

УДК 539.3

А.В. ВОРОПАЙ, Е.С. МАЛАХОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН И ИХ СИСТЕМ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С РАЗЛИЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

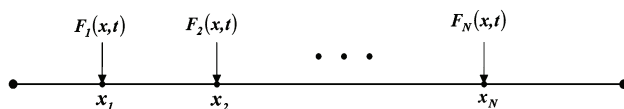
Рассматриваются нестационарные колебания струн и их систем, вызванные конечным количеством сосредоточенных нагрузок. Нестационарными нагрузками могут моделироваться внешние силы, также реакции, соответствующие влиянию сосредоточенных масс или демпферов. Для системы струн, пересекающих одну общую, строится обобщенная схема исследования. Излагается методика построения системы уравнений, состоящей из одномерных волновых уравнений для некоторого произвольного количества струн, которая замыкается дополнительными соотношениями в точках контакта. Полученная система является системой интегральных уравнений Вольтерра, которая после дискретизации сводится к блочной системе линейных уравнений. В качестве примера решается задача о нестационарных колебаниях струны с двумя присоединенными демпферами.

Ключевые слова: струна, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтерра, прямая и обратная задача.

Введение. Вопросам вывода уравнения колебания струны и его решения посвящен целый раздел математической физики, который приведен в большинстве учебников, например [1, 2]. Исследование поведения струн и их систем изложено во многих работах, например, в работе [3] приводится постановка прямой и обратной задач для нестационарных колебаний системы трех струн, и их решение с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Отдельно отметим статью [4], в которой описано гашение крутильных и продольных колебаний каната, причем в указанном исследовании для более сложного механического объекта используется стержневая модель, однако задача сводится к анализу подобных волновых уравнений. В отличие от [4], при исследовании малых поперечных колебаний канатов и их систем целесообразно использовать модель струны.

В данной работе исследуются нестационарные колебания системы струн для общего случая нагружения с учетом дополнительных демпфирующих элементов и сосредоточенных масс, а так же определяются дополнительные контактные реакции, возникающие между струнами и этими элементами.

Постановка и решение задачи о нагружении одной струны. Рассматривается закрепленная струна конечной длины. На струну действуют N сосредоточенных нагрузок, которые вызывают нестационарные колебания струны (рис. 1).

Рисунок 1 – Струна с N нагрузками

Колебания описываются одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^N F_n(x,t). \quad (1)$$

В случае если со струной в некоторой точке контактирует сосредоточенная масса или демпфирующее устройство, то их влияние можно моделировать до-

бавлением дополнительных сосредоточенных сил, которые на самом деле будут являться реакциями между струной и этими элементами. Аналогичный подход можно использовать и в случае контакта двух струн. Таким образом, нагрузку в правой части уравнения (1) можно представить в виде:

$$F_n(x,t) = R_n(t) \delta(x - x_n), \quad (2)$$

где x_n – точки приложения n -той нагрузки на струне, а силы $R_n(t)$ могут быть внешними возмущающими сосредоточенными нагрузками, реакцией $R_M(t)$ между струной и сосредоточенной массой или реакцией $R_D(t)$ между струной и дополнительной демпфирующей опорой. Уравнение (1) дополняется следующими граничными и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{du(x,0)}{dt} = 0. \quad (3)$$

Перемещение струны, полученное при решении (1), представимо в виде суммы свертков [3]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t K_n(x,t-\tau) \cdot R_n(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где ядра имеют вид

$$K_n(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\omega_k} \cdot \sin(\omega_k t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_n) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x), \quad (5)$$

и обозначено $C = 2/(l \cdot \rho)$, $\omega_k = a \cdot \lambda_k$, $\lambda_k = \pi k / l$.

