

**Bibliography (transliterated):** 1. Pontryagin L. S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov*. Moscow: Nauka, 1969, 384 p. 2. Chernous'ko F. L., Banichuk N.V. *Variacionnye zadachi mehaniki i upravleniya*. Moscow: Nauka, 1973, 238 p. 3. Grinev

V. B., Fillipov A.P. *Optimizaciya elementov konstrukcij po mehanicheskim harakteristikam*. Kyiv: Naukova dumka, 1975, 295 p. 4. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow: Nauka, 1967, 444 p.

*Postupila (received) 22.07.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Васильченко Виктор Федорович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-60-32, e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Vasilchenko Viktor Fedorovich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Applied Mathematics, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 60- 32; e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Ломакин Александр Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-68-79, e-mail: anlomakin@rambler.ru

**Lomakin Aleksandr Nikolaevich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 68- 79; e-mail: anlomakin@rambler.ru

УДК 539.3

**Д.Г. ВИНОГРАДСКИЙ, А.Г. АНДРЕЕВ**

**ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ**

Данная работа посвящена исследованию взаимного влияния соединений с натягом для вариантов соединений: сплошной вал с двумя втулками, два сплошных вала с втулкой, пустотелый вал с двумя втулками, два пустотелых вала с втулкой в ПК ANSYS. Получены характеристики НДС (эквивалентные напряжения. Контактные давления суммарные перемещения) в зависимости от величины интервала между соединениями с натягом.

**Ключевые слова:** соединения с натягом, метод конечных элементов, напряжения, деформации.

**Введение.** Соединение с натягом широко применяются в различных машинах и механизмах, когда требуется передача больших осевых сил, крутящих моментов или нагрузок. Прочность и относительная неподвижность этих соединений обеспечиваются силами трения, которые зависят от давления между соединительными деталями, и определяется величиной натяга - разницы размеров охватывающей и охватываемой деталей. Силы трения обусловлены созданием распределенной нормальной нагрузки (давления) на сопряженных поверхностях соединяемых деталей. Посадочный размер охватывающей детали делают несколько меньше посадочного размера охватываемой детали. После соединения посадочный размер деталей становится общим, при этом посадочный размер охватывающей детали в результате упругих деформаций увеличивается, а охватываемой – уменьшается. Из соединений деталей с натягом наибольшее распространение получили цилиндрические соединения, у которых одна деталь охватывается второй по цилиндрической поверхности. Характерными примерами деталей, соединенных посадкой с натягом, являются: венцы зубчатых и червячных колес, подшипники качения, роторы электродвигателей и т. д.

**Постановка задачи.** При удлинении валов или соединении их с помощью втулок используются посадки с натягом, которые могут влиять друг на друга, поскольку фактический натяг не будет равен исходному геометрическому, а будет скорректирован влия-

нием рядом находящегося второго соединения с натягом, а также консольным эффектом выступающих частей валов и втулок.

Целью данной работы является выяснение, в какой мере это справедливо.

Рассматриваются 6 типов соединения с натягом:

– тип А – сплошной вал и втулка равных осевых размеров (рис. 1),

– тип Б - пустотелый вал и втулка равных осевых размеров (рис. 2),

– тип I – сплошной вал с двумя втулками (рис. 3),

– тип II – два сплошных вала с втулкой (рис. 4),

– тип III – пустотелый вал с двумя втулками (рис. 5),

– тип IV – два пустотелых вала с втулкой (рис. 6).

При оценке взаимного влияния с натягом очевидно, что любое из соединений типа I, II, III, IV – это 2 соединения типа А или Б и конструктивно объединяющие их в одно целое элементы в виде валов и втулок.

Таблица 1 – Характеристики материала

Физический параметр	Значения для стали 40Х
Модуль упругости E, МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7800
Предел текучести $\sigma_t$ , МПа	785
Предел прочности $\sigma_b$ , МПа	980
Коэффициент трения $\mu$	0,15
Натяг в соединении $\Delta$ , М	0,00012

Взаимному влиянию соединений с натягом соответствует изменение энергии этих соединений. Энергия, накопленная в соединениях типа А или Б при технологической операции «посадка с натягом» корректируется при переходе этих соединений типа А или Б при в состав одного из соединений типа I, II, III, IV вследствие:

- 1) консольных эффектов за счет выступающих частей валов и втулок,
- 2) деформации конструктивно объединяющих элементов в виде валов или втулок соединений типа I, II, III, IV, которые в этом случае оказываются продлением соответствующих валов и втулок соединений типа А или типа Б.

