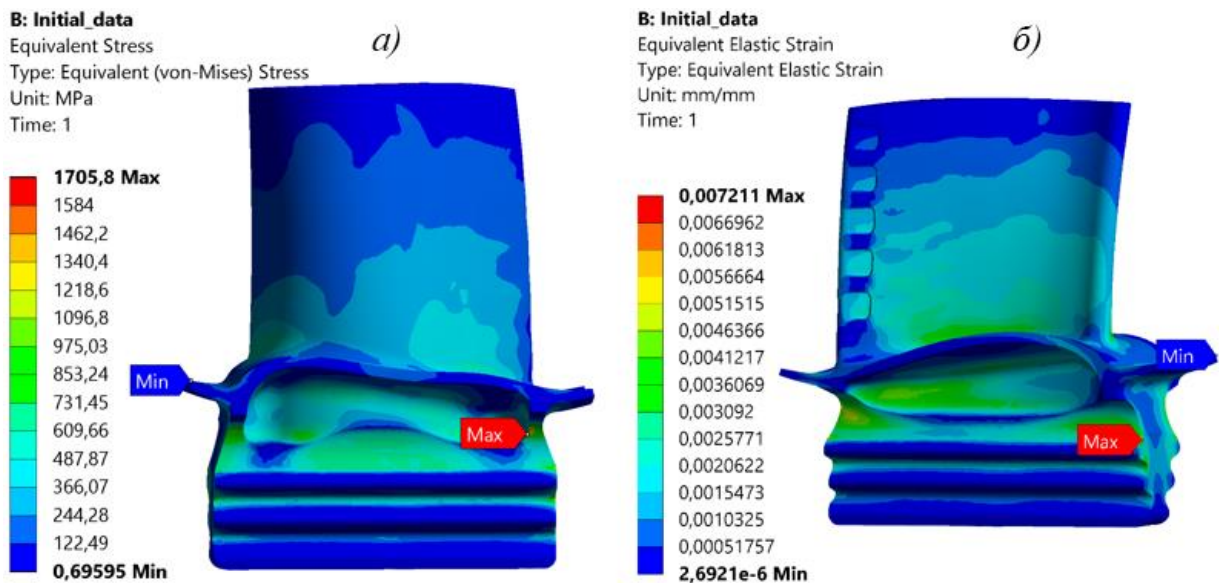


Рисунок 4 – Результати пружного розрахунку:
а – еквівалентні напруження; б – еквівалентні пружні деформації

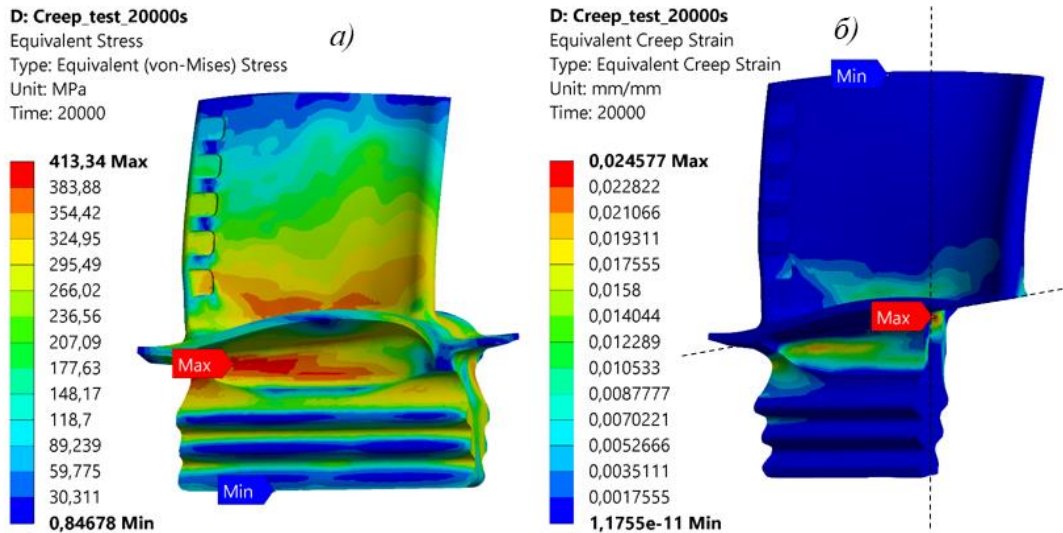


Рисунок 5 – Результати розрахунку повзучості:
а – еквівалентні напруження; б – еквівалентні деформації повзучості

З отриманих результатів видно, що при повзучості напруження у зонах їх концентрації знижуються, а у інших зонах поперечного перерізу підвищуються під дією постійної розтягуючого навантаження від відцентрових сил. Після завершення стадії перерозподілу напружень настає стан стаціонарної повзучості, при якому напруження в лопатці залишаються постійними, а деформації повзучості, при цьому, зростають пропорційно часу.

Для демонстрації залежності зміни еквівалентних напружень та деформацій повзучості з плином часу, розглянемо локальний елемент в одній з найбільш навантажених зон на лопатці, зі сторони спинки на радіусі переходу пера у трактоутворюючу полицю. Для цього було обрано місце з найбільшими локальними навантаженнями (вузол 5575), як показано на рис. 6 та рис. 7.

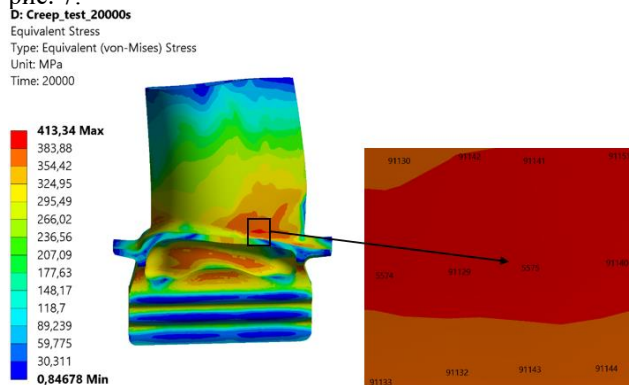


Рисунок 6 – Еквівалентні напруження у вузлі 5575

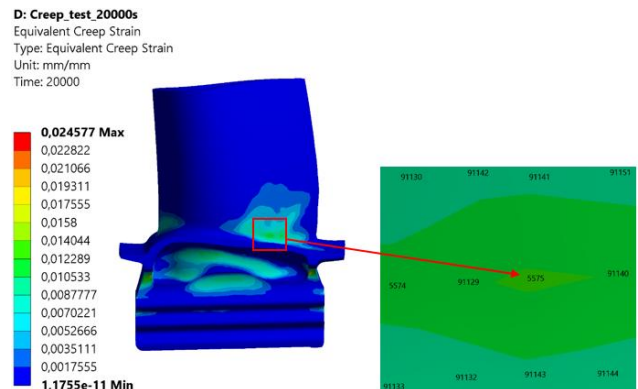


Рисунок 7 – Деформації повзучості у вузлі 5575

На рис. 8 та рис. 9 зображено графіки зміни напружень та деформацій при повзучості в залежності від часу дії навантаження.

Еквівалентні напруження (по Мізесу)
у вузлі 5575

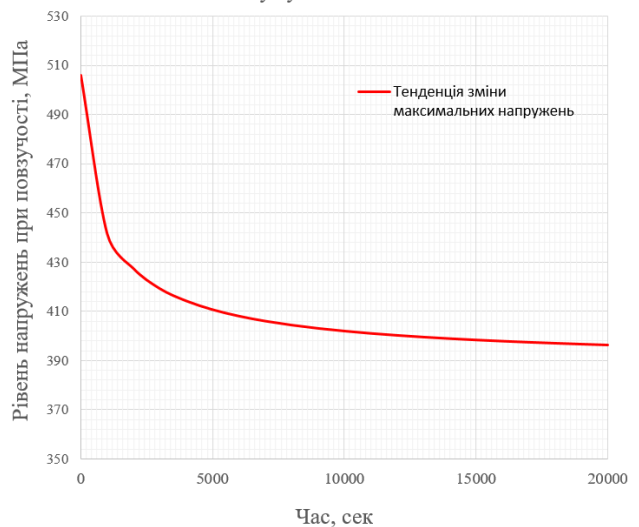


Рисунок 8 – Графік зміни еквівалентних напружень з плином часу у вузлі 5575

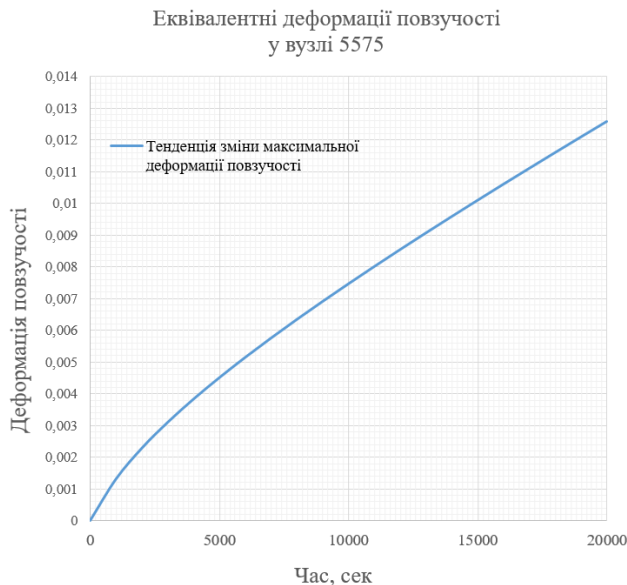


Рисунок 9 – Графік зміни еквівалентних деформацій повзучості з плином часу у вузлі 5575

Висновки. Алгоритм, описаний у цьому матеріалі, дозволяє визначити характеристики повзучості анізотропного монокристала та виконати чисельний аналіз повзучості турбінної лопатки.

Як приклад визначення властивостей повзучості матеріалу наведено визначення характеристик типового жароміцного монокристалічного сплаву. На основі експериментальних кривих повзучості та з використанням обчислювального комплексу Maple було визначено константи повзучості закону Нортона та побудовано графік залежності швидкості деформації повзучості від рівня напружень.

З використанням визначених констант для стадії стаціонарної повзучості, у ANSYS Workbench було проведено розрахунок повзучості на прикладі моделі лопатки турбіни високого тиску. Як результат, з'ясовано, що з настанням стадії стаціонарної повзучості деформації постійно зростають, а максимальні напруження зменшуються. Розподіл напружень в стадії стаціонарної повзучості є основою для засновування критеріїв довготривалої міцності лопаток газових турбін.

Список літератури

1. Liu, D., Li, H., Liu, Y. Numerical simulation of creep damage and life prediction of superalloy turbine blade. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, pp. 1-10.
2. Hill, R. The Mathematical Theory of Plasticity. *Materials Research and Engineering*. Oxford University Press, London, 1950, 250 p.
3. Von Mises, R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *ZAMM*, 1928, vol. 8, no. 3, pp. 161-185.
4. Altenbach, H. Altenbach, J., Naumenko, K. Ebene Flächentragwerke. *Springer*, Berlin, 1998, pp. 10-25.
5. Burlakov, A.V., Morachkovskii, O.K. Deformation and initial anisotropy in creep. *Strength of Materials*, 1973, vol.5, pp. 724-727.
6. Breslavskii, D.V., Metelev, V.A., Morachkovskii, O.K. Anisotropic creep and damage in structural elements under cyclic loading. *Strength of Materials*, 2015, vol. 47(2), pp. 235-241.
7. Kolagar, A.M., Tabrizi, N., Cheraghzadeh, M., Shahriari, M.S. Failure analysis of gas turbine first stage blade made of nickel-based superalloy. *Engineering Failure Analysis*, 2017, vol. 8, pp. 61-68.

8. Gao, H.F., Fei, C.W., Bai, G.C., Ding, L. Reliability-based low-cycle fatigue damage analysis for turbine blade with thermo-structural interaction. *Aerospace Science Technology*, 2016, vol. 49, pp. 289-300.

9. Naumenko, K. Altenbach, H. Modeling of Creep for Structural Analysis. *Springer*, Berlin, 2007, pp. 5-17.

10. Naga, V. Bhushana, R., Niranjana Kumar, I.N., Bala P.K., Madhulata N., Gurajapapu N. Failure mechanisms in turbine blades of a gas turbine engine – an overview. *International Journal of Engineering Research and Development*, 2014, vol. 10(8), pp. 48-57.

11. Donghuan, L., Haisheng, L., Yinghua, L., Numerical Simulation of Creep Damage and Life Prediction of Superalloy Turbine Blade, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, vol. 1, pp. 1-10.

12. Zhang, G., Zhao, Y., Xue, F., et al. Creep-fatigue interaction damage model and its application in modified 9Cr-1Mo steel. *Nuclear Engineering and Design*, 2011, vol. 241, no. 12, pp. 4856-4861.

13. Mackerle, J. Creep and creep fracture/damage finite element modelling of engineering materials and structures: an addendum, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2004, vol. 81, no. 5, pp. 381-392.

14. Salam, I., Tauqir, A., Khan, A.Q. Creep-fatigue failure of an aero engine turbine blades. *Engineering Failure Analysis*, 2002, vol. 9, pp. 335-347.

15. Zhang, C.-Y., Wei, J.-S., Wang, Z., Yuan Z.-S., Fei, C.-W., Lu C. Creep-Based Reliability Evaluation of Turbine Blade-Tip Clearance with Novel Neural Network Regression. *Materials*, 2019, vol. 12, pp. 3552-3573.

16. Carter, T.J. Common failures in gas turbine blades. *Engineering Failure Analysis*, 2005, vol. 12, pp. 237-247.

17. Koster, Alain & Alam, Rémy, L. A physical-base model for life prediction of single crystal turbine blades under creep-fatigue loading and thermal transient conditions. *European Structural Integrity Society*, 2002, vol. 29, pp. 203-212.

18. Remy, L., et al. Effects of microstructure in high temperature fatigue: Lifetime to crack initiation of a single crystal superalloy in high temperature low cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 57, pp. 37-49.

19. Xu, K., Wang, G., Liu, J., Li, J., Liu, J., Wang, X., Yang, Y., Ye, L., Zhou, Y., Sun, X. Creep behavior and a deformation mechanism-based creep rate model under high temperature and low stress condition for single crystal superalloy DD5. *Materials Science and Engineering: A*, 2020, vol. 786, pp. 1-10.

20. Неманежін, С.О., Львов, Г.І., Торба Ю.І. Методика визначення характеристик сталого повзучості монокристалічного сплаву. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*, 2022, №4-2 (182), стор. 42-49.

21. Shi, S., Li, Y., Yan, Z., Yang, S., Ju, Y. Crystal plasticity phase-field simulation of slip system anisotropy during creep of Co-Al-V monocrystal alloy under multidirectional strain. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, vol. 227.

22. Altenbach, H., Lvov, G., Lvov, I., Morachkovsky, O. The Use of the Homogenization Method in the Analysis of Anisotropic Creep in Metal-Matrix Composites. In: Altenbach H., Beitelshmidt M., Kästner M., Naumenko K., Wallmersperger T. (eds) *Material Modeling and Structural Mechanics. Advanced Structured Materials*. Springer, Berlin, 2022, vol. 161, pp. 1-18.

23. Мареграмова, Л.А., Васильев, В.Е. Влияние азимутальной ориентации в монокристаллических лопатках высокотемпературных газовых турбин на их напряженно-деформированное состояние и прочность. *Вестник УГТУ*, 2011, стр. 54-58.

References(transliterated)

1. Liu, D., Li, H., Liu, Y. Numerical simulation of creep damage and life prediction of superalloy turbine blade. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, pp. 1-10.
2. Hill, R. The Mathematical Theory of Plasticity. *Materials Research and Engineering*. Oxford University Press, London, 1950, 250 p.
3. Von Mises, R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *ZAMM*, 1928, vol. 8, no. 3, pp. 161-185.
4. Altenbach, H. Altenbach, J., Naumenko, K. Ebene Flächentragwerke. *Springer*, Berlin, 1998, pp. 10-25.
5. Burlakov, A.V., Morachkovskii, O.K. Deformation and initial anisotropy in creep. *Strength of Materials*, 1973, vol.5, pp. 724-727.
6. Breslavskii, D.V., Metelev, V.A., Morachkovskii, O.K. Anisotropic creep and damage in structural elements under cyclic loading. *Strength of Materials*, 2015, vol. 47(2), pp. 235-241.