В случае присоединения сосредоточенных масс выполняется следующие условие контакта для каждой массы:

$$R_M(t) = M \cdot \frac{d^2 u(x_M, t)}{dt^2}, \quad (6)$$

где x_M – точка контакта струны и массы, M – величина массы. Из соотношения (6) можно получить перемещение в точке контакта с массой:

$$u(x_M, t) = \frac{1}{M} \int_0^t (t-\tau) R_M(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Если струна подкреплена дополнительными демпфирующими элементами, то влияние таких дополнительных опор можно учитывать добавлением дополнительных реакций вида:

$$R_D(t) = \kappa \cdot \frac{du(x_D, t)}{dt}, \quad (8)$$

где x_D – точка контакта струны и демпфера, κ – коэффициент демпфирования. Выражение для перемещений в точке установки демпфера из соотношения (8) имеет вид:

$$u(x_D, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t R_D(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Постановка и решение задачи о нагружении системы струн. В случае исследования системы струн – для каждой струны записываем соответствующее решение волнового уравнения вида (4), в котором кроме системы внешних сил $R_n(t)$, а также реакций между струнами и дополнительными элементами $R_M(t)$ и $R_D(t)$ добавляются дополнительные силы контактного взаимодействия между струнами – реакции $R_{ij}(t)$ (сила контакта между i -ой и j -ой струнами).

Для сложных систем с большим количеством нагрузок, дополнительных опор и точек контакта число уравнений будет равно числу струн и всегда меньше числа неизвестных. Количество необходимых уравнений будет определяться по следующей краткой схеме:

$$\begin{cases} (J) \text{ выражений для струн;} \\ (N_R) \text{ соотношений для дополнительных;} \\ (J-1) \text{ соотношений для } R_{ij}. \end{cases} \quad (10)$$

На общей схеме (10) показано, что полная система, определяющая перемещения системы струн, состоит из J выражений вида (4) для каждой i -ой струны, что не достаточно для решения задачи, и поэтому система дополняется N_R соотношениями для дополнительных реакций в точках присоединения масс и демпферов вида (7), (9) и замыкается $J-1$ кинематическими соотношениями для R_{ij} в точках контакта струн (уточним, что количество $(J-1)$ соотношений подразумевают, что $(J-1)$ струн пересекают J -ю, и не пересекаются между собой).

При решении прямой задачи внешнее нагружение задано, а неизвестными в этой системе, кроме перемещений самих струн $u_i(x, t)$, будут еще и реакции между струнами $R_{ij}(t)$, а также реакции между струнами и дополнительными элементами $R_M(t)$ и $R_D(t)$.

К примеру, в случае нагружения системы трех струн с двумя демпферами будут неизвестными две силы контакта между струнами, две силы реакции между соответствующими струнами и демпферами, а так же перемещения самих струн, то есть 7 неизвестных функций для 3-х струн. Таким образом, три выражения вида (4) дополняются двумя соотношениями для демпферов в точках их установки и двумя $(3-1=2)$ выражениями для точек контакта двух струн.

В обратных задачах, когда неизвестно внешнее нагружение, в качестве исходных данных должны быть заданы перемещения в некоторых точках струн, причем число точек, в которых заданы функции перемещения струн во времени $u_i(x_n, t) = f_i(t)$ должно быть не меньше числа внешних неизвестных сосредоточенных нагрузок, вызывающих нестационарные колебания.

При рассмотрении системы струн, состоящей из несущей струны большей длины и подкрепляющих ее более коротких струн, изложенный подход дает следующую систему выражений для перемещений $u_i(x, t)$, записанную в операторной форме:

$$\begin{cases} u_1 = -\sum_n A1_n \cdot R_n; \\ u_2 = -\sum_n A2_n \cdot R_n; \\ \dots\dots\dots \\ u_J = \sum_n AJ_n \cdot R_n. \end{cases} \quad (11)$$

где введен интегральный оператор:

$$Ai_n = \int_0^t Ki_n(x, t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

в котором $i=1\dots J$ – номер струны, а индекс n соответствует номеру нагрузки $R_n(t)$. В системе (11) предварительно было использовано условие антисимметричности контактных сил между струнами $R_{ij} = -R_{ji}$