**Теоретические основы.** Поставленная задача моделировалась с помощью МКЭ в ПК ANSYS. Для решения проблемы использовался стандартный конечный элемент программного пакета - трехмерный восьми узловый объемный элемент PLANE82, который имеет три степени свободы в каждом узле. Для создания контактной пары в ПК ANSYS использовались конечные элементы CONTA 172 и TARGET 169.

Точки фиксации на рисунках 1-6 обозначены \*.

Решение задачи МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\}, \tag{1}$$

где  $[K]$  – матрица жесткости тела, состоящая из матриц жесткости конечных элементов;  $\{U\}$  – вектор-столбец узловых перемещений;  $\{F\}$  – вектор приведенной внешней нагрузки.

Формулы для расчета удельного давления на поверхности контакта в области упругих деформаций [1]:

$$P = \frac{N}{(C_1/E + C_2/E)dx}; \tag{2}$$

$$C_1 = \frac{1+(d_1/d)^2}{1-(d_1/d)^2} - \mu; \quad C_2 = \frac{1+(d/d_2)^2}{1-(d/d_2)^2} + \mu, \tag{3}$$

где  $E_1$  та  $E_2$  – модуль упругости;  $N$  – расчетный натяг,  $d$  – номинальный размер соединения;  $d_1$  – внутренний диаметр вала;  $d_2$  – наружный диаметр втулки;  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона соответственно вала и втулки (рис. 1, 2).

