УДК 519.6 DOI: http://dx.doi.org/10.20998/2078-9130.2016.46.88045

В.М.ГРИЩЕНКО

ВАРІАНТ АЛГОРИТМУ ОДНОЧАСНОГО ПРИВЕДЕННЯ ПУЧКА ДВОХ МАТРИЦЬ ДО ЛАНЦЮГОВОЇ ФОРМИ

Розглядається узагальнена проблема власних значень та власних векторів. Один з найбільш відомих та конструктивних підходів рішення цієї проблеми є QR алгоритм. Він застосовується у більшості випадків до матриці, підготовленої до правої майже трикутної форми. В роботі запропоновано один з підходів попереднього розрідження пучка двох матриць до канонічної ланцюгової форми, що містить мінімальну кількість ненульових позицій. Перетворення здійснюються з використанням стійких ортогональних та елементарних матриць.

Для чисельної апробації вибрана модельна невироджена матриця «спіральної» форми 7-го порядку. В роботі приведені результати обчислень згідно наведеного алгоритму для трикутної форми матриці мас, узагальненої форми Хесенберга та ланцюгової форми з обмеженою кількістю значущих цифр. Приведено також невироджені ліві та праві перетворення, що вирішують цю проблему. Результати мають задовільну для практичних розрахунків точність.

Ключові слова: узагальнена проблема власних значень, матриця, канонічна форма, ортогональні матричні перетворення.

Рассматривается обобщенная проблема собственных значений и собственных векторов. Одним из наиболее известных и конструктивных подходов решения этой проблемы является QR алгоритм. Он применяется в большинстве случаев к матрице, подготовленой к правой почти треугольной форме. В работе предложен один из подходов прелварительного разрежения пучка двух матриц к канонической цепной форме, которая содержит минимальное количество ненулевых позиций. Преобразование осуществляется с использованием устойчивых ортогональных и елементарных матриц.

Для численной апробации выбрана модельная невырождення матрица «спиральной» формы 7-го порядка. В работе приведены результаты вычислений согласно приведенного алгоритма для треугольной формы матрицы масс, обобщенной формы Хессенберга и цепной формы с ограниченным количеством значащих цифр. Приведены также невырожденные левые и правые преобразования, которые решают эту проблему . Результаты имеют удовлетворительную для практических расчетов точность.

Ключевые слова: обобщенная проблема собственных значений, матрица, каноническая форма, ортогональные матричные преобразования.

The generalized eigenvalue problem is consider. One of the most known and structural approaches of decision of this problem is QR algorithm. He is used in most cases to the matrix, to geared-up to the right almost three-cornered form. One of approaches of previous dilution of bunch of two matrix is in-process offered to the canonical chain form which contains the least of unzero positions. Transformations are carried out with the use of firm ortogonal and elementary matrix.

For numeral approbation the model unzero matrix of "spiral" form of 7th order is chosen. The results of calculations are in-process resulted in obedience to the resulted algorithm for the three-cornered form of matrix of the masses, generalized form of Hesenbergs and chain form, with the limited amount of meanings numbers. The unzero left and right transformations which settle this problem are resulted also. Results have satisfactory to the practical calculations exactness.

Keywords: eigenvalue problem, matrix, canonical form, ortogonal matrix transformations.

1 Актуальність проблеми. Стрімкий розвиток сучасної техніки обумовлений з одного боку запитами промисловості, а з іншого тими можливостями, які надає потужне впровадження ЕОМ у всі галузі науки і техніки, пред’являє підвищені вимоги до теоретичного обґрунтування та впровадження нових підходів рішення задач математики. Зокрема, розробки тих її напрямків, які пов'язані з рішеннями прикладних задач. Так як на практиці у більшості випадків знайти точне рішення задачі не вдається, то основним засобом моделювання процесів, рішення складних задач стають чисельні методи. Чисельні методи перетворились в самостійний напрямок досліджень, з допомогою яких здобуто важливі досягнення в різних галузях.