7. Kolagar, A.M., Tabrizi, N., Cheraghzadeh, M., Shahriari, M.S. Failure analysis of gas turbine first stage blade made of nickel-based superalloy. *Engineering Failure Analysis*, 2017, vol. 8, pp. 61-68.
8. Gao, H.F., Fei, C.W., Bai, G.C., Ding, L. Reliability-based low-cycle fatigue damage analysis for turbine blade with thermo-structural interaction. *Aerospace Science Technology*, 2016, vol. 49, pp. 289-300.
9. Naumenko, K., Altenbach, H. Modeling of Creep for Structural Analysis. *Springer*, Berlin, 2007, pp. 5-17.
10. Naga, V. Bhushana, R., Niranjana Kumar, I.N., Bala P.K., Madhulata N., Gurajapara N. Failure mechanisms in turbine blades of a gas turbine engine – an overview. *International Journal of Engineering Research and Development*, 2014, vol. 10(8), pp. 48-57.
11. Donghuan, L., Haisheng, L., Yinghua, L., Numerical Simulation of Creep Damage and Life Prediction of Superalloy Turbine Blade, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, vol. 1, pp. 1-10.
12. Zhang, G., Zhao, Y., Xue, F., et al. Creep-fatigue interaction damage model and its application in modified 9Cr-1Mo steel. *Nuclear Engineering and Design*, 2011, vol. 241, no. 12, pp. 4856-4861.
13. Mackerle, J. Creep and creep fracture/damage finite element modelling of engineering materials and structures: an addendum, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2004, vol. 81, no. 5, pp. 381-392.
14. Salam, I., Tauqir, A., Khan, A.Q. Creep-fatigue failure of an aero engine turbine blades. *Engineering Failure Analysis*, 2002, vol. 9, pp. 335-347.
15. Zhang, C.-Y., Wei, J.-S., Wang, Z., Yuan Z.-S., Fei, C.-W., Lu C. Creep-Based Reliability Evaluation of Turbine Blade-Tip Clearance with Novel Neural Network Regression. *Materials*, 2019, vol. 12, pp. 3552-3573.
16. Carter, T.J. Common failures in gas turbine blades. *Engineering Failure Analysis*, 2005, vol. 12, pp. 237-247.
17. Koster, Alain & Alam, Rémy, L. A physical-base model for life prediction of single crystal turbine blades under creep-fatigue loading and thermal transient conditions. *European Structural Integrity Society*, 2002, vol. 29, pp. 203-212.
18. Remy, L., et al. Effects of microstructure in high temperature fatigue: Lifetime to crack initiation of a single crystal superalloy in high temperature low cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 57, pp. 37-49.
19. Xu, K., Wang, G., Liu, J., Li, J., Liu, J., Wang, X., Yang, Y., Ye, L., Zhou, Y., Sun, X. Creep behavior and a deformation mechanism-based creep rate model under high temperature and low stress condition for single crystal superalloy DD5. *Materials Science and Engineering: A*, 2020, vol. 786, pp. 1-10.
20. Nemaneyzhyn, Ye.O., Lvov, G.I., Torba, Yu.I. Metodyka vyznachennja harakterystyk staloi' povzuchosti monokystalichnogo splavu [A method for determining the characteristics of the steady creep of single-crystal alloys]. *Aerospace technic and technology*, 2022, vol. 4-2, no. 182, pp. 42-49.
21. Shi, S., Li, Y., Yan, Z., Yang, S., Ju, Y. Crystal plasticity phase-field simulation of slip system anisotropy during creep of Co-Al-V monocrystal alloy under multidirectional strain. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, vol. 227.
22. Altenbach, H., Lvov, G., Lvov, I., Morachkovsky, O. The Use of the Homogenization Method in the Analysis of Anisotropic Creep in Metal-Matrix Composites. In: Altenbach H., Beitelshmidt M., Kästner M., Naumenko K., Wallmersperger T. (eds) *Material Modeling and Structural Mechanics. Advanced Structured Materials*. Springer, Berlin, 2022, vol. 161, pp. 1-18.
23. Magerramova, L.A., Vasilyev, B.Ye. Vliyaniye azimutalnoy oriyentatsii v monokristallicheskih lopatkakh vysoko-temperaturnykh gazovykh turbin na ikh napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye i prochnost [Influence of azimuthal orientation in single-crystal blades of high-temperature gas turbines on their stress-strain state and strength]. *Vestnik UGATU*, 2011, pp. 54-58.

Відомості про авторів / About authors

Неманежин Євген Олександрович (Nemaneyzhyn Yevhen) – аспірант кафедри «Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії» Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», інженер-дослідник ДП «Івченко-Прогрес», ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5855-508X>; e-mail: Yevhen.Nemaneyzhyn@infiz.khpi.edu.ua.

Львов Геннадій Іванович (Lvov Gennadiy) – д-р техн. наук, професор кафедри «Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії», академік Академії наук вищої школи України, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-9227>; e-mail: Lvovdpm@ukr.net.

Торба Юрій Іванович (Torba Yuriy) – канд. техн. наук, начальник Експериментально-випробувального комплексу ДП «Івченко-Прогрес», ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8470-9049>; e-mail: TorbaYuI@zmdb.ua.

*Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, М.О. ГРОШЕВИЙ, О.А. ТАТАРІНОВА, А.В. СЕНЬКО***АЛГОРИТМИ ТА ПРОГРАМНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ СТРУКТУРИ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ З МЕТОЮ ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЗУЧОСТІ**

Стаття містить опис підходу, алгоритмів та програмного засобу для аналізу зображень деформованих структур матеріалів. Розроблений підхід побудовано на виділенні при аналізі мікроструктури матеріалу важливих факторів, що впливають на високотемпературне деформування при повзучості у жароміцному нікелевому сплаві, а саме розмірів каналів та їхньої орієнтації. Розроблений програмний засіб використовує алгоритми перетворення зображень у бінарні чорно-білі за допомогою методу Отсу. Інтенсивність градієнту в кожній точці зображення візуалізується з використанням оператора Собеля. Границі фрагментів визначаються за допомогою детектора країв Кенні. Відрізки прямих ліній знаходяться з використанням перетворення Гафа. Програмний засіб реалізовано на мові програмування Python з застосуванням бібліотеки OpenCV. Описано основні складові частини та надано блок-схему програми. З застосуванням розробленого програмного забезпечення виконано перетворення відомих експериментально отриманих зображень деформованих при температурі 1273K та широкому діапазоні напружень структур зразків з жароміцного нікелевого сплаву CMSX-4 у різні моменти часу. Обговорюються результати аналізу розмірів каналів γ -фази у сплаві за допомогою кількісного оцінювання перетворених бінарних зображень. Знайдені характеристики були поставлені у відповідність до значення швидкості деформацій повзучості, що була визначена розрахунковим шляхом за відомими експериментальними даними. Показано можливість визначення переходу від ділянки встановленої повзучості до етапу лавиноподібного зростання деформацій та прихованих пошкоджень. Для розглянутого прикладу проведено визначення розташування каналів у представницькому зображенні. Запропоновано методику корегування кривих повзучості з залученням даних обробки зображень структури матеріалу.

Ключові слова: програмний засіб, обробка зображень, бінарні зображення, структури матеріалу, повзучість, пошкоджуваність.

The paper contains a description of the approach, algorithms, and software tool for image analysis of deformed material structures. The developed approach is based on the analysis of the microstructure of the material to identify important factors that affect high-temperature deformation during creep in a heat-resistant nickel-based alloy, namely, the dimensions of the channels and their orientation. The developed software tool uses algorithms for converting images into binary black and white using the Otsu method. The intensity of the gradient at each point of the image is visualized using the Sobel operator. Fragment boundaries are determined using the Canny edge detector. Straight line segments are found using the Hough transformation. The software tool is implemented in the Python programming language using the OpenCV library. The main components are described and a flow chart of the program is provided. With the use of the developed software, the transformation of the known experimentally obtained images of the structures of the specimens from heat-resistant nickel-based alloy CMSX-4 deformed at a temperature of 1273K and in a wide range of stresses at different time moments was performed. The results of the analysis of the dimensions of the γ -phase channels in the alloy using quantitative evaluation of transformed binary images are discussed. The found characteristics were matched to the value of the creep strain rate, which was determined by calculation based on known experimental data. The possibility of determining the transition from the secondary creep to the stage of avalanche-like growth of strains and hidden damage is shown. For the considered example, the location of the channels in the representative image was determined. A technique for correcting creep curves with the involvement of material structure image processing data is proposed.

Key words: software, image processing, binary images, material structures, creep, damage.

Вступ.

Класичну механіку деформівного твердого тіла було побудовано на базі використання рівнянь стану, значення фізичних констант до яких визначались за даними проведених на макроскопічному рівні експериментальних випробувань [1, 2]. Під терміном «дослідження на макроскопічному рівні» розуміють, що зразки для експериментів мають розміри порядку сантиметрів, самі ж випробування проводять на спеціальному експериментальному обладнанні з вимірюванням їхніх переміщень. Такі підходи є характерними для отримання діаграм деформування та кривих повзучості [1, 2]. Після визначення таких експериментальних даних їхньою обробкою розрахунковим шляхом знаходились значення констант, що входять до визначальних рівнянь.

Між іншим, велику інформацію щодо деформівної поведінки та характеристик накопичення прихованої пошкоджуваності можуть надати матеріалознавчі дослідження, що виконуються на так званому мезо- рівні (структура металів) та мікроскопічному (молекулярному або атомному) рівні. Головною проблемою в цьому була відсутність можливості побудувати функціональні залежності між потрібними характеристиками на макро- та мікро- або мезо- рівнях. В останні роки почали з'являться роботи, в яких подібні залежності формуються (див. наприклад [3-7]).

Б.Ф.Дайсоном та М.Мак-Ліном [3] створено рівняння стану повзучості з урахуванням розвитку трьох типів мікроструктурної нестабільності (дислокація, кавітація частинок і меж зерен) для суперсплаву на основі нікелю IN738LC. В роботах [4, 5] запропоновано ефективний підхід до формулювання рівнянь стану для задач механіки суцільного середовища з використанням даних експериментів з аналізу структури матеріалу протягом експлуатації ядерних реакторів. Вплив водню на кінематику, термодинаміку та кінетику еволюції незворотних деформацій та пошкодження отримано на основі запропонованих рівнянь в'язкопластичності континууму Баммана та пошкодження Хорстемейера. В роботах Х.Альтенбаха, К.Науменка зі співавторами [6, 7] побудовані мікро-макро моделі використано для аналізу нелінійного деформування при високих температурах.

Для описаного аналізу є необхідною обробка фотографічних зображень структури матеріалу, отриманої, завдяки, наприклад, використанню електронного мікроскопу. Без належної автоматизації така робота є досить складною та може призводити до певних неточностей. У зв'язку з цим для виконання аналізу структури матеріалу було запропоновано використання методології обробки зображень [8-11]. Використання спеціального програмного забезпечення дозволяє проводити необхідні дії з перетворення

растрових зображень, виділення важливих його елементів та формування якісних та кількісних висновків.

Дану статтю присвячено опису підходу, алгоритмів та програмного засобу для розв'язання задачі аналізу мікроструктурних зображень одного зі сплавів з метою визначення або уточнення характеристик його повзучості.

Опис підходу, алгоритмів та програми.

На даному етапі розглянемо підхід та його реалізацію в задачі визначення характеристик повзучості на прикладі аналізу результатів експериментального дослідження деформування жароміцного нікелевого сплаву CMSX-4 [12, 13]. У роботі [12] виконано аналіз мікроструктури даного сплаву та встановлено кореляцію між швидкістю деформацій повзучості та товщиною каналу γ -фази у матеріалі. Отримані результати були використані для аналізу достовірності роботи розробленого методу аналізу зображень та програмного засобу, створеного на його основі.

Розглянемо основні етапи роботи. Для проведення аналізу було запропоновано наступну послідовність дій. Після завантаження файлу з зображенням проводиться перетворення отриманого масиву точок, що описує растрове зображення, у бінарний формат з використанням тільки чорного та білого кольорів. Далі необхідно класифікувати кожний піксель як “чорний” або “білий” за його інтенсивністю. Для зображення будувється його гістограма.

За допомогою методу Отцу [14] знайдемо порогове значення і розділимо усі пікселі на “чорні” та “білі”. Приклад результатів процесу розподілення представлено на рис. 1. Після перетворення будувється нове, вже бінарне зображення.

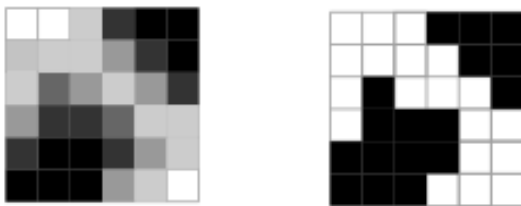


Рисунок 1 – Початковий вигляд зображення та перетворене бінарне зображення

Використаємо даний підхід для перетворення типового зображення мікроструктури матеріалу. Спочатку, на основі зображення, формується гістограма розподілу інтенсивності пікселів. Використовуючи метод Отцу, на цій гістограмі визначається оптимальне порогове значення (рис.2).

Подальше використання встановленого порогового значення дозволяє класифікувати кожен піксель зображення як чорний або білий, в результаті чого формується бінарне зображення, представлене на рисунку 3.

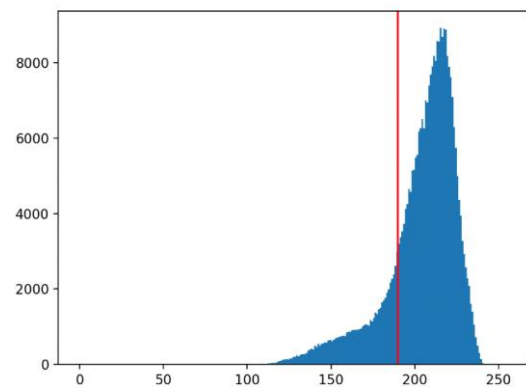


Рисунок 2 – Гістограма розподілу з відміченим пороговим значенням.



Рисунок 3 – Бінарне зображення структури матеріалу, отримане після перетворення.

Після отримання нового масиву точок з їхнім бінарним розподілом отримується можливість класифікації зображення за певним критерієм. Це дозволяє ефективно розділити різні області зображення, зокрема відрізнити структурні елементи матеріалу, що має ключове значення для подальшого аналізу його властивостей.

Тепер розглянемо основні етапи визначення розмірів γ -фази на зображенні структури сплаву. Формалізуємо її як задачу визначення країв розподілу та ліній різної інтенсивності на зображенні. Для цього спочатку з використанням оператора Собеля [15] візуалізуємо інтенсивність градієнту в кожній точці зображення.

Використаємо підхід з проходом у двох перпендикулярних напрямках, що відповідають напрямкам осей декартової системи координат (абсциса X у горизонтальному напрямку, ордината Y у вертикальному). Розглядається фрагмент зображення, аналізується різка зміна інтенсивності пікселів. Далі визначається перша похідна функції яскравості для точного визначення швидкості зміни інтенсивності градієнту, що сприяє ефективному виявленню та аналізу текстурних особливостей і геометричних властивостей на зображенні.

Даний алгоритм використано на зображеннях, що наведено у роботі [13] та які демонструють різні

розподіли характеристик структури у часі впродовж деформування при повзучості. Застосуємо алгоритм окремо у напрямках координатних осей. Як приклад, на рис. 4 наведемо результат його роботи за напрямком осі Y.