и введены обозначения $R_n = (R_{in}(t) \ P_n(t))^T$, где $P_n(t)$ обозначает временную составляющую возмущающих нагрузок, а $R_{in}(t)$ – контактная сила, возникающая при взаимодействии струн или при контакте струн с дополнительными элементами. Следует уточнить, что знак минус перед слагаемыми ставится в том случае, если R_n соответствует контактной силе, возникающей при взаимодействии струны с демпфером или массой, или же из условия антисимметричности. Выражения для перемещений (11) дополняются условиями вида (7) и (9) для каждой струны. Так же необходимо учитывать предположение, что в точках контакта струн их перемещения полностью совпадают, то есть выполняются следующие кинематические условия:

$$u_i(x_{in}, t) = u_j(x_{jn}, t). \quad (13)$$

Неизвестные контактные силы находятся с использованием выражений (7) и (9), которые подставлялись в (11). После подстановки проводится дискретизация методом частичного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} K(t-\tau) \cdot R(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^j R_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \sin(\omega_k(t_j-\tau)) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^j R_i \cdot \frac{2}{\omega_k} \sin\left[\omega_k \cdot \left((j-i) + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t\right] \cdot \sin\left(\frac{\omega_k \cdot \Delta t}{2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $t_j = j \cdot \Delta t$ – дискретное время. Таким образом, получается следующая система матричных уравнений для дискретных ядер:

$$\begin{cases} -\sum_n A1_{1n} \cdot R_n = \sum_p A3_{1p} \cdot R_p; \\ \dots\dots\dots \\ -\sum_n A1_{(J-1)n} \cdot R_n = \sum_p A3_{(J-1)p} \cdot R_p, \end{cases} \quad (15)$$

где матрица Ai_{nm} соответствует дискретной форме ядер $Ki_n(x_m, t_j)$, то есть индекс n обозначает точку приложения силы, m – точку исследования, а i – номер струны.

При решении прямых задач вектор \mathbf{R}_p , соответствующий силе $P_n(t)$, считается известным, поэтому слагаемые с \mathbf{R}_p помещаются в правую часть, а остальные – в левую. При решении обратных задач вектор \mathbf{R}_p неизвестен, а необходимо знать перемещения \mathbf{u}_p в некоторых точках струн, соответствующие $u_i(x_{pm}, t)$. В результате будет получена система вида (15) в которой известные перемещения \mathbf{u}_p помещаются в правую часть соответствующих уравнений. При решении как прямой так и обратной задачи эта система приводится к компактной записи при помощи соответствующих обозначений (к примеру $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}\mathbf{1}_{11} + \mathbf{A}\mathbf{3}_{11}$, $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A}\mathbf{3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3$). Таким образом, (15) принимает вид блочного матричного уравнения с неизвестными \mathbf{R}_n :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{J-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{J-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Решение блочного матричного уравнения (16), соответствующего системе интегральных уравнений Вольтерры, является существенно некорректной задачей [5], и для решения используются обобщенный алгоритм Гаусса [6] или обобщенный алгоритм Крамера в сочетании с регуляризующим алгоритмом А. Н. Тихонова. Рассмотрим более подробно на примере решения задачи при помощи обобщенного алгоритма Крамера, который для систем до 4-х интегральных уравнений дает более устойчивые результаты:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_2; \\ \dots \\ \mathbf{R}_{J-1} = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_{J-1}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{J-1} & \mathbf{A}_{(J-1)2} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{J-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-2)} & \mathbf{B}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-2)} & \mathbf{B}_{J-1} \end{vmatrix}$$

– определители блочных матриц, α – параметр регуляризации; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [5].

После нахождения контактных сил перемещения в произвольной точке x_{s_j} любой из струн можно вычислить на основе соотношений (11). Стоит отметить, при увеличении количества струн и других дополнительных элементов происходит незначительное теоретическое усложнение задачи, однако значительное увеличение времени вычислений.