Одним з найбільш значимих напрямків обчислювальної математики, що успішно розвивається, стабільно залишається розвиток методів лінійної алгебри. Причому актуальними залишаються як розвиток теорії алгоритмів так і їх реалізація у вигляді програмних засобів на ЕОМ. Різноманіття задач лінійної алгебри значне. Класичними стали такі проблеми як рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь у різних варіантах, різні форми проблеми власних значень та власних векторів (EigenValue), приведення лінійних операторів з постійними коефіцієнтами до однієї з канонічних форм (трикутної, діагональної, Хесенберга, Шура, Жордана тощо).

Алгоритмів рішення значної частини задач лінійної алгебри багато, вони добре розроблені, особливо для задач невеликих розмірів. Але все ж відчувається нестача більш стабільних, робочих програм, що працюють в широкому діапазоні значень матриць. При відборі кращих зразків приймаються до уваги такі критерії як потреби у зменшенні активної пам'яті ЕОМ, зменшенні часу реалізації, більш проста логіка програм, досягнення більш високої точності. Такий аналіз стає неминучим коли постають питання розробки методів рішення задач великого розміру. При відборі способу рішення конкретної прикладної проблеми є сенс використати значний арсенал теоретичних та практичних знань в області лінійної алгебри.

На сьогодні склалась обширна література по обчислювальній математиці взагалі та лінійній алгебрі зокрема [1-17]. Видана значна кількість оригінальних книг, деякі з них стали рідкістю. Слід відмітити фундаментальні праці Уілкінсона Дж.Х.[1, 2]. Систематичне викладання теоретичних основ чисельних методів визначення проблеми EigenValue в них супроводжується детальним аналізом помилок округлення результатів проміжних обчислень на точність рішень поставлених задач. Ці роботи та праці Воєводіна В.В.[3, 4], Ікрамова Х.Д. [5] носять також конструктивний характер. Ідеологічні стержні методів супроводжуються практичними засобами та прийомами побудови алгоритмів, демонструються наслідками на модельних прикладах. Робота [6] присвячена систематичному описанню чисельних методів рішення симетричної проблеми EigenValue. В ній представлені важливі методи, що знайшли в останній час практичне втілення в програмних комплексах. Це достатньо повна теорія метода Ланцоша та метода одночасних ітерацій. Величезна кількість робіт представляє загальну теорію матриць, обчислювальні основи лінійної алгебри та інші. Окрім спеціальних монографій, питання обчислювальної математики та розділи лінійної алгебри викладаються в загальних курсах математики, довідниках, підручниках з прикладних дисциплін.

2 Постановка задачі. Проблема власних значень та векторів (EigenValue) є однією з важливих та складних задач лінійної алгебри. Для інженерних розрахунків важливо мати надійний робочий алгоритм визначення спектрів досліджуваних прикладних задач, які, зокрема, є важливою складовою задач лінійної та нелінійної теорії коливань, задач динаміки машин, стійкості конструкцій, тощо. Узагальнена проблеми EigenValue має наступний вигляд:

$$K\,x = \lambda\, M\,x\,, \qquad (1)$$

де (K,M) – задані квадратні матриці порядку n; (λ, x) – власні значення та власні вектори проблеми. Запропоновано багато підходів обчислення цих параметрів. Одним з найбільш відомих та корисних є QR – алгоритм. Для суттєвого прискорення ітераційних методів пошуку (λ,x) дві матриці (K,M) попередньо спрощують. Є декілька важливих прийомів прискорення збіжності. Це попереднє приведення матриці до правої майже трикутної $(K,M)->(H,E)$, без якого QR – алгоритм, як правило, не застосовується; це – використання зсувів для підвищення швидкості зниження по модулю піддіагональних елементів; та заміна малих піддіагональних елементів нулями.

В реалізації такого сценарію є деякі проблеми. Це вибір стратегії визначення величин зсувів, хоча в літературі приведені непогані варіанти поведінки. Також невпевненість у збіжності алгоритму у всіх випадках.

Тому в даній роботі розглядаються корективи у наведену схему алгоритму. Вони полягають в тому, щоб попереднє приведення матриці здійснювати не до форми Хесенберга а до більш розрідженої – ланцюгової форми $(K,M)->(L,E)$. Ціль даної роботи - побудова алгоритму приведення пучка матриць (K,M) до форми з мінімальною кількістю ненульових позицій. Внесені зміни надалі, безумовно, потребуватимуть перевірки шляхом обчислювальних експериментів на ЕОМ.