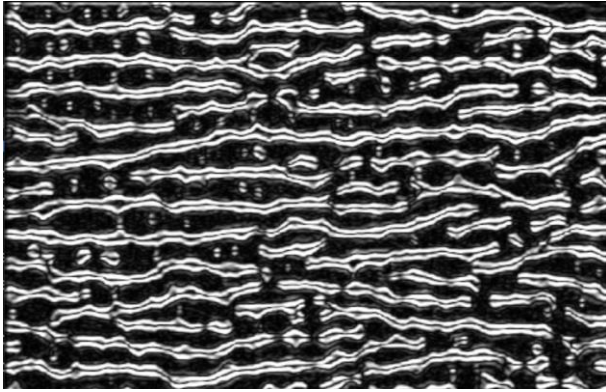


Рисунок 4 – Інтенсивність градієнту за напрямком осі Y

Далі необхідно використати детектор країв Кенні [16]. Алгоритм дій полягає у наступному. Задаються порогові значення градієнту. Будь-які пікселі зі значенням градієнту, що перевищує значення $maxVal$, враховуються, а пікселі, зі значенням градієнту, що є нижчими за $minVal$, відкидаються. Пікселі, котрі лежать між цими двома порогами, класифікуються на основі їх зв'язності. Якщо вони з'єднані з пікселями, які мають інтенсивність градієнту вищу за $maxVal$, вони вважаються частиною країв. В іншому випадку відкидаються. Ця методологія забезпечує точність виявлення країв, мінімізуючи вплив шуму та неточностей. Основну схему використання алгоритму надано на рис. 5.

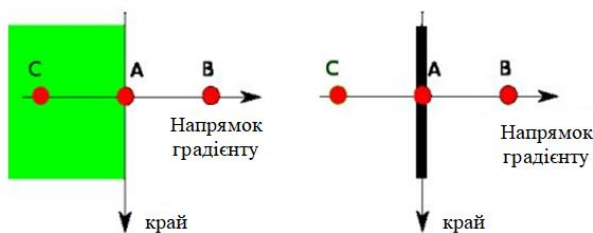


Рисунок 5 – Схема визначення країв за допомогою детектора країв Кенні

Після використання описаного алгоритму зображення, що обробляється, перетворюється на наступне. Його представлено на рис. 6.

Черговим кроком є визначення прямих ліній з використанням перетворення Гафа [17]. Кожна точка на зображенні репрезентується у просторі параметрів, використовуючи полярну систему координат. Аналіз полягає у виявленні перетинів синусоїд в цій системі. Застосування порогу виявлення дозволяє ефективно розрізняти значущі лінії від шуму. Цей механізм гарантує, що лінії з високою концентрацією точок у полярному просторі параметрів ідентифікуються як релевантні, тим самим оптимізуючи точність виявлення прямих ліній на зображенні. В результаті

формується двовимірний масив, кожен елемент якого має значення, що дорівнює сумі точок або пікселів, розташованих на прямій, поданій полярними координатами. При цьому елемент з максимальним значенням визначить шукану пряму. Результат роботи алгоритму з наведеними відрізками прямих представлено на рис. 7. Відмітимо, що незважаючи на неповне визначення каналів алгоритмом, їхня кількість корелює з кількістю прямих ліній, визначених на зображенні.

Описаний алгоритм реалізовано у вигляді програми на мові Python з використанням бібліотеки OpenCV [18]. Програма автоматично визначає кількість темних і світлих пікселів у зображенні, перетвореному в градації сірого. Спочатку відбувається читування значень пікселів растрового зображення, шлях до якого передається через аргумент командного рядку. Після читування застосовується бінарне порогове перетворення, використовуючи метод Отцу для розділення пікселів на темні та світлі. Підраховується загальна кількість пікселів у зображенні, кількість світлих пікселів (пікселів, що перевищують порогове значення), та обчислюється відсоток темних пікселів від загальної кількості. Видається необхідна інформація, включаючи значення встановленого порогу, загальної кількості пікселів, кількості світлих і темних пікселів, а також відсоток темних пікселів. Інформація виводиться до консолі, а бінарне зображення відображається на екрані. Основну блок-схему програми представлено на рис.8.

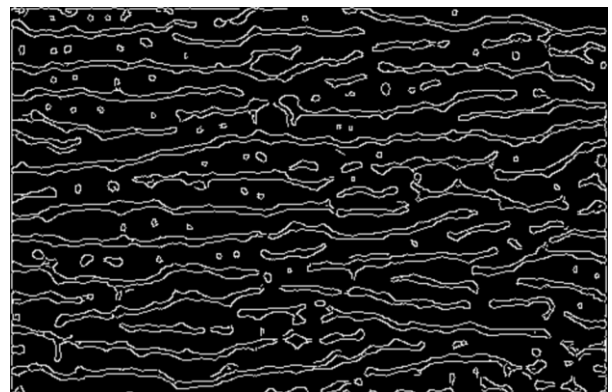


Рисунок 6 – Поточний вигляд зображення після роботи алгоритму виявлення країв

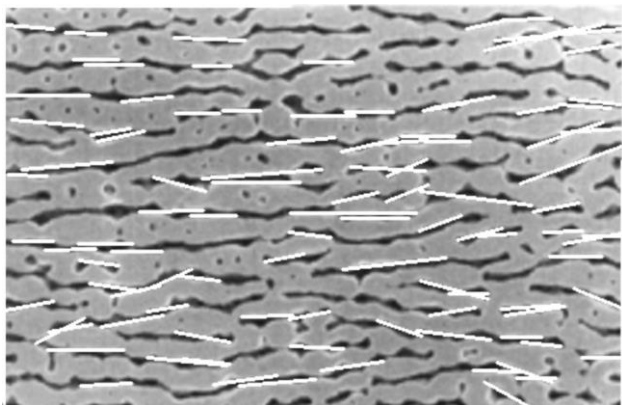


Рисунок 7 – Зображення зі знайденими відрізками прямих

Тестування та перевірка програми з використанням файлів з відомим значенням розподілів інтенсивності зображення показало цілком задовільну її працездатність.

Методика визначення відповідності характеристик зображення та швидкості деформацій повзучості

Розроблену програму було використано для продовження комплексної перевірки її працездатності на прикладі низки зображень структури жароміцного сплаву CMSX-4, наведених у роботі [12] та описаних у роботі [13]. У цій статті міститься як інформація щодо кривих повзучості, діаграм «швидкість деформації повзучості – деформація повзучості» й інших даних, отриманих при температурі 1273 K та різних значеннях напружень розтягу, так й надано зображення структури сплаву при деформуванні у різні моменти часу. Авторами [12, 13] наголошується, що за результатами виконаних досліджень встановлену кореляцію між розмірами каналів γ -фази та швидкістю деформацій повзучості.

Даний сплав відрізняється тим, що рівень отриманих на першій та другій ділянці кривих повзучості є досить незначним, а основне зростання деформацій має місце на третій, прискореній ділянці, що передусє руйнуванню.

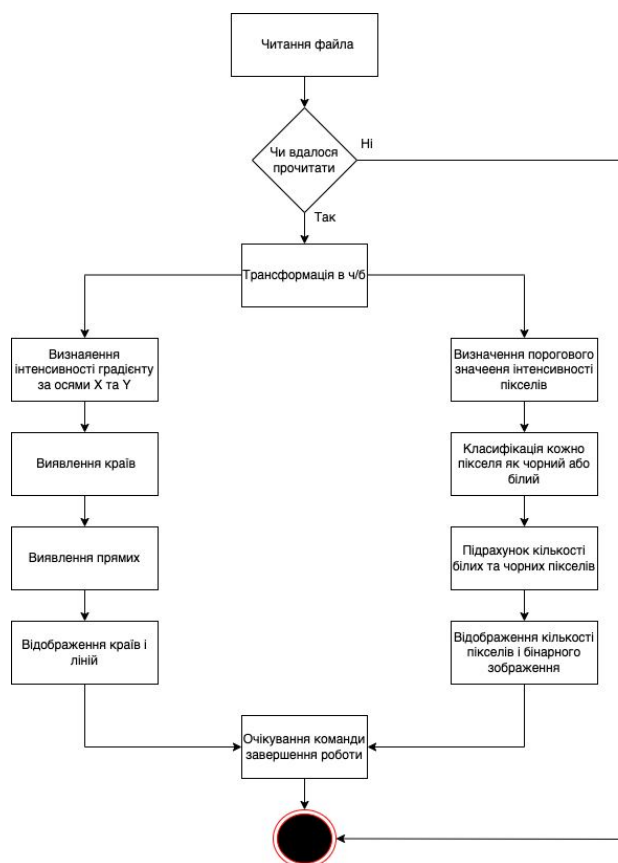


Рисунок 8 – Блок-схема програми для аналізу структури матеріалу

За допомогою даних, що наведені у роботі [12], було проведена обробка описаних залежностей (деформація повзучості від часу, швидкість деформації повзучості від саме деформації повзучості) у діапазоні напружень 100 – 400 МПа та знайдені значення констант, що входять до визначальних рівнянь. У зв'язку з наявністю всіх трьох ділянок повзучості до використання було залучено рівняння, що використовує гіпотезу зміцнення [1, 2]. Залучено еволюційне рівняння для скалярного параметру пошкоджуваності ω [1, 2]:

$$\dot{\epsilon} c^{\alpha} = B \frac{\sigma^n}{(1-\omega)^m} \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = D \frac{\sigma^m}{(1-\omega)^m}, \quad \omega(0)=0, \quad \omega(t^*)=1, \quad (2)$$

де c – деформація повзучості,

σ – напруження,

t^* – час завершення руйнування зразку,

B, D, n, m, α – константи, що визначаються після обробки експериментальних даних.

Отримано наступні їхні значення: $B = 4.26 \cdot 10^{-18} \text{ МПа}^{-n}/\text{с}$, $n=3.04$, $\alpha=0.4$, $D = 9.5 \cdot 10^{-20} \text{ МПа}^{-m}/\text{с}$, $m=5.22$. Побудовані криві повзучості для різних інтервалів часу представлено на рис. 9 та 10. Менший інтервал (рис.9) було обрано для того, щоб відобразити криві повзучості на перших двох ділянках. Загальний вигляд

кривих повзучості представлено на рис. 10. На рисунках 9 та 10 крива 1 відповідає навантаженню 250 МПа, крива 2 – 160 МПа, крива 3 100 МПа.

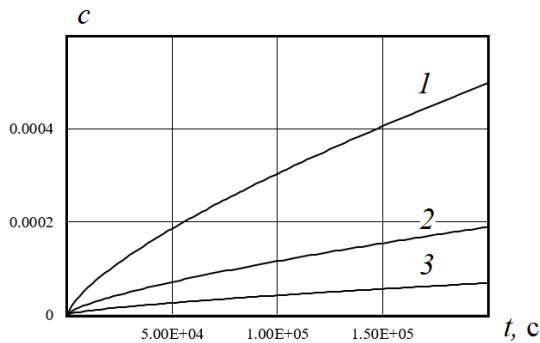


Рисунок 9 – Криві повзучості. Перша та друга ділянка

Використаємо алгоритм обробки зображень, реалізований у розробленій програмі, для аналізу змін у структурі сплаву при повзучості. У роботі [12] наведено структури для трьох моментів часу повзучості та після руйнування. Такі зображення структур є типовими та тому можуть вважатись представницькими. Отже, аналіз буде проводитись для повних зображень, що містяться у роботі [12].

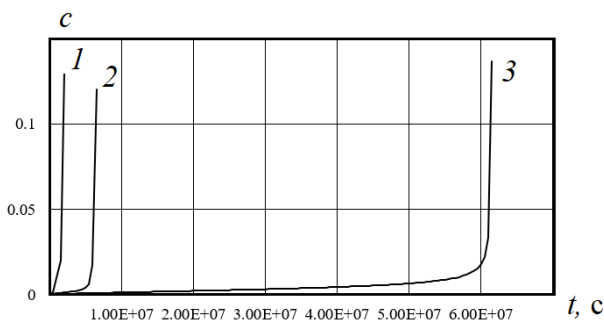


Рисунок 10 – Криві повзучості. Загальний вигляд

Залучимо гіпотезу, яку є найлегше використати при аналізі. Вважатимемо, що поточну ширину каналів можливо поставити у відповідність з наявністю відсотку чорних або білих пікселів на зображеннях (для бінарного зображення не має значення). Далі оперуємо зі значеннями для білих пікселів. Для відомих трьох моментів часу $t_1=3.6 \cdot 10^4$ с, $t_2=2.52 \cdot 10^5$ с, $t_3=3.24 \cdot 10^5$ с при навантаженні 250 МПа було проведено обробку зображень. Як приклад, наведемо результати роботи програми для моменту t_2 . Їх наведено на рис. 11.

Робота програми для трьох моментів часу визначила відсотковий вміст пікселів білого кольору у відповідних зображеннях структури. Для моменту t_1 це значення 84 %, для t_2 82 %, для t_3 78 %. Похибку в даному випадку визначено у 2%.

Розглянемо криву повзучості, побудовану для значення напруження розтягу 250 МПа для часового діапазону, що відповідає значенням $t_1 - t_2$. Її представлено на рис. 12. Згідно з обчисленнями за

співвідношеннями (1), (2) швидкість деформації повзучості на ділянці $t_1 - t_2$, яка є ділянкою встановленої повзучості, є постійною та складає $2.6 \cdot 10^{-9}$ с⁻¹. Відсотковий вміст білого кольору тут є практично однаковим та складає 84 % та 82 %. Цей факт може вказати на кореляцію між даними значеннями та швидкістю деформацій повзучості. При значенні часу t_3 отримуємо менше значення вмісту. Як можна бачити з рис. 12, цей час вже відноситься до початку третьої ділянки, на якій починається зростання деформацій. Змасштабовані з коефіцієнтом $2.14 \cdot 10^{-6}$ значення деформацій, вираховані за результатами обробки бінарних зображень, наведено на рис. 12 окремими точками для трьох моментів часу, що розглядаються.

Як додатковий параметр оцінювання можливо залучити значення кількості горизонтальних відрізків. Справа у тому, що при деформуванні, як показано у роботі [12], канали у структурі з тих, що мають два взаємно перпендикулярних напрями, перетворюються на такі, що йдуть у напрямку, що відповідає горизонтальному. У момент, що передує руйнуванню, структура має вигляд, наведений на рис. 13. Таким чином, виникає додатковий параметр, який можливо формалізувати як кількість визначених алгоритмом відрізків прямих (наведено на рис. 7). Так, наприклад, для моменту руйнування, структуру для якого представлено на рис. 7, їхня кількість складає 95.

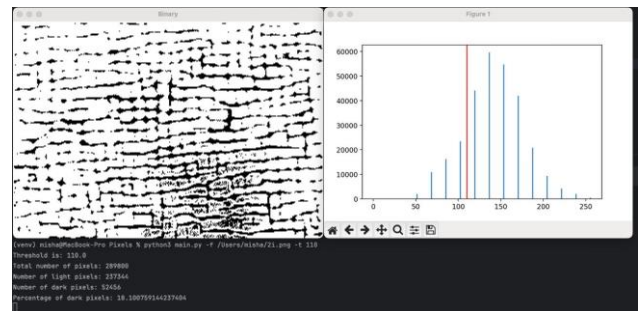


Рисунок 11 – Результат роботи програми перетворення зображення структури для випадку часу деформування $t_2=2.52 \cdot 10^5$ с. Навантаження розтягу 250 МПа.