Пример решения конкретной задачи: колебания одной струны, подкрепленной двумя демпферами. Рассматривается закрепленная струна конечной длины, к которой присоединены два дополнительных демпфирующих элемента (рис 2). Сосредоточенная нагрузка, вызывающая нестационарные колебания системы, имеет вид $F(x, t) = P(t)\delta(x - x_3)$, где x_3 – точка приложения нагрузки на струне. Точки контакта струны с демпферами обозначены x_1 и x_2 соответственно, а точка наблюдения – x_s .

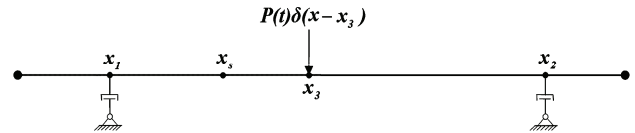


Рисунок 2 – Струна с двумя демпферами

Колебания такой струны описываются следующим одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^3 R_n(t) \delta(x - x_n), \quad (18)$$

где $R_1(t)$, $R_2(t)$ – реакции, обусловленные взаимодействием струны с соответствующими демпферами, а $R_3(t)$ соответствует приложенной к струне нагрузке.

Волновое уравнение (18) дополняется начальными и краевыми условиями (3), а так же условиями типа (9) для двух демпферов:

$$u(x_1, t) = \frac{1}{\kappa_1} \int_0^t R_1(\tau) d\tau; \quad u(x_2, t) = \frac{1}{\kappa_2} \int_0^t R_2(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Как показано выше, решение представимо в операторной форме:

$$u(x, t) = -A'_1 \cdot R_1 - A'_2 \cdot R_2 + A'_3 \cdot R_3, \quad (20)$$

где $A'_n = \int_0^t K_n(x, t - \tau) d\tau$. После дискретизации интегрального уравнения (21) и использования условий контакта с демпферами (19), была получена система двух матричных уравнений:

После дискретизации интегрального уравнения (21) и использования условий контакта с демпферами (19), была получена система двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} -\mathbf{A}'_{11} \cdot \mathbf{R}_1 - \mathbf{A}'_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}'_{13} \cdot \mathbf{R}_3 = \frac{\Delta t}{\kappa_1} \cdot \mathbf{R}_1; \\ -\mathbf{A}'_{21} \cdot \mathbf{R}_1 - \mathbf{A}'_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}'_{23} \cdot \mathbf{R}_3 = \frac{\Delta t}{\kappa_2} \cdot \mathbf{R}_2. \end{cases} \quad (21)$$

При решении задачи вектор \mathbf{R}_3 , соответствующий силе $P(t)$, считается известным, поэтому слагаемые с \mathbf{R}_3 помещаются в правую часть, а остальные – в левую. Система (21) приводится к компактной записи при помощи соответствующих обозначений:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}'_{11} + \Delta t / \kappa_1, \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}'_{12}, \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}'_{21},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}'_{22} + \Delta t / \kappa_2, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}'_{13} \cdot \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}'_{23} \cdot \mathbf{R}_3.$$

Таким образом, получено матричное уравнение с неизвестными \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Система уравнений (22) является блочным матричным уравнением, которое эквивалентно системе интегральных уравнений Вольтерры I-го рода. Неиз-

вестные контактные силы принимают вид:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_2, \end{cases} \quad (23)$$

где $\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$; $\Delta_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$ – определители блочных матриц.

По известным контактным силам вычисляем перемещение струны в произвольной точке на основе соотношения (20) в дискретной форме.

Вычислительный эксперимент. Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами: $l = 25$ м – длина струны; $d_{st} = 0,0052$ м – диаметр струны; $\rho = 0,109$ кг/м – линейная плотность струн; $a = 214$ м/с – скорость распространения волн в струне, $\kappa = 200$ – коэффициент демпфирования для обоих демпферов. Для наглядности вначале рассмотрим симметричный случай: $x_1 = 0,04 \cdot l$, $x_2 = 0,96 \cdot l$ – точки расположения демпферов, $x_3 = 0,5 \cdot l$ – точка приложения возмущающей нагрузки. Точка наблюдения – $x_s = 0,45 \cdot l$, а параметр регуляризации $\alpha = 10^{-19}$ выбирался согласно методике, изложенной в работе [7].