3 Основні положення алгоритму. Таким чином, поставлена задача побудувати алгоритм перетворення пучка (K,M) до еквівалентної розрідженої форми, яка має наступний вигляд:

$$(K,M) \text{ -> } (L,E)\text{->} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times \\ \times & \bullet & \bullet & \bullet & \times \\ \bullet & \times & \bullet & \bullet & \times \\ \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E\,. \qquad (2)$$

Ланцюгова матриця L по формі нагадує матрицю Фробеніуса, але має відмінні від нуля позиції в останньому стовбці.

Для рішення задачі логічно скористатись підходом, що вже себе виправдав і полягає в послідовному виконанні простих лівих та правих стійких перетворень еквівалентності. Для елементарних перетворень рядків та стовбців матриць використані матриці перестановок π_{ij}, матриці повертань R_{ij}, елементарні неунітарні матриці типу T_{ij}.

Нагадаємо структуру цих матриць та їх призначення. Ліві перетворення π_{ij} переставляють місцями (i,j) рядки а праві перетворення – місцями (i,j) стовбці та мають вигляд:

$$\pi_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \ & i & \ & j & \ \end{array} \end{array}.$$

Ліві чи праві перетворення R_{ij} можна налаштувати так, щоб один з елементів заданої матриці в позиції (i,j) чи (j, i) анулювати:

$$R_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & c & \bullet & -s & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & s & \bullet & c & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \ & i & \ & j & \ \end{array} \end{array},$$

де: $c^2+s^2=1$.

Ліве неунітарне стійке елементарне перетворення T_{ij} до i-го рядка заданої матриці добавляє j рядок помножений на t_{ij}. Праве перетворення T_{ij} до j-го стовбцю матриці добавляє i стовбець домножений на t_{ij}:

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & t_{ij} & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \ & j & \ & \ & \ \end{array} \end{array},$$

Для цілеспрямованого перетворення пучка матриць $(K,M) -> (L,E)$ формуються ланцюги з наведених елементарних матриць. Потрібно відмітити, що алгоритм використовує лише ортогональні та стійкі елементарні перетворення, що суттєво не впливає на обумовленість обчислювальної задачі. Тому сконструйований з них метод є близьким до чисельно стійкого. А особливі ситуації можуть виникати лише через виродженість матриць пучка.

Варіантів побудови еквівалентної ланцюгової форми пучка декілька. Приведемо один з них для випадку невироджених матриць.

1. Маштабування пучка. Одна з важливих особливостей алгоритмів – врахування (аналіз) помилок округлення. Відомо, що помилки результатів суттєво залежать від евклідової норми матриць. Тому бажано перед використанням процедур понизити її, наприклад. з допомогою діагональної матриці. Можна також скористатись рекомендаціями., що приведені в алгоритмах роботи Уілкінсона Дж.[2], і в яких на тестових прикладах проаналізовані ці впливи на результати.

2. Приведення матриці M до трикутної форми. Тобто виконуються послідовні ліві та праві перетворення матриць пучка згідно схеми:

$$v^{T}\,(K, M)\,u -> (K_1, M_1). \qquad (3)$$

Схематично алгоритм процесу показаний нижче.

● *Перестановка максимального по всій матриці M елемента m_{sj} в позицію (1,1).*

$$\pi_{1s}\,(K - \lambda M)\,\pi_{1j}.$$

● *Анулювання піддіагональних елементів 1-го стовбцю матриці M*

$$\begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_{21} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_{31} & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ t_{41} & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ t_{51} & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \right)$$

● *Перестановка максимального елемента по головному мінору 1-го елемента в позицію (2,2).*

● *Анулювання піддіагональних елементів 2-го стовбцю матриці M*

$$\begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & t_{32} & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & t_{42} & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & t_{52} & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \right)$$

Еквівалентні операції послідовно виконуються для наступних стовбців так що в результаті пучок матриць набуває наступної форми:

$$(K - \lambda M) -> \left(K - \lambda \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{bmatrix} \right).$$

3. На наступному кроці матрицю M з допомогою лівих елементарних перетворень приводимо до діагонального виду згідно схеми.