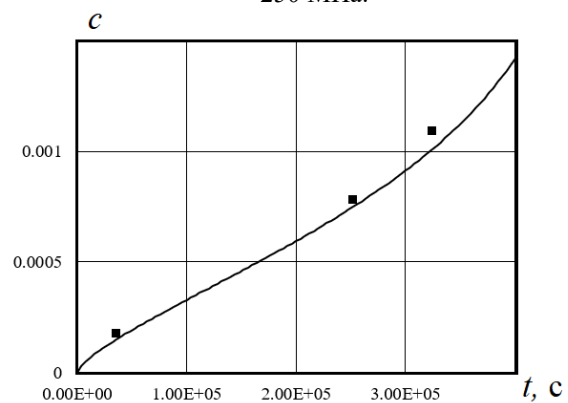


Рисунок 12 – Крива повзучості при значенні напруження розтягу 250 МПа, точки побудовано за даними обробки зображень структури

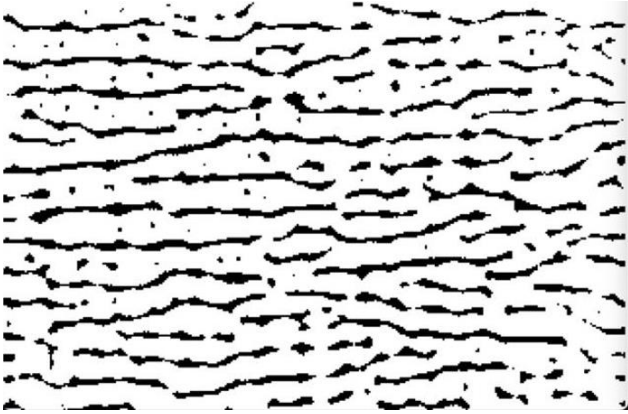


Рисунок 13 – Структура сплаву у момент, що передувє руйнуванню

Висновки.

Дана стаття містить опис підходу, алгоритмів та програмного засобу для аналізу зображень деформованих структур матеріалів. Підхід побудовано на виділенні важливих факторів, що впливають на високотемпературне деформування при повзучості у жароміцному нікелевому сплавi. Серед таких чинників розглянуто розміри каналів та їхня орієнтація. З застосуванням розробленого програмного забезпечення виконано перетворення зображень деформованих структур сплаву у різні моменти часу. Це дозволило запровадити кількісний аналіз представницьких елементів. Знайдені характеристики були поставлені у відповідність до значення швидкості деформацій повзучості, що була визначена розрахунковим шляхом за відомими експериментальними даними. Показана можливість аналізу кривих повзучості з залученням даних обробки зображень структури матеріалу.

Дана методика може розглядатись як корисна у практичних застосуваннях. Реально експерименти з повзучості зразків проводять на обмеженій часовій базі. Між іншим, довготривале деформування та пов'язане з ним накопичення прихованих пошкоджень можуть мати важливі особливості, що не відтворюються даними експериментів на малих часових базисах [1]. Якщо є наявною структура матеріалу після тривалої експлуатації, то за її аналізом є можливим скорегувати або виправити рівняння стану. Це, як показано в роботі, в першу чергу стосується аналізу ділянки встановленої повзучості. Але й перехід до стадії лавиноподібного накопичення пошкоджень може бути визначеним. Також з застосуванням даної програми є можливим встановити залежності на момент руйнування зразку з використанням аналізу розташування каналів у сплавах такого типу, що розглянуто у роботі.

Виконаний аналіз властивостей швидкості деформацій повзучості на прикладі деформування при повзучості жароміцного сплаву CMSX-4 є лише прикладом демонстрації можливостей роботи розробленої програми. Наявність обмеженої кількості зображень структури не надає можливості достатньо обґрунтованих висновків та кількісних оцінок. Є

зрозумілим, що розроблений алгоритм та програму у цілому є необхідним перевірити на більшій кількості експериментальних даних.

Подяка. Ця робота була частково підтримана (Д.В. Бреславський) Фондом Фольксваген "Visiting research program for refugee Ukrainian scientists" (Az. 9D257).

Список літератури

1. Lemaitre J. Mechanics of solid materials. / J. Lemaitre, J.L. Chaboche // Cambridge: University press, 1994. – 556 p.
2. Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. / Yu.N. Rabotnov // Amsterdam/London: North-Holland Publishing, 1969. – 822 p.
3. Dyson B.F. Micromechanism-quantification for creep constitutive equations. IUTAM Symposium on Creep in Structures / B.F. Dyson, M. McLean Ed.: S. Murakami, N. Ohno. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – P. 3–16.
4. Horstemeyer M.F. Modeling stress state dependent damage evolution in a cast Al-Si-Mg aluminum alloy / M.F. Horstemeyer // Theoretical and applied fracture mechanics. 2000, v.33, issue 1. – p. 31–47
5. Chandler M.Q. A continuum model for hydrogen-assisted void nucleation in ductile materials. / Chandler M.Q., Bammann D.J., Horstemeyer M.F. //Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2013, v. 21, issue 5. – p. 055028.
6. Naumenko K. Constitutive Models / K. Naumenko, H. Altenbach // Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis: Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. – 2016. – C. 173–282.
7. Ozhoga-Maslovskaja O. Micromechanical simulation of grain boundary cavitation in copper considering non-proportional loading. / O.Ozhoga-Maslovskaja, K. Naumenko, H. Altenbach, O. Prygmoriev // Computational Materials Science, Volume 96, Part A, 2015. – p. 178–184.
8. Acharya T. Image processing: principles and applications. / T. Acharya, A.K. Ray – John Wiley & Sons, 2005.
9. Davies E.R. Computer vision: principles, algorithms, applications, learning. / E.R. Davies – Academic Press, 2017.
10. Shih F. Y. Image processing and pattern recognition: fundamentals and techniques. / F.Y. Shih – John Wiley & Sons, 2010.
11. Chen C.H. (ed.). Handbook of pattern recognition and computer vision. / C.H. Chen – World scientific, 2015.
12. Miura N. Relation between Creep Rate during Accelerating Creep Stage and γ Channel Thickness in Single Crystal Nickel-based Superalloy, CMSX-4. / N Miura, Y. Kondo, T. Matsu. //Tetsu-to-hagané 89(12), 2003. – p.1240–1247.
13. Hiraguchi H. A Novel Simulation Method for Phase Transition of Single Crystal Ni based Superalloys in Elevated Temperature Creep Regions via Discrete Cosine Transform and Maximum Entropy Method. In "Creep in Structures VI", Holm Altenbach, Konstantin Naumenko eds. / H. Hiraguchi // Advanced Structured Materials, 194 Springer, 2023. – P. 151–160.
14. Bangare S.L. Method For Image Thresholding. / Sunil L. Bangare, Amruta Dubal, Pallavi S. Bangare, S.T. Patil, Reviewing Otsu's // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Volume 10, Number 9. – pp. 21777–21783
15. Chethan K.S. Analysis of Image Quality using Sobel Filter. / K.S. Chethan, G.S. Sinchana, K.R. Nataraj, A.L. Choodarathnakara // Conference: Third International Conference on Inventive Systems and Control (ICISC). 2019. – P. 526–531.
16. Touka Hafsia Algorithm for Different Blurred and Noisy Images" / Touka Hafsia, Asma Belhaj, Hatem Tlijani, Khaled Nouri //2022 IEEE 21st international Cnference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA). – 2022. – p.342–349
17. Duda, R. O. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures/ R.O. Duda, Hart P.E. // Comm. ACM, Vol. 15. 1972. – p. 11–15
18. Guobo Xie Image Edge Detection Based On Opencv/ Guobo Xie, Wen Lu // International Journal of Electronics and Electrical Engineering, Vol. 1, No. 2. – 2013. – p. 104–106

References (transliterated)

1. Lemaitre J. , Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: University press, 1994. – 556 p.
2. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*.– Amsterdam/London: North-Holland Publishing, 1969. – 822 p.
3. Dyson B.F., McLean M. Micromechanism-quantification for creep constitutive equations. IUTAM Symposium on Creep in Structures / Ed.: S. Murakami, N. Ohno. Dordrecht: *Kluwer Academic Publishers*, 2001. P. 3–16.
4. M.F. Horstemeyer et al. Modeling stress state dependent damage evolution in a cast Al–Si–Mg aluminum alloy // *Theoretical and applied fracture mechanics*. 2000, v.33, issue 1, p. 31–47
5. M. Q. Chandler, D.J. Bammann, M.F. Horstemeyer. A continuum model for hydrogen-assisted void nucleation in ductile materials // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2013, v. 21, issue 5, p. 055028.
6. Naumenko K., Altenbach H. Constitutive Models // *Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis: Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models*. – 2016. – C. 173–282.
7. Oksana Ozhoga-Maslovskaja, Konstantin Naumenko, Holm Altenbach, Oleksandr Prygorniev. Micromechanical simulation of grain boundary cavitation in copper considering non-proportional loading. *Computational Materials Science*, Volume 96, Part A, 2015, Pages 178–184.
8. Acharya T., Ray A. K. *Image processing: principles and applications*. – John Wiley & Sons, 2005.
9. Davies E. R. *Computer vision: principles, algorithms, applications, learning*. – Academic Press, 2017.
10. Shih F. Y. *Image processing and pattern recognition: fundamentals and techniques*. – John Wiley & Sons, 2010.
11. Chen C. H. (ed.). *Handbook of pattern recognition and computer vision*. – World scientific, 2015.
12. N Miura, Y. Kondo, T. Matsu. Relation between Creep Rate during Accelerating Creep Stage and γ Channel Thickness in Single Crystal Nickel-based Superalloy, CMSX-4. *Tetsu-to-hagané* 89(12), 2003. – p.1240–1247.
13. H. Hiraguchi. A Novel Simulation Method for Phase Transition of Single Crystal Ni based Superalloys in Elevated Temperature Creep Regions via Discrete Cosine Transform and Maximum Entropy Method. In “Creep in Structures VI”, Holm Altenbach, Konstantin Naumenko eds. *Advanced Structured Materials*, 194 Springer, 2023. p- 151-160.
14. Sunil L. Bangare , Amruta Dubal, Pallavi S. Bangare, Dr. S. T. Patil. Reviewing Otsu's Method For Image Thresholding. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2015. Volume 10, Number 9 p. 21777-21783
15. Chethan K S, Sinchana G S, Nataraj K R, Choodarathnakara A L. Analysis of Image Quality using Sobel Filter. Conference: Third International Conference on Inventive Systems and Control (ICISC). 2019. P. 526-531.
16. Touka Hafsia, Asma Belhaj, Hatem Tlijani, Khaled Nouri, Implementing Canny Edge Detection Algorithm for Different Blurred and Noisy Images. *2022 IEEE 21st international Cnference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, p.342-349
17. Duda, R. O. and P. E. Hart, Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Comm. ACM*, Vol.15, pp.11-15
18. Guobo Xie and Wen Lu, Image Edge Detection Based On Opencv. *International Journal of Electronics and Electrical Engineering*, Vol. 1, No. 2, 2013. p. 104-106

Надійшла (received) 11.12.2023

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Грошевий Михайло Олександрович (Hroshevyi Mykhailo) – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Mykhailo.Hroshevyi@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3156-4402>

Татарінова Оксана Андріївна (Tatarinova Oksana) – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Oksana.Tatarinova@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3090-8469>

Сенько Альона Володимирівна (Senko Alyona) – доктор філософії, старший викладач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Alyona.Senko@khpi.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9961-7419>

Н.А. ВАСИЛЬЧЕНКО, М.І. ШАПОВАЛОВА, В.О. ФЕДОРОВ, В.В. ОВЧАРЕНКО

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО РІШЕННЯ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

У роботі розглядається питання важливості вибору матеріалів для виробництва інструментів у фрезерній справі та визначення їхньої придатності шляхом детальний аналіз міцності та поведінки під час обробки матеріалів. Для покращення довговічності та оптимізації виробництва, пропонується використовувати математичні моделі та чисельні методи, зокрема метод найменших квадратів та метод вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ) за допомогою методу Гауса з вибором головного елементу. Ці методи застосовуються для апроксимації експериментальних даних та аналізу характеристик матеріалу, забезпечуючи точність в оцінці його властивостей. Досліджено ситуації встановлення функцій, коли лише деякі значення відомі, а також спрощення обчислень відомих функцій. Робота включає програмне забезпечення для чисельного розрахунку та візуалізації різних типів задач, які успішно вирішуються за допомогою розглянутих методів. Програмний алгоритм для апроксимації даних передбачає збереження інформації у текстовому файлі, введення користувачем кількості змінних та обрання кількості та типу базисних функцій. Після введення користувачем параметрів програма формує систему рівнянь на основі обраних функцій, визначає коефіцієнти апроксимації та будує графік для об'єктивної оцінки результатів. Завдяки зручному інтерфейсу користувач може легко взаємодіяти з програмою, шляхом введення значень. Аналіз результатів здійснюється за допомогою графічного відображення, що спрощує робочий процес та полегшує сприйняття отриманих даних. Апроксимація функцій за допомогою чисельних методів може бути ефективно використана в різних сферах для вирішення прикладних задач механіки.

Ключові слова: метод найменших квадратів, апроксимація, середньоквадратичне відхилення, чисельні методи, C++, C#.

The present work delves into the significance of material selection in the manufacturing of tools for milling operations and determines their suitability through a detailed analysis of strength and behavior during material processing. To enhance longevity and optimize production, the utilization of mathematical models and numerical methods, notably the least squares method and the solution of systems of linear algebraic equations (SLAE) employing the Gaussian elimination method with pivot selection, is proposed. These methods are applied for the approximation of experimental data and the analysis of material characteristics, ensuring precision in the evaluation of its properties. Situations where only partial data is known are investigated, along with simplifications in the computation of known functions. The study encompasses software for numerical computation and visualization of various problem types, effectively addressed through the aforementioned methods. The software algorithm for data approximation involves storing information in a text file, user input of variables, and selection of the quantity and type of basis functions. After the user inputs of parameters, the program formulates a system of equations based on selected functions, determines approximation coefficients, and generates a graph for an objective assessment of results. With a user-friendly interface, users can easily interact with the program, input values, and analyze results through graphical representation, streamlining the workflow and facilitating the comprehension of obtained data. The approximation of functions using numerical methods proves to be efficiently applicable in diverse fields for addressing applied mechanics problems.

Keywords: Least squares method, approximation, mean squared deviation, numerical methods, C++, C#.

Вступ. У сучасній області обробки матеріалів, зокрема у фрезерній справі, велике значення приділяється дослідженню міцності інструментів, використовуваних під час обробки. Ці інструменти, такі як мечики, фрези, свердла та інші, виготовляються з різних матеріалів, і важливо, щоб вони відповідали конкретним вимогам, які ставляться перед ними в процесі обробки матеріалів.

З метою покращення довговічності інструментів і оптимізації роботи підприємства, необхідно ретельно вибрати матеріал для виготовлення інструментів і провести дослідження їх придатності для використання у фрезеруванні. Важливою стороною визначення характеристик матеріалу є аналіз його поведінки під час навантажень, що дозволяє отримати важливі дані про залежність різних параметрів інструменту.

Для аналізу цих даних та їх подальшого використання в аналітичних цілях часто використовують математичні моделі. Важливим етапом є апроксимація експериментальних даних, що може включати в себе інтерполяцію в межах експериментальної області та екстраполяцію за її межами. Для цього використовуються різні підходи, такі як методи інтерполяції та методи адаптації кривих, зокрема метод найменших квадратів (МНК). Ці методи дозволяють адаптувати математичні моделі так, щоб вони найточніше відображали властивості

інструменту на основі доступних експериментальних даних.

1. Аналіз існуючих шляхів рішення проблеми.

В контексті сучасних вимог та технологічних потреб, проводяться широкі наукові дослідження у сфері матеріалознавства, з метою розвитку та удосконалення інструментів і технологій для механічної обробки матеріалів. Оптимізація інструментів та технологій обробки для поліпшення ефективності, якості та тривалості функціонування інструментів у важких умовах різання – є актуальною задачею, що фокусує увагу багатьох науковців. У роботі [1] вивчається моделювання та оптимізація фрезерного різця на CNC-станках, використовуючи карбідні вставні різці. Вплив тепла та тертя на властивості матеріалів під час різання, а також розгляд використання критичних сировинних матеріалів, присвячені роботи [2-3]. Авторами у [4] досліджується пошкодження карбідних інструментів, зосереджуючись на мікроскопічних механізмах пошкоджень та їхньому впливі на процес різання. Стаття [5] пропонує аналітичну модель для передбачення сил різання при глибокому свердлінні твердих та крихких матеріалів. Аналіз впливу параметрів різання на фрезерування сплаву, використовуючи штучні нейронні мережі та методологію відгуку поверхні проведені у роботі [6]. Технологія ортогонального токарно-фрезерного

оброблення для точного оброблення складних матеріалів розглядається науковцями у [7]. Робота [8], спрямована на використання методу відгуку поверхні для оптимізації стану поверхні при свердлінні.