Изменение возмущающей силы $P(t)$ во времени при решении задачи в виде верхней полуволны синуса

$$P(t) = q_0 \cdot |\sin(\omega_0 t)| (H(t - t_0) - H(t - t_1)),$$

где $q_0 = 10$ Н – интенсивность нагрузки, $t_0 = 0,25$ с и $t_1 = 0,5$ с – начало и конец нагружения. Исследовался промежуток времени $T = 2$ с. Вместо бесконечных сумм в выражениях производился учет конечного числа членов ряда $K = 200$, для дискретизации по времени $\Delta t = T / J = 0,004$; $J = 500$ шагов.

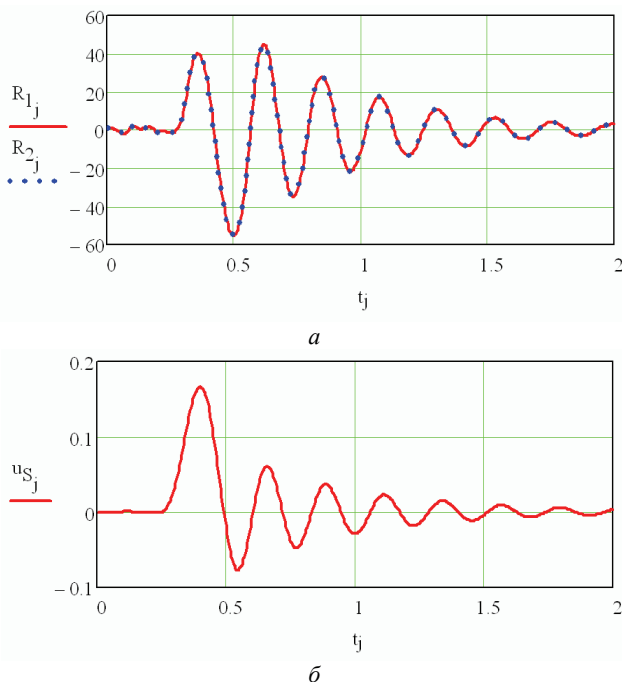


Рисунок 3 – Изменение во времени (симметричный случай): а – контактных сил; б – перемещения

На рис. 3, а показаны изменения контактных сил во времени при контакте струн с демпферами, а на рис. 3, б показаны перемещения струны для нагрузки, описанной выше. Сплошная кривая соответствует реакции R_1 , а точками показана реакция $R_2(t)$.

Укажем на то, что в период до начала действия возмущающей нагрузки видно незначительную величину реакций между струной и демпферами, что обусловлено, по-видимому, вычислительными погрешностями при решении системы интегральных уравнений. В силу симметричного расположения реакций возникающих при контакте струн с демпферами, а также приложения возмущающие нагрузки в средней точке струны делаем вывод, что реакции R_1 и R_2 должны совпадать, что демонстрирует рис. 3, а. Это совпадение подтверждает достоверность вычислений.

В качестве несимметричного случая выберем следующие точки расположения демпферов: $x_1 = 0,1 \cdot l$, $x_2 = 0,75 \cdot l$, а $x_3 = 0,4 \cdot l$ – точка приложения возмущающей нагрузки. В силу того, что демпферы расположены гораздо ближе к точке нагрузки, можно значительно уменьшить коэффициент демпфирования $\kappa = 20$. Точка наблюдения та же.