● *Анулювання 2-го наддіагонального стовбцю матриці M*

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{bmatrix} \right).$$

● *Анулювання 3-го наддіагонального стовбцю матриці M*

$$\begin{bmatrix} 1 & \bullet & t_{13} & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & t_{23} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \times & \bullet & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{bmatrix} \right).$$

В результаті послідовного виконання цієї групи перетворень пучок матриць набуває стандартної форми:

$$(K - \lambda M) -> (K_1 - \lambda E).$$

На наступних кроках виконуються подібні ортогональні перетворення

4. Ортогональне приведення матриці K до форми Хесенберга

● *Анулювання елементів 1-*го *стовбцю матриці K в позиціях (5,1), (4,1) і (3,1).*

$$R_{45}^{T} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right) R_{45} -> \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right).$$

$$R_{34}^{T} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right) R_{34} -> \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right).$$

$$R_{23}^{T} \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right) R_{23} -> \left(\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \\ \bullet & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - \lambda E \right).$$

● *Аналогічні перетворення анулюють елементи 2-*го *стовбцю в позиціях (5,2), (4,2) та 3-го в позиції (5,3).*

Заключне перетворення обертань приводить пучок матриць до узагальненої форми Хесенберга

$$R_{34}^{T}R_{45}^{T}\left(\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right)R_{45}R_{34}->\left(\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right).$$

Надалі, зазвичай, для пошуку спектру пучка використовується добре відомий апарат QR алгоритму, в основі якого ітераційна процедура подальшого подібного перетворення пучка з метою анулювати деякі з піддіагональних елементів матриці Хесенберга. Як вище зазначалось такий шлях має як переваги так і недоліки. В даній роботі вивчається така схема алгоритму, коли з допомогою елементарних подібних перетворювань продовжується спрощення форми Хесенберга до ланцюгової .

Подальші трансформації пучка здійснюються згідно схеми.

5. Приведення матриці Хесенберга до ланцюгової форми

● *Анулювання елементів в 1-му рядку матриці К подібними перетвореннями типу T_{ij}*

$$T_{15}^{-1}T_{14}^{-1}T_{13}^{-1}T_{12}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right)T_{12}T_{13}T_{14}T_{15}->\left(\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right).$$

● *Анулювання елементів в 2-му рядку*

$$T_{25}^{-1}T_{24}^{-1}T_{23}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right)T_{23}T_{24}T_{25}->\left(\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \times&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \bullet&\times&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\times&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda E\right).$$

● *Подальші очевидні перетворення переводять пучок матриць EigenValue до ланцюгової форми*

$$(K-\lambda M)\ ->\left(\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \times&\bullet&\bullet&\bullet&\times\\ \bullet&\times&\bullet&\bullet&\times\\ \bullet&\bullet&\times&\bullet&\times\\ \bullet&\bullet&\bullet&\times&\times\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&1&\bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet&1&\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet&1&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&1\end{bmatrix}\right). \quad (4)$$

Таким чином, теоретично існують схеми еквівалентних перетворень проблеми EigenValue до ланцюгової форми – форми з мінімальною кількістю ненульових позицій що надає переваги. При цьому бажано, щоб чисельні результати, пов'язані з приведенням до ланцюгової форми також мали практичну цінність.

4. Результати чисельних розрахунків. Для чисельних розрахунків вибрана модельна задача пучка невироджених матриць виду:

$$(K-\lambda M)\ ->\ (A^{\mathrm{T}}-\lambda\, A).$$

В якості А вибрана невироджена «спіральна» матриця 7-го порядку, побудована з чисел натурального ряду:

$$A=\begin{vmatrix}1&24&23&22&21&20&19\\ 2&25&40&39&38&37&18\\ 3&26&41&48&47&36&17\\ 4&27&42&49&46&35&16\\ 5&28&43&44&45&34&15\\ 6&29&30&31&32&33&14\\ 7&8&9&10&11&12&13\end{vmatrix}$$

Тобто розглядаємо узагальнену проблему Eigen. Результати проміжних та заключної форми пучка запропонованого алгоритму приведені з обмеженою кількістю значущих цифр.