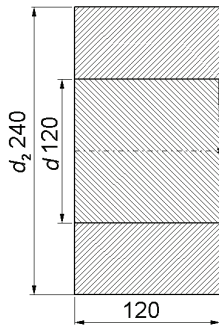


Рисунок 1 – Схема сплошного вала и втулки

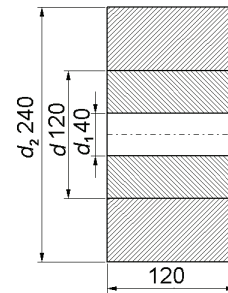


Рисунок 2 – Схема полого вала и втулки

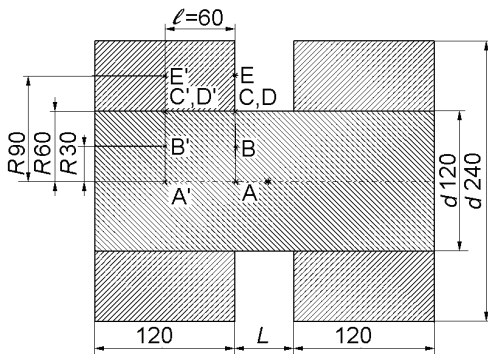


Рисунок 3 – Схема сплошного вала с двумя втулками

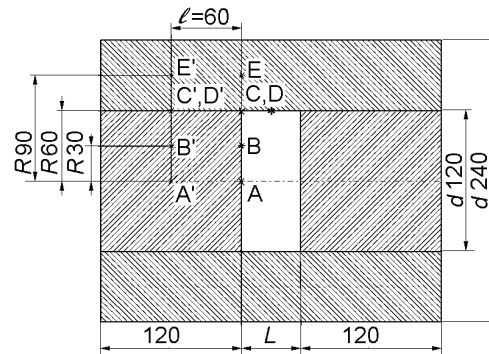


Рисунок 4 – Два сплошных вала с втулкой

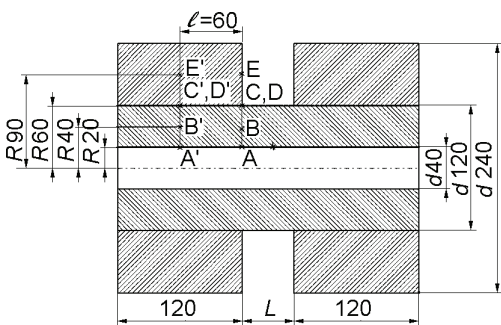


Рисунок 5 – Пустотелый вал с двумя втулками

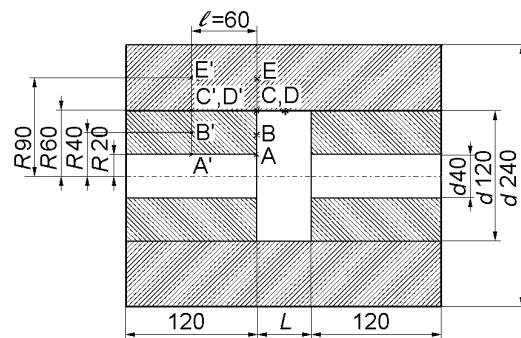


Рисунок 6 – Два пустотелых вала с втулкой

**Анализ полученных результатов.**

В результате исследования выяснили, что в диаметральной сечении, проходящее через середину контактной зоны (расчетные точки A', B', C', D', E'), влияние второго соединения с натягом слабо доходит, в связи с чем будем использовать диаметральной торцевое сечение с точками A, B, C, D, E для определения характеристик НДС.

Кривые на последующих графиках будут соответствовать точкам (A, B, C – вал, D, E – втулка) с такими обозначениями:



**НДС соединения вала и втулки (тип А, тип Б)**

Полученные результаты приведены в табл. 2, 3.

Таблица 2 – Характеристики НДС соединения типа А (см. рис. 1)

Радиус R, мм	$\sigma_{\text{ЭКВ}}$ , МПа	$P_{K_2}$ , МПа	$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м
0	70,2	76,2	0
30	69,4		69,9
60	70		140
60	183		469
90	84,5		377

Таблица 3 – Характеристики НДС соединения типа Б (см. рис. 2)

Радиус R, мм	$\sigma_{\text{ЭКВ}}$ , МПа	$P_{K_2}$ , МПа	$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м
20	142	71,6	142
40	80,1		145
60	75,2		180
60	172		446
90	79,4		361