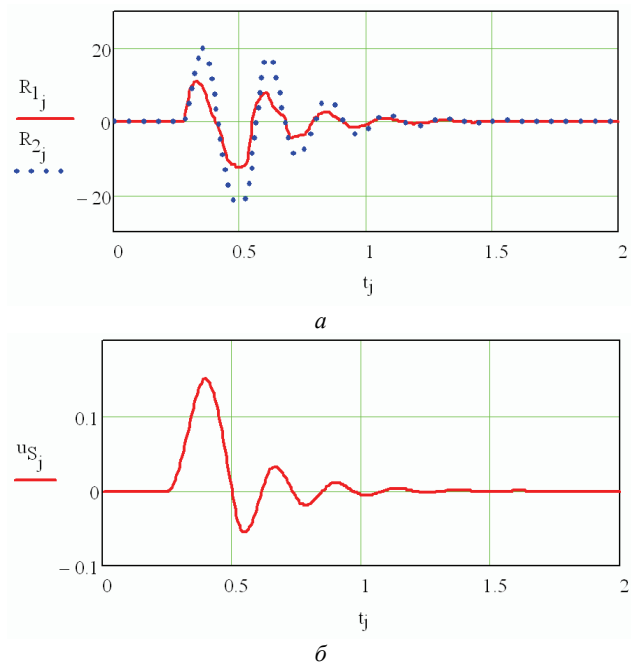


Рисунок 4 – Изменение во времени (несимметричный случай): а – контактных сил; б – перемещения

Выводы. В данной работе показана методика построения задачи о нестационарных колебаниях струны и системы струн под действием некоторого конечного количества нагрузок, обусловленных действием сосредоточенных нагрузок, масс, демпферов или взаимодействием самих струн. Предложен алгоритм решения данной задачи на основе прямого и обратного преобразования Лапласа, обобщенно метода Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова. В качестве примера, получено решение прямой задачи о колебании одной струны, подкрепленной двумя демпферами. Проведен численный эксперимент, в котором показано, что для симметричного случая нагружения реак-

ции, обусловленные демпферами, совпадают, что подтверждает достоверность вычислений. На основе предложенного в статье подхода можно исследовать поведение струны, расположения демпферов и различных сосредоточенных нагрузений в произвольных точках струны.

Список литературы: 1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики (5-е изд.) / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 742 с. 2. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с. 3. Малахов Е. С. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн / Е. С. Малахов, А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 56-62. 4. Lin Chen Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location / Lin Chen, Limin Sun, Satish Nagarajaiah // Journal of Sound and Vibration. –Vol. 377. – 1 September 2016. – P. 38-57. 5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с. 7. Воронай А. В. Регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов

конструкции / А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 41 (1150). – С. 22-29.

Bibliography (transliterated): 1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoy fiziki (5-e izd.). Moscow: Nauka, 1977, 742 p. 2. Aramanovich I.G., Levin V.I. Uravnenija matematicheskoy fiziki. – Moscow: Nauka, 1969, 288 p. 3. Malakhov E. S, Voropaj A. V. Obratnaja zadacha dlja nestacionarnyh kolebanij sistemy strun. Visnik NTU "KhPI". Serija: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, No 6 (1178), pp. 56-62. 4. Lin Chen, Limin Sun, Satish Nagarajaiah. Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location. Journal of Sound and Vibration, vol. 377, 1 September 2016, pp. 38-57. 5. Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach. Moscow: Nauka, 1986, 288 p. 6. Gantmaher F.R. Teorija matric. 2-e izd., dop. Moscow: Nauka, 1967, 576 p. 7. Voropaj A. V. Reguljarizirujushhij algoritm A.N. Tihonova v nekorrektnyh zadachah nestacionarnoj dinamiki uprugih jelementov konstrukcii. Visnik NTU "KhPI". Serija: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah. Kharkiv: NTU "KhPI", 2015, No 41 (1150), pp. 22-29.

Поступила (received) 01.09.2016.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Воронай Алексей Валериевич – кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри вищої математики, Національний технічний університет «ХПІ»; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "KhPI"; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Малахов Евгений Сергеевич – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Malakhov Evgeniy Sergeevich – Postgraduate Student, Kharkiv National Automobile and Highway University; tel: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.