● *Приведена форма Хесенберга така:*

$$\begin{bmatrix}0.0636&-0.1668&0.3436&-0.4280&-.0.0369&-0.5031&-1.4348\\ 1.1662&0.4231&-1.9683&-3.4550&-1.9416&1.8136&-12.4292\\ \bullet&1.1514&0.5121&0.8933&0.2356&-0.2099&4.2822\\ \bullet&\bullet&0.9053&2.5428&0.8977&-0.2718&4.9324\\ \bullet&\bullet&\bullet&0.8495&1.0061&0.6818&2.0481\\ \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&0.1426&0.7672&0.1926\\ \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&0.0365&0.9633\end{bmatrix}.$$

● *Знайдені ліве (v^T) та праве (u) перетворення до ланцюгової форми*

$$v^T=\begin{bmatrix}-0.0391&-0.6778&-0.8309&-0.0176&1.6189&3.7790&-3.8301\\ -0.0033&4.8900&2.4468&3.0267&-10.0109&-24.1498&23.8422\\ 0.1428&-12.0725&-2.8549&-10.0799&22.5590&56.9699&-54.5326\\ -0.0332&13.3184&1.6741&12.3061&-23.9060&-62.4101&59.0201\\ 0.0527&-9.6556&-0.0721&-9.9132&16.7631&44.8046&-41.9308\\ -0.0037&0.7050&-0.0988&0.8163&-1.1509&-3.2785&3.0073\\ 0.0001&-0.0049&0.0012&-0.0061&0.0076&0.02310&-0.0208\end{bmatrix}.$$

$$u=\begin{bmatrix}1&0.0545&-0.1418&0.2917&0.3883&-6.9765&-714.2648\\ 0&0.1158&-0.5342&-0.6221&0.9028&24.7842&1527.29\\ 0&0.7126&0.2136&-1.8740&-6.0671&-96.984&-683.9013\\ 0&-0.5701&-0.4680&1.1890&5.6935&101.540&713.6395\\ 0&-0.2138&0.3403&1.0755&0.8858&-3.6793&-401.3578\\ 0&-0.0757&0.4665&0.3079&-1.2766&-23.2080&-1212.575\\ 0&0.3196&0.5433&0.5617&0.8124&16.2801&1246.457\end{bmatrix}.$$

● *Та заключна матриця представляє собою ланцюгову форму:*

$$L=\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&185.564\\ 1.1662&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&-1358.748\\ \bullet&1.1514&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&3930.805\\ \bullet&\bullet&0.9053&\bullet&\bullet&\bullet&-5199.631\\ \bullet&\bullet&\bullet&0.8495&\bullet&\bullet&4417.221\\ \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&0.1426&\bullet&-431.158\\ \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&0.0365&6.278\end{bmatrix}.$$

Вона схожа своєю структурою та розрідженістю на матрицю Фробеніуса.

5. Висновки. По результатам проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

Запропоновано алгоритм побудови еквівалентної ланцюгової форми пучка матриць, який розглядається як стартова форма для подальшої процедури визначення спектра власних значень та власних векторів.

Це форма пучка матриць з мінімальною кількістю ненульових позицій. Її розріджена форма може надавати певні вигоди та виграш у економічності подальших операцій. Чисельні результати надають оптимізм у можливостях реалізації запропонованого підходу.

Список літератури:

1. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений / *Дж. Х. Уилкинсон*. – М: Наука, 1970. – 564 с.

2. *Уилкинсон Дж.Х.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / *Дж.Х. Уилкинсон, К. Райнш*. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.

3. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / *В.В. Воеводин*. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

4. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления / *В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов*. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений / *Х.Д. Икрамов*. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

6. *Парлет Б.* Симметричная проблема собственных значений / *Б. Парлет*. – М: Мир, 1983. – 384 с.

7. *Березин И.С.* Методы вычислений / *И.С. Березин, Н.П. Жидков*. – Т. 1. – М.: Наука, 1966; Т. 2. – М.: Физматгиз, 1962.