Актуальність теми визначається потребою у високоякісній обробці матеріалів в промислових галузях, таких як авіація, космос, та інші, де важливо досягти високої продуктивності та якості обробки, а також зменшити використання критичних сировинних матеріалів та зберегти їхню стійкість. Отже, дослідження в цій сфері заслуговують уваги. Використання комп'ютерних технологій для візуалізації процесу аналізу та застосування чисельних методів і математичного моделювання - визнається перспективною альтернативою витратних експериментів.

2. Постановка задачі. Мета роботи полягає у створенні додатку, який приймає таблично задані значення залежності зменшення діаметру фрези від часу та залежність розтягування металу від прикладеної сили, та здатний перетворювати їх у графіки відповідних функцій. Virішення прикладної задачі реалізувати з використанням чисельних методів (МНК, метод Гауса з вибором головного елемента).

3. Чисельні методи рішення прикладних задач. Апроксимація методом найменших квадратів. Апроксимація МНК встановлюється на основі наступних припущень: нехай є n значень x та відповідних їм y . Основна мета апроксимації полягає в пошуку функції F , такої, що $F(x) \approx y$ [11]. Умову апроксимації, в якій $\varphi(x)$ приблизно дорівнює $y(x)$, розглядається як вимога мінімізації квадратичної різниці між функціями $\varphi(x)$ та $y(x)$, що призводить до застосування методу найменших квадратів (1). Обирається конкретний варіант апроксимації (2), де $N < n$. Умова мінімізації різниці (1) трансформується у систему лінійних рівнянь, представлену за схемою (3). Розв'язуючи цю систему і отримуючи значення коефіцієнтів a_k , вставляємо їх у функцію $\varphi(x)$. Таким чином, завдяки вирішенню системи, досягається поставлена задача апроксимації. Для оцінки похибки методу можна використовувати середньоквадратичне відхилення (4).

$$S = \sum_{i=1}^N (y(x_i) - \varphi(x_i))^2 = \min \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^N a_k \sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_m(x_i), (m = \overline{1, N}) \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{S}{n}} \quad (4)$$

Вирішення СЛАУ методом Гауса з вибором головного елемента. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ) за допомогою методу Гауса із вибором головного елемента є важливим

етапом у вирішенні прикладних задач, спрямованих на встановлення взаємозв'язків між даними [9]. Система рівнянь надає параметри, які використовуються для аналітичної побудови даної залежності.

Основною метою на цьому етапі є точне та раціональне розв'язання отриманої системи. У роботі використовується метод Гауса з вибором головного елемента у стовпці [9-10]. Розглядається конкретна система рівнянь (5). Оскільки важлива точність отриманих результатів, систему (5) рекомендується розв'язувати методом Гауса із вибором головного елемента у стовпці.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & x_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n & b_n \end{array} \times \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \quad (5)$$

$a_{11} \dots a_{nn}$ – коефіцієнти, отримані в ході розрахунків;

$x_1 \dots x_n$ – вектор шуканої величини;

$b_1 \dots b_n$ – вектор відповідей системи.

Суть методу полягає у наступних етапах. Спочатку, систему (5) представляємо у вигляді розширеної матриці (6). Обираємо головний елемент (найбільший за модулем) у першому стовпці, а при необхідності переставляємо місцями першу строку та строку із обраним головним елементом. Нехай головний елемент – a_{21} , тоді (6) перетворюється у (7).

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{cccccc} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \quad (7)$$

Поділом першої строки на головний елемент і виключенням усіх елементів першого стовпця отримуємо матрицю (8).

Далі аналогічні операції проводяться для кожного наступного стовпця ітеративно, враховуючи вже оброблені строки. Це дозволяє отримати трикутну матрицю (9). Завершальним етапом є зворотній хід методу, починаючи з крайньої строки крайнього стовпця, і здійснюючи аналогічні алгебраїчні перетворення. Результатом є кінцева матриця (10).

$$\begin{array}{cccccc} 1 & a_{22}/a_{21} & \dots & a_{2n}/a_{21} & b_2/a_{21} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \vdots & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & a_{22}/a_{21} & \dots & a_{2n}/a_{21} & b_2/a_{21} \\
 0 & 1 & \vdots & a_{1n} & b_1/a_{ij} \\
 0 & 0 & 1 & a_{3n} & b_3/a_{ij} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & b_n/a_{ij}
 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\
 0 & 1 & \vdots & 0 & c_2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & c_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & c_n
 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{matrix}
 c_1 & x_1 \\
 c_2 & x_2 \\
 \text{де } c_3 \approx x_3 \\
 \vdots & \vdots \\
 c_n & x_n
 \end{matrix}$$

Хоча метод Гауса із вибором головного елемента є ефективним у багатьох випадках, варто відзначити його два суттєві недоліки. По-перше, якщо елемент головної діагоналі нульовий, систему неможливо вирішити за допомогою цього методу. По-друге, при малих значеннях дільника, може виникнути значна похибка при його округленні. Враховуючи ці аспекти, метод Гауса із вибором головного елемента вирішує обидва зазначених недоліки одночасно.

4. Застосування чисельних методів у вирішенні прикладних задач фрезерування. Використання чисельних методів у вирішенні завдань фрезерування представляє собою актуальний підхід. Обидва розглянуті вище методи виявляються досить зручними для програмування і можуть бути ефективно поєднані між собою. Зокрема, оскільки останнім етапом методу найменших квадратів (МНК) є розв'язання системи рівнянь, таке завдання можна ефективно виконати за допомогою методу Гауса із вибором головного елемента.

Розглянемо принцип роботи комплексу програми, реалізований на мовах програмування C++ для виконання методу і C# для графічного відображення отриманих результатів. Для вирішення поставлених завдань буде розглянуто кілька прикладів. У процесі фрезерування металевих виробів застосовують різноманітні інструменти, серед яких особлива роль надається фрезам. Під час обробки виробу станком, фреза поступово втрачає свій ресурс, що проявляється у зменшенні її діаметру. Беручи до уваги останнє, особливо важливо, щоб шпиндель (вал, який має можливість обертатися в обох напрямках), враховував цей факт та підходив ближче до виробу з плином часу. В якості прикладу розглядається фреза, виготовлену зі сталі R18. Залежність зменшення діаметру фрези від часу представлено у Таблиці 1.

Таблиця 1 – Залежність зменшення діаметру від часу [12].

$x_{\text{год}}$	$y_{\text{мм}}$
0	16
10	15,999
20	15,998

30	15,997
----	--------

Таблиця 2 – Залежність розтягування сталі 45 від прикладеної сили [12].

$F, \text{кН}$	$\Delta l, \text{мм}$
16,20	0,15
16,875	0,8
18,90	2,4
21,825	4
25,20	6,4
26,55	8,8
27,45	10,4
26,10	12,8

Представлена таблично задана залежність (Табл. 1), обробляється за допомогою методу найменших квадратів (МНК) із використанням створеного програмного забезпечення.

Алгоритм роботи програми сформульовано наступним чином:

- Інформація про матеріал зберігається у текстовому файлі для подальшого аналізу.
- Після запуску програми користувач вводить кількість змінних, що використовуються для апроксимації.
- Обирається кількість базисних функцій, які будуть використовуватися для апроксимації даних (у розглянутому випадку обрано лінійну функцію).
- Коефіцієнти отриманої системи переносяться у графічний інтерфейс користувача, під відповідні умовні позначення.
- Коефіцієнти обраної апроксимуючої функції представляють собою отримані дані.
- Для об'єктивності рішення будується крива та відображені дані у програмі. Цей процес передбачає введення всіх необхідних значень та вибір опції «побудувати графік» у меню (Рис. 1).

Результат показує, що апроксимація ефективно виконана, оскільки функція точно описує табличні дані. Середньоквадратичне відхилення, яке у цьому прикладі дорівнює 0, свідчить про високу точність апроксимації.

Досліджуючи механічні властивості матеріалу, експериментально отримано діаграму розтягування (Рис. 2). Проведено аналіз та апроксимацію отриманої залежності. Під час навантаження фізичного тіла, наприклад, алюмінієвого стрижня, визначається напруження. У фрезерній справі важливо враховувати фізичні властивості інструменту. Досліджуючи новий матеріал для фрез, проводиться аналіз його діаграми розтягування, апроксимуючи нелінійну частину.

У виробництві фрез для алюмінію використовують сплави швидкоріжучої сталі (Табл. 2), які апроксимуються для покращення матеріалу інструменту. Створюючи новий матеріал, важливо проаналізувати його поведінку під навантаженням, використовуючи діаграму розтягування для апроксимації та покращення

характеристик.

Результатом розробленої програми є аналіз діаграм розтягування з урахуванням механічних властивостей матеріалу, спрямований на оптимізацію виробництва та покращення фрез для обробки алюмінію.

Таким чином, виявлено, що завдання апроксимації успішно виконане, і отримана функція

ефективно описує табличні дані (Табл. 2). Середньоквадратичне відхилення для цього конкретного випадку, становить приблизно 0,71. За отриманими результатами можна зробити висновки стосовно придатності матеріалу, що був підданий випробуванню, як сировини для створення фрези зазначених характеристик.

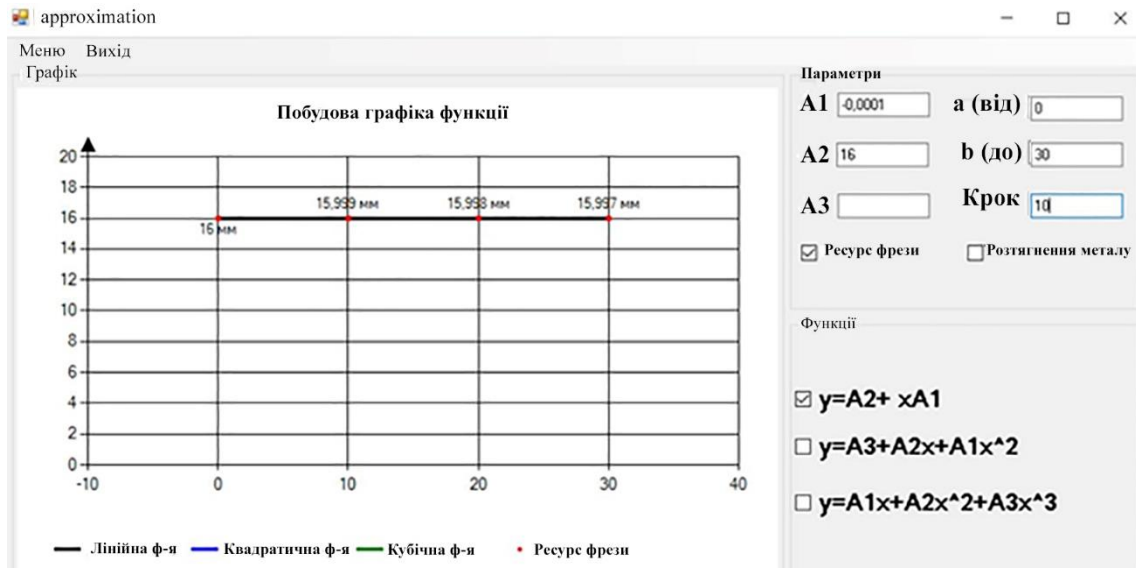


Рис. 1 – Результат роботи програми. Ресурс фрези.



Рис. 2 – Результат роботи програми. Розтягнення металу.

Висновки. У роботі розглядається проблема встановлення функції у випадках, коли вона невідома, а лише деякі її значення відомі з експериментальних вимірювань чи розрахунків. Також розглядається ситуація спрощення обчислень відомої функції, яка може мати складний вид. Теорія апроксимації функцій надає відповіді на ці питання, шляхом знаходження функції $\varphi(x)$, яка наближена до вихідної $f(x)$ і при цьому зручна для розрахунків.

Робота демонструє вирішення прикладних задач за допомогою чисельних методів, представляючи програмне забезпечення для розрахунку та візуалізації двох типів задач. По таблично заданим функціям обчислюється ресурс фрези та розтягнення матеріалу. Отримані результати відзначаються невеликою похибкою, що свідчить про придатність розглянутих методів та розроблених програм для застосування на практиці. Такий підхід використання чисельних

методів у розв'язанні задач апроксимації може бути успішно застосованим у різних сферах.

Список літератури

1. Phokobye S. N., Daniyan I. A., Tlhabadira I., Masu L., VanStaden L.R. *Model design and optimization of carbide milling cutter for milling operation of m200 tool steel*. Procedia CIRP, 2019. Vol. 84, No. 3, pp. 954-959. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2019.04.300>
2. Soori M., Asmael M. *Mechanical behavior of materials in metal cutting operations, a review*. Journal of New Technology and Materials, 2020, Vol. 10, No. 2, pp. 79-82. [ffhal-03024765f](https://doi.org/10.1016/j.jntm.2020.03.002)
3. Rizzo A., Goel S., Grilli M. L., Iglesias R., Jaworska L., Lapkovskis V., Novak P., Postolnyi B. O., Valerini D. *The critical raw materials in cutting tools for machining applications: a review*. Materials, 2020, 13(6), 1377; <https://doi.org/10.3390/ma13061377>
4. Cheng Y., Nie W., Li C., Jia W., Qin C. *Study on material damage of carbide tool during heavy-duty cutting, integrated ferroelectrics*, Integrated Ferroelectrics, 2020, Vol. 206, No. 1, pp. 132-150. <https://doi.org/10.1080/10584587.2020.1728634>
5. Yu R., Li S., Zou Z., Liang L. *Mathematical modeling and experimental study of cutting force for cutting hard and brittle materials in fixed abrasive trepanning drill*. Micromachines, 2023, Vol. 14, No. 6, pp. 1270. <https://doi.org/10.3390/mi14061270>
6. Kilickap E., Yardimeden A., Çelik Y. H. *Mathematical modelling and optimization of cutting force, tool wear and surface roughness by using artificial neural network and response surface methodology in milling of Ti-6242S*. Appl. Sci, 2017, Vol. 7, No. 10, pp. 1064. <https://doi.org/10.3390/app7101064>
7. Sun T., Qin L., Fu Y., Liu C., Shi R. *Mathematical modeling of cutting layer geometry and cutting force in orthogonal turn-milling*. Journal of Materials Processing Technology, 2021, Vol. 290, pp. 116992. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2020.116992>
8. Zhujani F., Qehaja N., Abdullahi F., Bruci M. *Mathematical modelling of surface roughness for evaluating the effects of cutting parameters in drilling process*. DAAAM International Vienna, 2016, pp. 0195-0202. <https://doi.org/10.2507/27th.daaam.proceedings.029>
9. Фельдман Л. П. *Чисельні методи в інформатиці: Підручник / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К. : Видавнича група BHV, 2006. – 480 с. ISBN 966-552-155-1*
10. Зразевський Г. М. *Чисельні методи в задачах механіки: метод. посіб. Ч. 1: Теоретична та прикладна механіка / уклад. – Київ : Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2015. – 99 с.*
11. Мусіяка В. Г. *Основи чисельних методів механіки : підручник*. Київ : Вища школа, 2004. 240 с.
12. Каталог KYOCERA Cutting Tools. <https://asia.kyocera.com/products/cuttingtools/catalogs/>

References (transliterated)

1. Phokobye S. N., Daniyan I. A., Tlhabadira I., Masu L., VanStaden L.R. *Model design and optimization of carbide milling cutter for milling operation of m200 tool steel*. Procedia CIRP, 2019. Vol. 84, No. 3, pp. 954-959. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2019.04.300>
2. Soori M., Asmael M. *Mechanical behavior of materials in metal cutting operations, a review*. Journal of New Technology and Materials, 2020, Vol. 10, No. 2, pp. 79-82. [ffhal-03024765f](https://doi.org/10.1016/j.jntm.2020.03.002)
3. Rizzo A., Goel S., Grilli M. L., Iglesias R., Jaworska L., Lapkovskis V., Novak P., Postolnyi B. O., Valerini D. *The critical raw materials in cutting tools for machining applications: a review*. Materials, 2020, 13(6), 1377; <https://doi.org/10.3390/ma13061377>
4. Cheng Y., Nie W., Li C., Jia W., Qin C. *Study on material damage of carbide tool during heavy-duty cutting, integrated ferroelectrics*, Integrated Ferroelectrics, 2020, Vol. 206, No. 1, pp. 132-150. <https://doi.org/10.1080/10584587.2020.1728634>
5. Yu R., Li S., Zou Z., Liang L. *Mathematical modeling and experimental study of cutting force for cutting hard and brittle materials in fixed abrasive trepanning drill*. Micromachines, 2023, Vol. 14, No. 6, pp. 1270. <https://doi.org/10.3390/mi14061270>
6. Kilickap E., Yardimeden A., Çelik Y. H. *Mathematical modelling and optimization of cutting force, tool wear and surface roughness by using artificial neural network and response surface methodology in milling of Ti-6242S*. Appl. Sci, 2017, Vol. 7, No. 10, pp. 1064. <https://doi.org/10.3390/app7101064>
7. Sun T., Qin L., Fu Y., Liu C., Shi R. *Mathematical modeling of cutting layer geometry and cutting force in orthogonal turn-milling*. Journal of Materials Processing Technology, 2021, Vol. 290, pp. 116992. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2020.116992>
8. Zhujani F., Qehaja N., Abdullahi F., Bruci M. *Mathematical modelling of surface roughness for evaluating the effects of cutting parameters in drilling process*. DAAAM International Vienna, 2016, pp. 0195-0202. <https://doi.org/10.2507/27th.daaam.proceedings.029>
9. Feldman L. P. *Chysel'ni metody v informatytsii: Pidruchnyk / L. P. Feldman, A. I. Petrenko, O. A. Dmytriieva. – K. : Vydavnycha hrupa VNV, 2006. – 480 p. ISBN 966-552-155-1*
10. Zrazhevskiy H. M. *Chysel'ni metody v zadachakh mekhaniky: metod. posib. Ch. 1: Teoretychna ta prykladna mekhanika / uklad. – Kyiv : Kyivskiy nats. un-t im. T. Shevchenka, 2015. – 99 p.*
11. Musiaka V. H. *Osnovy chysel'nykh metodiv mekhaniky : pidruchnyk*. Kyiv : Vyshcha shkola, 2004. 240 p.
12. Katalog KYOCERA Cutting Tools. <https://asia.kyocera.com/products/cuttingtools/catalogs/>

Надійшла (received) 22.07.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Васильченко Нікіта Андрійович (Vasylchenko Nikita) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», бакалавр з прикладної математики; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: nikita.vasylchenko@infiz.khpi.edu.ua

Шапалова Марія Ігорівна (Shapovalova Mariia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: MiShapovalova@gmail.com, mariia.shapovalova@khpi.edu.ua; ORCID: 0000-0002-4771-7485.

Федоров Віктор Олександрович (Fedorov Viktor) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Victor.Fedorov@khpi.edu.ua; ORCID: 0000-0002-4814-6768.

Овчаренко Віталій Володимирович (Ovcharenko Vitalii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Vitalii.Ovcharenko@khpi.edu.ua; ORCID: 0009-0008-1464-3425.

Д.С. ФЕДОТОВ, В.В. ОВЧАРЕНКО, В.О. ФЕДОРОВ

ЗАСТОСУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕТОДІВ У ЗАДАЧАХ АЕРОБАЛІСТИКИ. ВИЗНАЧЕННЯ СПРЯЖЕНИХ КУТІВ КИДАННЯ ТА ПОБУДОВА БАЛІСТИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ

Вивчена задача аеробалістики артилерійських неактивних снарядів на прикладі спрощеної математичної моделі. Як окремі підзадачі розглянуті: початкова задача, визначення горизонтальної дальності пострілу (метод Рунге-Кутти 4-го порядку з модифікацією поліноміальної інтерполяції); задача оптимізації (метод Пауелла), визначення кутів максимальної дальності — кутів кидання, при яких досягається максимальна горизонтальна дальність; крайова задача (метод стрільби з методом Ньютона-Рафсона/ методом січних/ методом поліноміальної інтерполяції), визначення кутів кидання при заданій відстані та задача знаходження спряжених траєкторій — настільної та навісної траєкторій, при яких досягається однакова горизонтальна дальність польоту снаряда при різних кутах кидання; обернена задача геодезії (метод Вінсенті), визначення геодезичної відстані між двома географічними точками на несферичній моделі Землі WGS-84. Графічно проілюстровані залежності від кутів кидання наступних характеристик: горизонтальна та вертикальна дальності, максимальна вертикальна та горизонтальна складова швидкості, модуль кінцевої швидкості, кут падіння та час польоту снарядів. Обґрунтовано існування спряжених траєкторій та визначено стратегію для інтервального запуску снарядів з метою одночасного враження цілі по різних траєкторіях. Програмування обчислювальних методів, алгоритму розв'язання поставленої задачі та елементи візуалізації були реалізовані за допомогою пакету прикладних програм MATLAB, розроблена методика та програмне забезпечення показали ефективність та можливість їх практичного застосування.

Ключові слова: зовнішня балістика, балістична траєкторія, математична модель, обчислювальні методи, системи диференціальних рівнянь.

The problem of aeroballistics of non-reactive artillery projectiles is studied by means of a simplified mathematical model. The following problems are considered as separate subproblems: initial value problem, determination of the horizontal range of a projectile (4th order Runge-Kutta method with modification of polynomial interpolation); optimization problem (Powell's method), determination of the angles of maximum range — the throwing angles at which the maximum horizontal range is achieved; the boundary value problem (shooting method with Newton-Raphson method/ secant method/ polynomial interpolation), determination of throwing angles at a given distance and the problem of finding conjugate trajectories — the low and high angled trajectories, which achieve the same horizontal range of the projectile at different throwing angles; the inverse geodesy problem (Vincenty's formulae), determination of the geodesic distance between two geographical points on the WGS-84 non-spherical Earth model. The following characteristics are graphically illustrated as a function of throwing angles: horizontal and vertical ranges, maximum vertical and horizontal velocity components, magnitudes of terminal velocities, impact angle, and flight time of projectiles. The existence of conjugate trajectories is established and the strategy of sequential firing of projectiles with the aim of simultaneously hitting the target along different trajectories is determined. The programming of the numerical methods, the algorithm for solving the problem, and the visualization elements were implemented using the MATLAB application package, and the developed methodology and software have demonstrated their effectiveness and the possibility of their practical application.

Keywords: exterior ballistics, ballistic trajectory, mathematical model, numerical methods, systems of differential equations.

Вступ. Аеробалістика (зовнішня балістика) — це наука, що вивчає вплив аеродинамічних сил на рух ракет і снарядів.

Моделювання балістичних траєкторій, розуміння поведінки снаряда під час руху в атмосфері відіграє найважливішу роль як і в плануванні стратегічних військових операцій, забезпечуючи ефективність при мінімізації використання цінних ресурсів, так і для захисту, інформуючи цивільне населення про загрозу та розробляючи обґрунтовані заходи оборони.

У контексті даної статті, на прикладі спрощеної математичної моделі, увагу сконцетровано на побудові спряжених траєкторій — балістичних траєкторій, при яких досягається однакова горизонтальна дальність польоту снаряда при різних кутах кидання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасна наука про зовнішню балістику розвинулася як спеціалізований розділ динаміки твердих тіл, що рухаються під дією гравітаційних та аеродинамічних сил.

За три століття свого наукового існування зовнішня балістика досягла значного прогресу. За останні п'ятдесят років було досягнуто більшого прогресу, ніж за всі попередні століття. Так значний обсяг теоретичної інформації та результатів практичних досліджень викладено у [1,2], де розглядаються аеродинамічні сили та моменти, що діють на снаряди, побудова від найпростіших моделей

— руху у вакуумі, до найскладніших — повної моделі динаміки польоту з шістьма ступенями свободи.

У роботі [3] надається математична модель, де невизначеність обчислення сили спротиву повітря призводить до застосування апроксимації через розв'язання оберненої задачі механіки, що визначає функціональну залежність цієї сили на етапах руху снаряда та дозволяє автоматизувати визначення кута підйому в залежності від умов та параметрів стрільби.

Обчислювальні методи та наявні апроксимації, які можуть бути застосовані у контексті аеробалістики, наведені у [4-13].

Постановка задачі. Нехай задано дві точки на поверхні Землі, A та B , кожна з яких визначається певними координатами широти (φ) і довготи (λ). Під якими кутами кидання та через який проміжок часу від запуску першого снаряда з точки A потрібно запустити другий снаряд так, щоб вони одночасно влучили в точку B по двох різних траєкторіях? Дану задачу можна розділити на підзадачі:

- 1) Визначення геодезичної відстані D між заданими точками.
- 2) Визначення часу польоту снаряда t , що є розв'язком нелінійного рівняння

$$s_y(t) = 0, \quad t \neq 0.$$
- 3) Визначення кута найбільшої дальності $\theta_{\max}$. Якщо розглянути функцію $f(\theta_0)$ залежності

дальності польоту снаряда від кута кидання, то

$$\theta_{\max} = \operatorname{argmax} f(\theta_0).$$

- 4) Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій. Для цього потрібно розв'язати рівняння

$$f(\theta_0) = D.$$

- 5) Визначення часу польоту снарядів по спряжених траєкторіях. Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння.

Побудова математичної моделі руху снаряда.

Для постійної маси снаряда другий закон Ньютона дає загальне векторне диференціальне рівняння руху у вигляді [1, 2]

$$m \frac{dv}{dt} = \sum \mathbf{F} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}, \quad (1)$$

де

m – маса снаряда;

$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$ – вектор прискорення снаряда;

$\sum \mathbf{F}$ – векторна сума всіх аеродинамічних сил;

$\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння;

$\mathbf{\Lambda}$ – вектор прискорення Коріоліса.

Розглянемо спрощену модель, яка ґрунтується на припущенні, що маса снаряда зосереджена в матеріальній точці у просторі. На такий снаряд не діє жодна аеродинамічна сила, окрім сили спротиву повітря. Якщо дуже малим Коріолісовим прискоренням нехтувати, то рівняння набуває вигляду [1-3]

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F}_{\text{drag}} + m\mathbf{g}, \\ \mathbf{F}_{\text{drag}} &= -\frac{1}{2} \rho C_d S_{\text{fr.pr.}} |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \\ S_{\text{fr.pr.}} &= \frac{\pi d^2}{4}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$\mathbf{F}_{\text{drag}}$ – сила спротиву повітря;

ρ – густина повітря;

C_d – коефіцієнт аеродинамічного спротиву;

$S_{\text{fr.pr.}}$ – площа фронтальної проекції снаряда;

d – діаметр снаряда.

Так як густина повітря не є постійною величиною, то можна використати її апроксимацію, яка доречна в межах тропосфери [4]:

$$\rho = \rho(h) \approx \frac{p_0 M}{RT_0} \left(1 - \frac{Lh}{T_0} \right)^{\frac{|g|M}{RL} - 1},$$

де

p_0 – стандартний атмосферний тиск на рівні моря;

T_0 – стандартна температура на рівні моря;

h – висота над рівнем моря;

R – універсальна газова стала;

L – швидкість падіння температури;

M – молярна маса сухого повітря.

Розглянемо прямокутну систему координат з початком координат на дулі пушки:

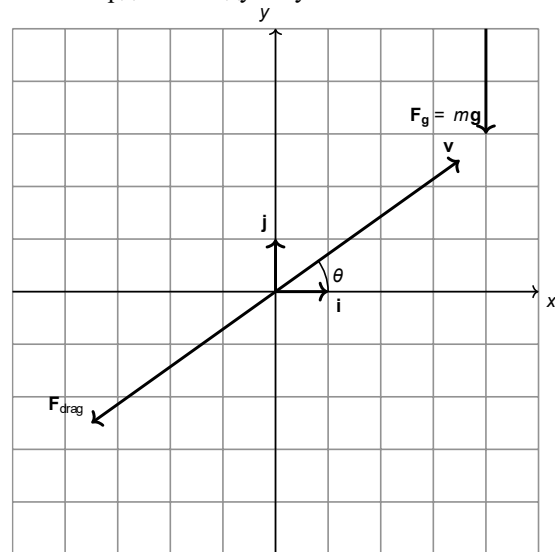


Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація діючих сил

Вісь Ox обираємо дотичною до поверхні землі в точці запуску і спрямовуємо вздовж лінії вогню, нехтуючи відхиленням ($s_z = v_z = 0$). Вісь Oy спрямована вертикально вгору, через точку запуску.

Спроектуємо скалярно на осі всі наявні вектори, та запишемо другий закон Ньютона (2) у проекціях:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -|\mathbf{F}_{\text{drag}}| \cos \theta \\ m \frac{dv_y}{dt} = -m|\mathbf{g}| - |\mathbf{F}_{\text{drag}}| \sin \theta. \end{cases}$$

Скориставшись рис. 1 та визначенням швидкості, система диференціальних рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{s}_x = -a(1 - bs_y)^c \sqrt{\dot{s}_x^2 + \dot{s}_y^2} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y = -|\mathbf{g}| - a(1 - bs_y)^c \sqrt{\dot{s}_x^2 + \dot{s}_y^2} \dot{s}_y, \\ a = \frac{\pi d^2 p_0 M C_d}{8mRT_0}, \quad b = \frac{L}{T_0}, \quad c = \frac{|\mathbf{g}|M}{RL} - 1. \end{cases}$$

Введемо нові змінні:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ \dot{s}_x \\ s_y \\ \dot{s}_y \end{bmatrix},$$

після чого отримаємо нормалізовану систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a(1 - bx_3)^c \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -|\mathbf{g}| - a(1 - bx_3)^c \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_4, \end{cases} \quad (3)$$

а початкові умови мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1(t)|_{t=t_0} = 0 \\ x_2(t)|_{t=t_0} = |\mathbf{v}_0| \cos \theta_0 \\ x_3(t)|_{t=t_0} = 0 \\ x_4(t)|_{t=t_0} = |\mathbf{v}_0| \sin \theta_0. \end{cases} \quad (4)$$

У такому вигляді початкова задача (3,4) подається у програму для подальшого розв'язку.

Математичне підґрунтя. Однією з підзадач є визначення геодезичної відстані, ця задача класифікується як обернена геодезична — знаходження найкоротшого шляху між двома заданими точками. Розв'язання відбувається на моделі Землі WGS-84 ітеративним оберненим методом Вінсенті, що цитується як точний з похибкою до міліметрів [6, 7].

Методи оптимізації. Для розв'язку третьої підзадачі треба використовувати методи одновимірної оптимізації, одним з таких є метод Пауелла, який і використовується у програмі [8].

Обчислювальні методи. Як і побудова балістичних траєкторій, так і кожне обчислення функцій $s_y(t)$ та $f(\theta_0)$ потребує розв'язку початкової задачі (3,4). Для цього у програмі використовуються явні m -етапні методи Рунге-Кутти [9].

Розглянемо n -вимірну систему диференціальних рівнянь з початковими умовами:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_{\max}],$$

де

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T,$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)]^T.$$

Явний m -етапний метод Рунге-Кутти для даної системи визначається так:

$$\frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{\tau} = \sum_{s=1}^m b_s \mathbf{k}_{i,s} \Rightarrow \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau \sum_{s=1}^m b_s \mathbf{k}_{i,s},$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{i,1} = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{i,m} = \mathbf{f}\left(t_i + c_m \tau, \mathbf{x}_i + \tau \sum_{s=1}^{m-1} a_{m,s} \mathbf{k}_{i,s}\right), \end{cases}$$

де τ — крок дискретизації по часу.