8. *Агеев М.И.* Алгоритмы (1-50) / *М.И. Агеев, В.П. Алик, Р.П. Галис*. – М.: ВЦ АН СССР, 1966. – 106 с.

9. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / *К. Бате, Е. Вилсон*. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

10. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры / *Д.В. Беклемишев.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.

11. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры / *А.И. Мальцев*. – М.: Наука, 1970.

12. *Фадеев Д.К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеев*. – М.-Л.: Физматгиз, 1963.

13. *Ланкастер П.* Теория матриц / *П. Ланкастер*. – М.: Наука, 1978. –2 80 с.

14. *Бахвалов Н.С.* Численные методы: Учебное пособие / *Н.С. Бахвалов*. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

15. *Демидович В.П.* Основы вычислительной математики / *В.П. Демидович, И.А. Марон*. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

16. *Калиткин Н.Н.* Численные методы / *Н.Н. Калиткин*. – М.: Наука, 1978.

17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер*. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Bibliography (transliterated):

1. Uilkinson Dzh. H. Algebraicheskaya problema sobstvennyh znache-nij. Moscow: Nauka, 1970. 564 p.

2. Uilkinson Dzh.H., Rajnsh K. Spravochnik algoritmov na yazyke ALGOL. Linejnaya algebra. Moscow: Mashinostroenie, 1976. 389 p.

3. Voevodin V.V. Vychislitel'nye osnovy linejnoj algebry. Moscow: Nauka, 1977. 304 p.

4. Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A. Matricy i vychisleniya. Moscow: Nauka, 1984. 320 p.

5. Ikramov H.D. Chislennoe reshenie matrichnyh uravnenij. Moscow: Nauka, 1970. 564 p.

6. Parlet B. Simmetrichnaya problema sobst-vennyh znachenij. Moscow: Mir, 1983. 384 p.

7. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychislenij. Vol.1. Moscow: Nauka, 1966. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz, 1962.

8. Ageev M.I, Alik V.P, Galis R.P. Algoritmy(1-50). Moscow: VC AN SSSR, 1966. 106 p.

9. Bate K., Vilson E. Chislennye metody analiza i metod konechnyh elementov. Moscow: Strojizdat, 1982. 448 p.

10. Beklemishev D.V. Dopolnitel'nye glavy linejnoj algebry. Moscow: Nauka, 1983. 336 p.

11. Mal'cev A.I. Osnovy linejnoj algebry. Moscow: Nauka, 1970.

12. Fadeev D.K., Fadeev V.N. Vychislitel'nye metody linejnoj algebry. Moscow-Leningrad: Fizmatgiz, 1963.

13. Lankaster P. Teoriya matric. Moscow: Nauka, 1978. 280 p.

14. Bahvalov N.S. Chislennye metody: Uchebnoe posobie. Moscow: Nauka, 1987. 600 p.

15. Demidovich V.P., Maron I.A. Osnovy vychislitel'noj matematiki. Moscow: Nauka, 1970. 664 p.

16. Kalitkin N.N. Chislennye metody. Moscow: Nauka, 1978.

17. Gantmaher F.R. Teoriya matric. Moscow: Nauka, 1967. 575 p.

Поступила (received) 07.09.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Варіант алгоритму одночасного приведення пучка двох матриць до ланцюгової форми / В.М. Грищенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 21–25. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

Вариант алгоритма одновременного приведения пучка двух матриц к цепной форме / В.Н. Грищенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 21–25. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

A variant of algorithm of simultaneous adduction of bunch of two matrices is to chain form / V.M. Grischenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 46 (1218). – P. 21–25. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Грищенко Володимир Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри динаміки та міцності машин, НТУ «ХПІ», тел.: 707 68 79, e-mail: grivn_dmm@ukr.net

Грищенко Владимир Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры динамики и прочности машин, НТУ «ХПИ», тел.: 707 68 79, e-mail: grivn_dmm@ukr.net

Grischenko Volodymir Mykolayovich – Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Docent of the Dynamical and strength Department, NTU "KhPI", tel.: 707 68 79, e-mail: grivn_dmm@ukr.net