Коефіцієнти методів зручно подаються у вигляді таблиці Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Аналізуючи методи, розглянуті в літературі, було обрано класичний метод Рунге-Кутти 4-ого порядку точності як оптимальний за кількістю етапів та потрібній точності у контексті поставленої задачі:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Модифікації методів Рунге-Кутти. Природною умовою зупинки інтегрування системи диференціальних рівнянь (3) є

$$x_3(t) = s_y(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

Геометрична інтерпретація цієї умови — влучання снаряда у кінцеву точку. Оскільки функція $s_y(t)$ є дискретною, то розв'язувати вищевикладене рівняння потрібно використовуючи наближені методи.

Нехай система диференціальних рівнянь (3) з початковими умовами (4) була інтегрована методами Рунге-Кутти з кроком дискретизації по часу $\tau = t_0$. Розглянемо n -ту ітерацію:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t)|_{t=t_n} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ x_4^{(n)} \end{bmatrix}, \quad x_3^{(n)} > 0,$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}(t)|_{t=t_{n+1}} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \\ x_4^{(n+1)} \end{bmatrix}, \quad x_3^{(n+1)} < 0.$$

Звідси випливає, що $\exists t^* \in (t_n, t_{n+1}): x_3(t^*) = 0$.

Модифікації методів Рунге-Кутти полягають саме у визначенні $t = t^*$ з подальшим знаходженням нового значення $\tau = \tau_{\text{new}}$ для інтегрування системи диференціальних рівнянь з метою визначення часу та горизонтальної дальності польоту снаряда, кінцевих швидкостей та кутів падіння, що потребує даних про снаряд у момент влучання.

Крайові задачі. Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій можна інтерпретувати як крайову задачу [10,11], яка розв'язується методом стрільби спільно з методом Ньютона-Рафсона, методом січних, або використовуючи поліноміальну інтерполяцію.

Нехай дано $n+1$ різних вузлів x_i , $i = \overline{0, n}$, та значення функції $y_i = y(x_i)$. Запишемо інтерполянт в інтерпретації Вандермонда:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Використовуючи умови інтерполяції, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Матрицю $\mathbf{V}$ називають матрицею Вандермонда [11,12], а вектор невідомих визначається як

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}.$$

З вищевикладених формул можна зробити висновок про єдиність полінома $P_n(x)$ степені $\leq n$ для якого виконуються умови інтерполяції.

Слід зазначити, що шукати інтерполянт в інтерпретації Вандермонда є нераціонально для великої кількості вузлів, тому що у загальному випадку визначення невідомих коефіцієнтів потребує $O(n^3)$ операцій, тому в програмі також реалізована поліноміальна інтерполяція Лагранжа.

Розглянемо класичну формулу полінома Лагранжа, де кожне обчислення $P_n(x)$ потребує $O(n^2)$ операцій додавань та множень:

$$e_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i e_i(x).$$

Введемо новий параметр ω_i — барицентричну вагу:

$$\omega_i = \frac{1}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}.$$

Запишемо ще два вигляди інтерполянта, де кожне обчислення $P_n(x)$ потребує $O(n)$ операцій додавань та множень [13]:

- 1) Модифікована форма полінома Лагранжа

$$\ell(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

$$P_n(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i y_i}{x - x_i}.$$

- 2) Барицентрична форма полінома Лагранжа

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i y_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{x - x_i}}.$$

Програмування усіх методів та візуалізація результатів здійснювалось на базі MATLAB [14], яка втілює інтерактивне середовище з високорівневою мовою програмування, що підтримує як числові, так і графічні команди для дво- та тривимірного аналізу та представлення даних.

Обґрунтування існування розв'язку поставленої задачі. Розглянемо дискретну множину кутів кидання

$$\Theta_0 = \{ \theta_0^{(k)} \mid \theta_0^{(k)} = 0.1^\circ + 0.01^\circ(k-1), k = \overline{1, 8991} \}.$$

Нескінченний аналог визначимо наступним чином:

$$\Theta_0^{(\infty)} = \{ \theta_0 \mid \theta_0 \in \mathbb{R}, \theta_0 \in (0^\circ, 90^\circ) \}.$$

Математична модель розглядається на прикладі снаряда М795 [15]. Слід зазначити, що коефіцієнт аеродинамічного спротиву було підібрано так, щоб модельована максимальна дальність польоту снаряда наближено збігалась зі зазначеною у відкритому доступі, тому дана характеристика може відрізнятись від реальної як наслідок спрощення математичної моделі.

Зробити висновок про існування спряжених траєкторій та траєкторії максимальної дальності, що у свою чергу підтверджує коректність поставленої задачі та існування її розв'язку, можна побудувавши тільки одну неявну функцію $s_x(\theta_0)$, яка задається дискретно в результаті розв'язку 8991 початкових задач (3,4) для всіх $\theta_0 \in \Theta_0$:

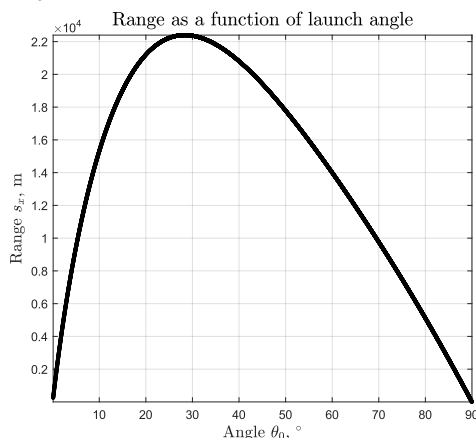


Рисунок 2 – Графік залежності горизонтальної дальності від кута кидання

Звідси випливають факти, які підтверджують існування шуканих траєкторій:

$$\exists! \theta_0 = \theta_{\max} \in \Theta_0^{(\infty)} : \theta_{\max} = \operatorname{argmax} s_x(\theta_0),$$

$$\exists \theta_{\text{low}}, \theta_{\text{high}} \in \Theta_0^{(\infty)} \setminus \{ \theta_{\max} \} : s_x(\theta_{\text{low}}) = s_x(\theta_{\text{high}}).$$

Частину чисельних результатів подано у наступній таблиці:

Таблиця 1 – Значення функції $s_x(\theta_0)$ в околі екстремуму

$\theta_0, ^\circ$	$s_x(\theta_0), m$	$t_{\max}, s$
28.1	22396.6158	59.341572
28.11	22396.68768	59.35637208
28.12	22396.75661	59.37116861
28.13	22396.82258	59.38596158
28.14	22396.88527	59.40074941
28.15	22396.94577	59.41553725
28.16	22397.00291	59.43031958
28.17	22397.0571	59.44509835
28.18	22397.10834	59.45987357
28.19	22397.15665	59.47464522
28.2	22397.20202	59.48941334
28.21	22397.24452	59.50417826
28.22	22397.28403	59.51893932
28.23	22397.3206	59.53369681
28.24	22397.35423	59.54845074
28.25	22397.38493	59.56320113
28.26	22397.4127	59.57794796
28.27	22397.43754	59.59269126
28.28	22397.45953	59.60743138
28.29	22397.47854	59.62216763
28.3	22397.49461	59.63690032
28.31	22397.50777	59.65162946
28.32	22397.518	59.66635505
28.33	22397.52531	59.68107711
28.34	22397.52972	59.69579563
28.35	22397.53128	59.71051098
28.36	22397.52986	59.72522247
28.37	22397.52553	59.7399304
28.38	22397.51828	59.75463478
28.39	22397.50813	59.76933563
28.4	22397.49508	59.78403294

З точністю до сотої градуса вже можна визначити кут максимальної дальності, але кожного разу розв'язувати тисячі, а у випадку підвищення точності — десятки тисяч систем диференціальних рівнянь, є нерациональним шляхом розв'язку поставленої задачі.

Для майбутнього аналізу можуть бути корисні й наступні залежності, які можна отримати аналогічним чином, що й $s_x(\theta_0)$:

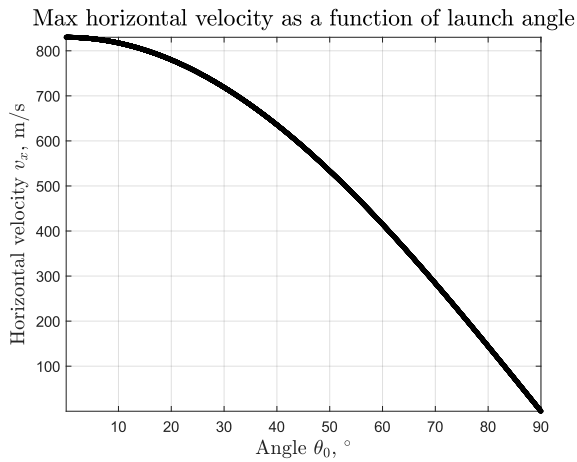


Рисунок 3 – Графік залежності максимальної горизонтальної складової швидкості від кута кидання

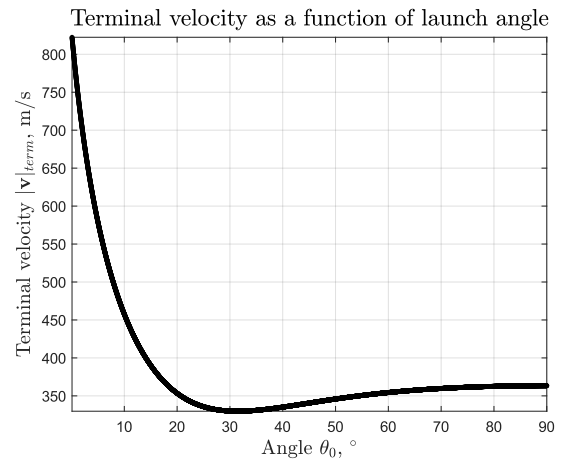


Рисунок 6 – Графік залежності кінцевої швидкості від кута кидання

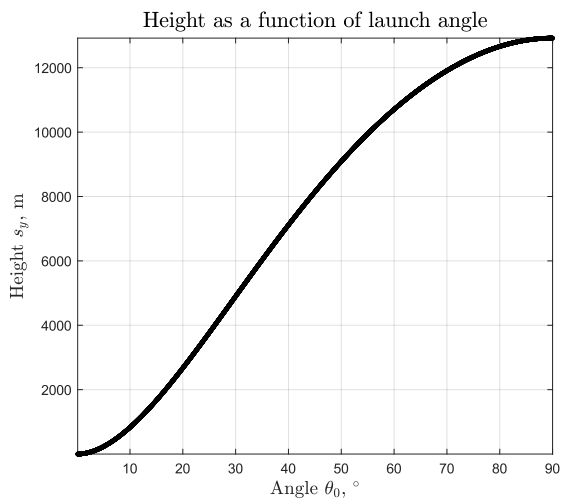


Рисунок 4 – Графік залежності вертикальної дальності від кута кидання

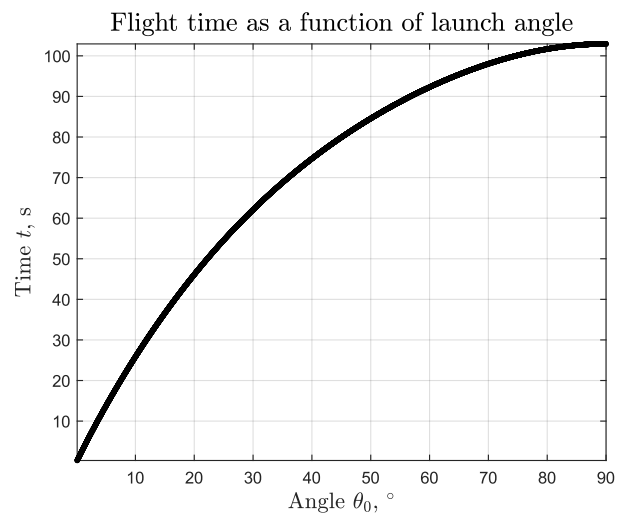


Рисунок 7 – Графік залежності часу польоту від кута кидання

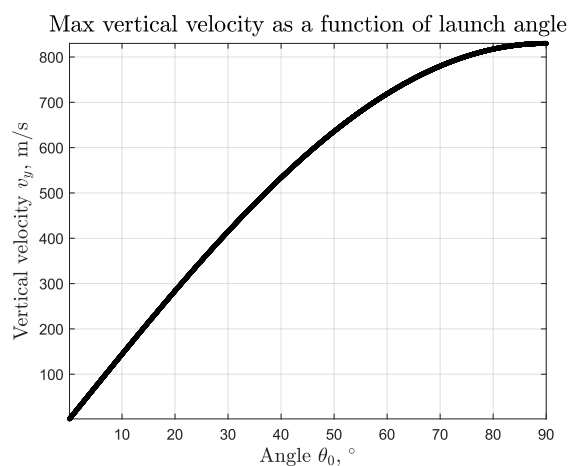


Рисунок 5 – Графік залежності максимальної вертикальної складової швидкості від кута кидання

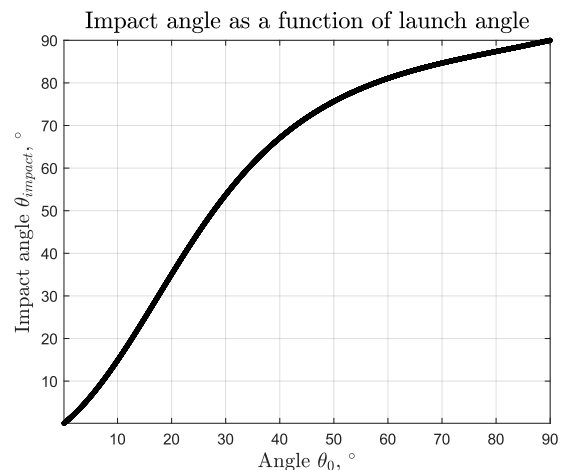


Рисунок 8 – Графік залежності кута падіння від кута кидання

Кут падіння розраховується за формулою

$$\theta_{\text{impact}} = \arccos\left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}_{\text{term}}}{|\mathbf{v}_{\text{term}}|}\right).$$

Використовуючи монотонність функції залежності часу польоту від кута кидання можна також зробити висновок, що

$$\exists! \Delta t: t_{\text{max}}(\theta_{\text{low}}) + \Delta t = t_{\text{max}}(\theta_{\text{high}}).$$

Отже, поставлена задача є повністю коректною та має розв'язок.

Тестування працездатності програми. Перш за все, на чому базується алгоритм — це розв'язання початкової задачі (3,4), яке відбувається методом Рунге-Кутти 4-ого порядку точності з кроком по часу $\tau_0 = 0.1$ s разом з модифікацією для визначення часу польоту методами поліноміальної інтерполяції. Алгоритм програми має наступний вигляд:

- 1) Розв'язання оберненої геодезичної задачі методом Вінсенті. Порівняння геодезичної відстані D з максимальною дальністю снаряда.
- 2) Визначення кута максимальної дальності методом Пауелла.
- 3) Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій методом січних.
- 4) Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння.

Допустима похибка у кожному методі варіюється, для тестування вона була встановлена на рівні $\varepsilon = 10^{-6}$ одиниць (градусів, метрів тощо).

Вхідними даними є характеристики снаряда М795 та координати точок

$$A(50.242222^\circ, 36.984722^\circ), \\ B(50.399967^\circ, 36.881389^\circ).$$

Після визначення геодезичної відстані

$$D \approx 19027.5106197135 \text{ m},$$

яке у середньому на даних точках відбувається за 5 ms , її можна нанести на відповідний графік для візуалізації поставленої задачі

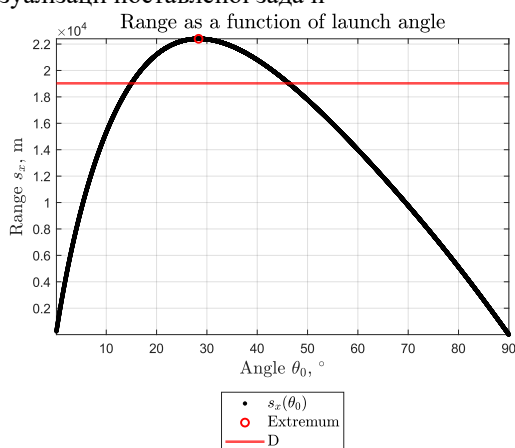


Рисунок 9 – Геометрична інтерпретація поставленої задачі

Для визначення кута максимальної дальності програми знадобилось 10 розв'язань початкових задач (3,4), а для визначення кутів спряжених траєкторій — 20 (11 для

визначення кута для настільної траєкторії, 9 — для навісної). Ці процеси у середньому відповідно тривали 120 ms та 187 ms .

Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння у середньому тривали 16 ms .

Побудувавши отримані траєкторії, можна побачити наступний результат:

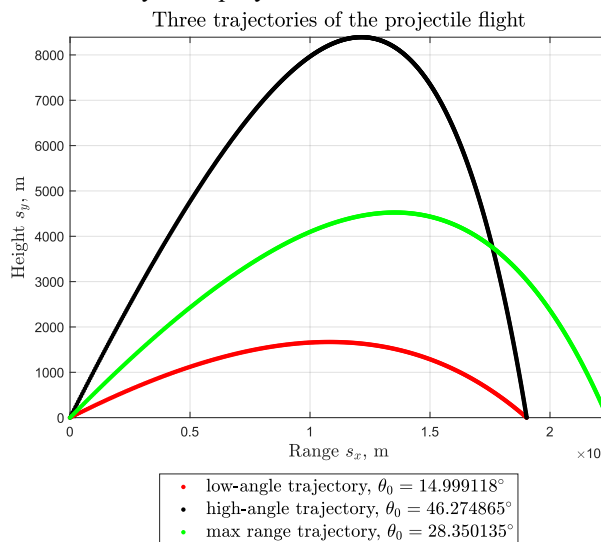


Рисунок 10 – Побудова трьох отриманих траєкторій

На відповідний графік можна нанести визначені спряжені кути, щоб візуально оцінити інтервал часу Δt для послідовного запуску снарядів:

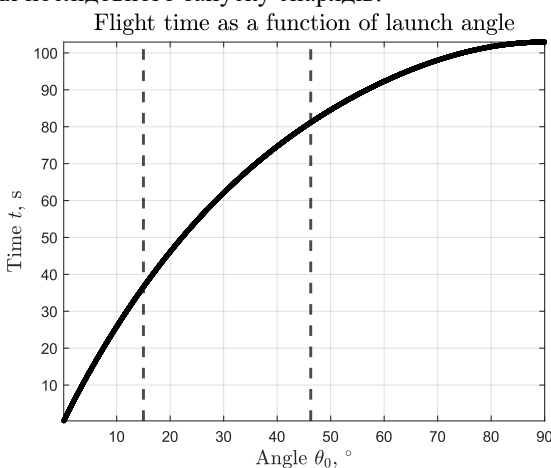


Рисунок 11 – Візуалізація часового інтервалу

Чисельний результат, отриманий в результаті роботи програми:

$$\Delta t \approx 44.575258 \text{ s}.$$

Отже, якщо запустити перший снаряд з точки A під кутом кидання $\theta_{\text{high}} = 46.274865^\circ$, а другий снаряд через проміжок часу Δt від моменту запуску першого снаряда під кутом кидання $\theta_{\text{low}} = 14.999118^\circ$, то обидва снаряди одночасно влучать у точку B по різних траєкторіях.

Основні результати роботи програми можна подати у вигляді таблиці:

Таблиця 2 – Основні характеристики для визначених траєкторій

	$\theta_0, ^\circ$	$t_{\max}, s$	$s_x(t_{\max}), m$	$ v_{\text{term}} , m/s$	$\theta_{\text{impact}}, ^\circ$
$\theta_{\text{low traj.}}$	14.999118	36.574475	19027.51062	390.235709	24.724778
$\theta_{\text{high traj.}}$	46.274865	81.149733	19027.51062	341.95548	72.902789
$\theta_{\text{max traj.}}$	28.350135	59.71071	22397.53128	330.956108	50.986198

Висновки. На прикладі спрощеної математичної моделі було продемонстровано застосування обчислювальних методів до рівнянь аеробалістики.

Програмування у середовищі MATLAB дозволило отримати чисельні розв'язки всіх поставлених задач, а саме: визначення геодезичної відстані на несферичній моделі Землі; побудова балістичних траєкторій; визначення часу польоту снаряда, кутів кидання для спряжених траєкторій та кутів максимальної дальності; опис стратегії для інтервального запуску снарядів, що одночасно влучають у ціль по різних траєкторіях; визначення кінцевих швидкостей та кутів падіння.

У порівнянні зі звичайним перебором кутів кидання, що у загальному випадку може сягати розв'язку десятків тисяч систем диференціальних рівнянь тільки для визначення кута максимальної дальності, розробленому алгоритму на тестовій задачі знадобилось лише десятки, щоб визначати як і кут максимальної дальності, так і спряжені кути кидання.

Розроблена програма та використані методи продемонстрували свою ефективність і можуть бути застосовані надалі для розв'язку задач аеробалістики на складніших математичних моделях.

Список літератури

1. Carlucci D. E., Jacobson S. S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press eBooks, 2018, 654 p. <https://doi.org/10.1201/b22201>
2. McCoy R.L. *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Military History, Atglen, 2012. 328 p.
3. Huzyk N. M., Sokulska N. B., Velychko L. D. *Mathematical model of external ballistics of projectiles*. Information Processing Systems, 2023, No. 1, pp. 20–28. <https://doi.org/10.30748/soi.2023.172.03>
4. Lente, G., Ösz, K. *Barometric formulas: various derivations and comparisons to environmentally relevant observations*. ChemTexts, 2020, Vol. 6, No. 13. <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>
5. International Civil Aviation Organization. *World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual*. ICAO, 2002. <https://www.icao.int/NACC/Documents/Meetings/2014/ECARAIM/REF08-Doc9674.pdf>
6. Kamey, C.F.F. *Algorithms for geodesics*. J Geod, 2013, Vol. 87, pp. 43–55. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0578-z>
7. Vincenty T. *Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations*, Survey Review, 1975, Vol. 23, No.176, pp. 88–93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>
8. Татарінова О. А., Плаксий, Ю. А. *Методи оптимізації функцій: навч.- метод. посіб. : у 2-х ч. — Ч. 1 : Методи мінімізації функцій однієї змінної*. НТУ «ХПІ», Харків, 2017.
9. Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 2016, 513 p. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>
10. Іглін С. П. *Чисельні методи на базі MATLAB: навч. посіб. для студентів усіх спеціальностей усіх форм навчання вищих навчальних закладів*. "НТМТ", Харків, 2023.

11. Brubeck P. D., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N. *Vandermonde with arnoldi*. Siam Review, 2021, Vol. 63, No. 2, pp. 405–15. <https://doi.org/10.1137/19m130100x>
12. Abdelwahab K., Guenther R. B. *An introduction to numerical methods: A MATLAB approach*. Chapman and Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series, 2019, 615 p. ISBN: 978-1-138-09307-2
13. Berrut J.-P., Trefethen L. N. *Barycentric lagrange interpolation*. Siam Review, 2004, Vol. 46, No. 3, pp. 501–17. <https://doi.org/10.1137/s0036144502417715>
14. The MathWorks, Inc. (2023). *MATLAB version: 9.14.0 (R2023a)*. Available: <https://www.mathworks.com>.
15. Joint Program Executive Office Armaments and Ammunition. *Portfolio Book*. JPEO A&A, 2017. <https://jpeoaa.army.mil/>

References (transliterated)

1. Carlucci D. E., Jacobson S. S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press eBooks, 2018, 654 p. <https://doi.org/10.1201/b22201>
2. McCoy R.L. *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Military History, Atglen, 2012. 328 p.
3. Huzyk N. M., Sokulska N. B., Velychko L. D. *Mathematical model of external ballistics of projectiles*. Information Processing Systems, 2023, No. 1, pp. 20–28. <https://doi.org/10.30748/soi.2023.172.03>
4. Lente, G., Ösz, K. *Barometric formulas: various derivations and comparisons to environmentally relevant observations*. ChemTexts, 2020, Vol. 6, No. 13. <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>
5. International Civil Aviation Organization. *World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual*. ICAO, 2002. <https://www.icao.int/NACC/Documents/Meetings/2014/ECARAIM/REF08-Doc9674.pdf>
6. Kamey, C.F.F. *Algorithms for geodesics*. J Geod, 2013, Vol. 87, pp. 43–55. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0578-z>
7. Vincenty T. *Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations*, Survey Review, 1975, Vol. 23, No.176, pp. 88–93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>
8. Tatarinova O. A., Plaksii, Yu. A. *Metody optimizatsii funktsii: navch.- metod. posib. : u 2-kh ch. — Ch. 1 : Metody minimizatsii funktsii odnoi zminnoi*. NTU «KhPI», Kharkiv, 2017.
9. Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 2016, 513 p. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>
10. Ihlin S. P. *Chyselni metody na bazi MATLAB: navch. posib. dlia studentiv usikh spetsialnostei usikh form navchannia vyshchykh navchalnykh zakladiv*. «NTMT», Kharkiv, 2023.
11. Brubeck P. D., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N. *Vandermonde with arnoldi*. Siam Review, 2021, Vol. 63, No. 2, pp. 405–15. <https://doi.org/10.1137/19m130100x>
12. Abdelwahab K., Guenther R. B. *An introduction to numerical methods: A MATLAB approach*. Chapman and Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series, 2019, 615 p. ISBN: 978-1-138-09307-2
13. Berrut J.-P., Trefethen L. N. *Barycentric lagrange interpolation*. Siam Review, 2004, Vol. 46, No. 3, pp. 501–17. <https://doi.org/10.1137/s0036144502417715>
14. The MathWorks, Inc. (2023). *MATLAB version: 9.14.0 (R2023a)*. Available: <https://www.mathworks.com>.
15. Joint Program Executive Office Armaments and Ammunition. *Portfolio Book*. JPEO A&A, 2017. <https://jpeoaa.army.mil/>

Відомості про авторів / About the Authors

Федотов Денис Сергійович (Fedotov Denys Serhiiovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», бакалавр з прикладної математики; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Denys.Fedotov@infiz.khpi.edu.ua.

Овчаренко Віталій Володимирович (Ovcharenko Vitalii Volodymyrovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Vitalii.Ovcharenko@khpi.edu.ua; ORCID: 0009-0008-1464-3425.

Федоров Віктор Олександрович (Fedorov Viktor Oleksandrovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Victor.Fedorov@khpi.edu.ua; ORCID: 0000-0002-4814-6768.

ЗМІСТ

Бреславський Д. В., Паламарчук П. І., Сенько А. В., Марусенко О. М. Комп'ютерне моделювання повзучості роторів.....	3
Бреславський Д. В., Лисенко В. В., Метельов В. О., Татарінова О. А., Фесюков О. В. Конструкція, апаратна та програмна реалізація системи управління тепловим режимом установки для високотемпературних випробувань.....	8
Мартиненко В. Г. Порівняльний аналіз динамічних характеристик суцільнометалічної, складної та композиційної лопаток із однаковим профілем з урахуванням впливу з'єднання елементів та аеродинамічних навантажень.....	16
Бреславський Д. В., Хорошун А. С., Сенько А. В., Татарінова О. А. Програмний засіб для обробки даних з довготривалої міцності матеріалів з використанням кривих Едвардса.....	28
Андрєєв Ю. М., Дзюба В. Л. Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв у ССКА КІДИМ.....	34
Некрасова М. В. Використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики при управлінні проектами.....	41
Ковтун О. М., Лінник О. С., Іванченко К. В. Розробка програмного засобу для дистанційного контролю знань.....	48
Красуля Д. О., Іванченко К. В., Іванченко Д. А. Розробка мобільного застосунку для перевірки рівня знань англійської мови з використанням мови програмування SWIFT та фреймворку UIKit.....	53
Плаксий Ю. А., Кузнєцов Ю. О. Аналітично-чисельне моделювання процесу орієнтації твердого тіла в кватерніонах через послідовність ейлерових кутів для точного аналізу алгоритмів орієнтації в БІНС.....	58
Грищенко В. М. Сучасний алгоритм лінійного та квадратичного програмування в оптимізації та задачах деформування конструкцій змінної структури в умовах контактування.....	65
Вязовиченко Ю. А., Ларін О. О. Обчислювальний підхід моделювання термо-напруженого стану шини на основі алгоритму аналізу її самонагріву. Частина 2 – Практичні результати застосування підходу.....	77
Неманежин Є. О., Львов Г. І., Торба Ю. І. Чисельне моделювання повзучості лопатки турбіни з монокристалічного сплаву.....	88
Бреславський Д. В., Грошевий М. О., Татарінова О. А., Сенько А. В. Алгоритми та програмний засіб для обробки зображень структури металевих матеріалів з метою визначення характеристик повзучості.....	95
Васильченко Н. А., Шаповалова М. І., Федоров В. О., Овчаренко В. В. Розробка програмного рішення прикладної задачі механіки на основі чисельних методів.....	102
Федотов Д. С., Овчаренко В. В., Федоров В. О. Застосування обчислювальних методів у задачах аеробалістики. Визначення спряжених кутів кидання та побудова балістичних траєкторій.....	107

CONTENT

Breslavsky D., Palamarchuk P., Senko A., Marusenko O. Computer simulation of a rotor creep.....	3
Breslavsky D., Lysenko V., Mietielov V., Tatarinova O., Fesiukov O. Design, hardware and software for heat mode control in testing machine for high temperature experiments.....	8
Martynenko V. Comparative analysis of the dynamic characteristics of all-metal, composite and composite blades with the same profile, taking into account the influence of the connection of elements and aerodynamic loads.....	16
Breslavsky D., Khoroshun A., Senko A., Tatarinova O. Software for processing of long-term strength data of materials by use of Edwards curves.....	28
Andriev Yu., Dziuba V. An improved algorithm for solving inverse problems of the dynamics of robotic devices at SCAS KIDYM.....	34
Nekrasova M. Using methods of probability theory and mathematical statistics in project management.....	41
Kovtun O., Linnyk O., Ivanchenko K. Development of a software tool for remote control of knowledge.....	48
Krasulia D., Ivanchenko K., Ivanchenko D. Development of a mobile application for checking the level of English knowledge using the SWIFT programming language and the UIKIT framework.....	53
Plaksiy Yu., Kuznyetsov Yu. Analytical-numerical modeling of the process of solid body orientation in quaternions through a sequence of Euler angles for accurate analysis of orientation algorithms in SINS.....	58
Grischenko V. Modern algorithm of linear and quadratic programming in optimization and problems of deformation of structures of variable structure in contact conditions.....	65
Viazovychenko Yu., Larin O. Computational approach to thermal-stressed state modeling of tire based on the algorithm of its self-heating analysis. Part 2 – Practical results of applying the approach.....	77
Nemanezhyn Ye., Lvov G., Torba Yu. Numerical simulation of the creep of a turbine blade made of a monocrystalline alloy.....	88
Breslavsky D., Hroshevyi M., Tatarinova O., Senko A. Algorithms and software for processing images of the structure of metallic materials for the purpose of determining creep characteristics.....	95
Vasylchenko N., Shapovalova M., Fedorov V., Ovcharenko V. Development of a software solution to an applied mechanics problem based on numerical methods.....	102
Fedotov D., Ovcharenko V., Fedorov V. Application of computational methods in problems of aeroballistics. Determination of conjugate throwing angles and construction of ballistic trajectories.....	107

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»
СЕРІЯ: ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН

Збірник наукових праць

№ 2 2023

Головний редактор: Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор
Технічний редактор: Щепкін О.В., наук. співр.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
НТУ «ХПІ», Фіз. корп. 1-й пов., каф. ДММ.
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: lvovdpm@ukr.net

Підп. до друку 26.12.2023 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,95. Облік.-вид. арк. 9,10.
Тираж 100 пр. 1-й завод 1-100. Зам. № 23. Ціна договірна.