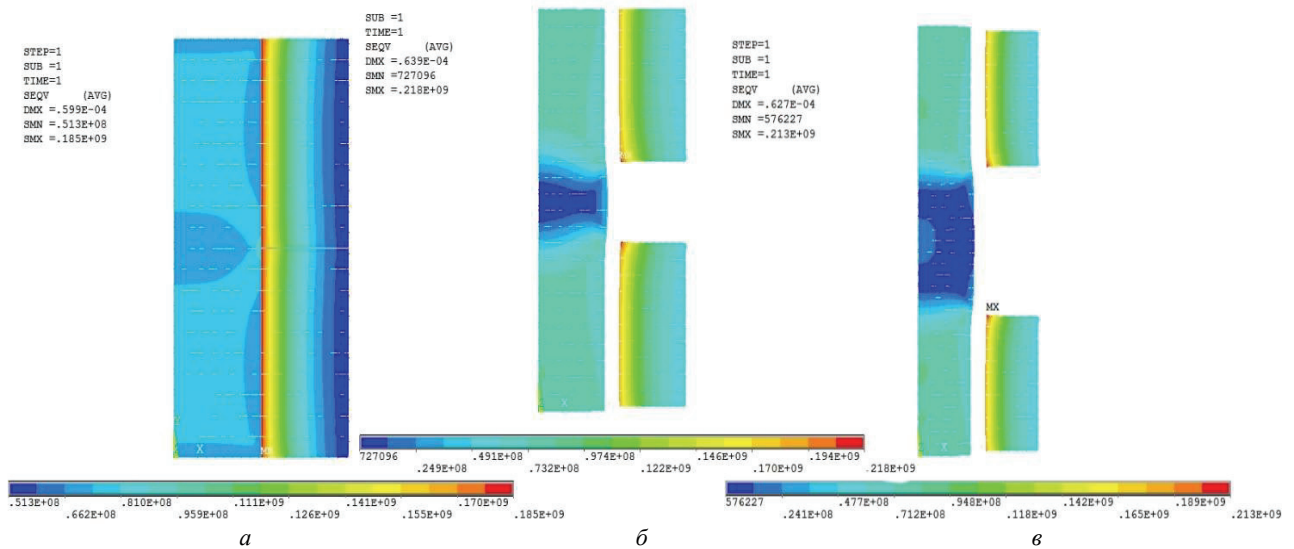


Рисунок 7 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 120$  мм

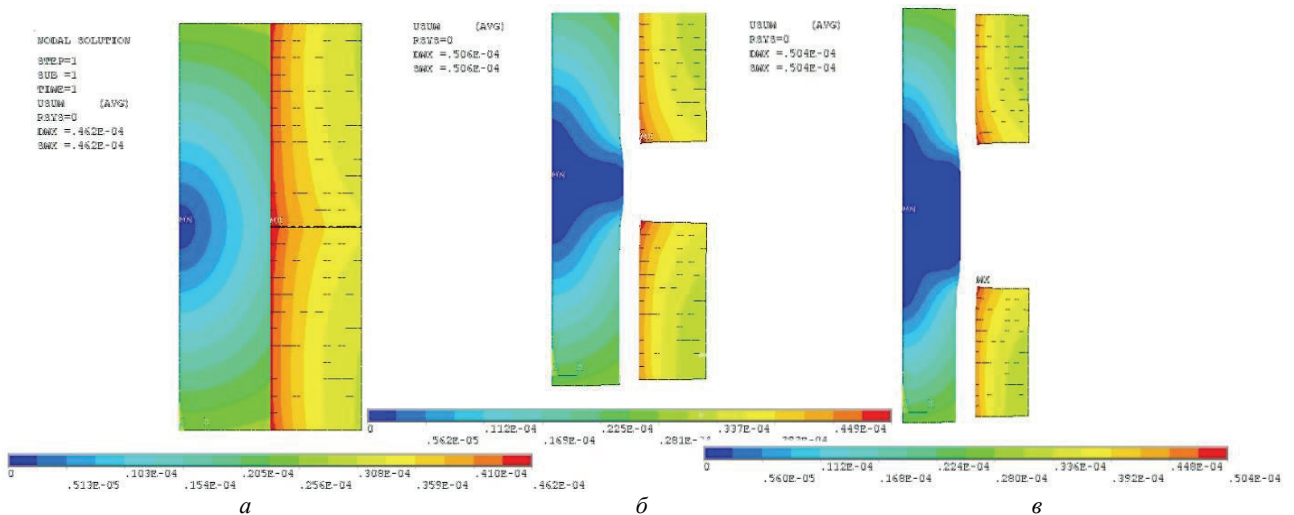


Рисунок 8 – Суммарные перемещения: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 120$  мм

**НДС соединений сплошного вала и двух втулок (тип Г)**

Полученные результаты приведены на рис. 7-12.

Проанализировав графики, мы можем судить, что эквивалентные напряжения в торцевом сечении вала

уменьшаются при увеличении интервала  $L$ , стабилизируются при  $L = 120$  мм. В зоне контакта на втулке напряжение растет до  $L = 50$  мм. Суммарные перемещения до  $L = 50$  мм в вале падают, во втулке растут.

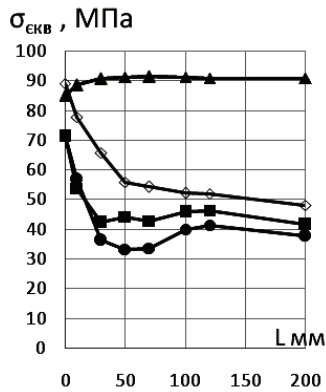


Рисунок 9 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

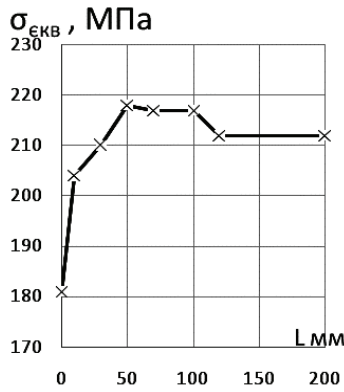


Рисунок 10 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

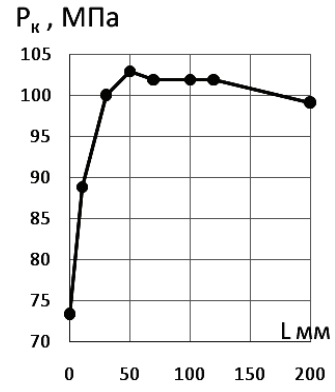


Рисунок 11 – Контактные давления

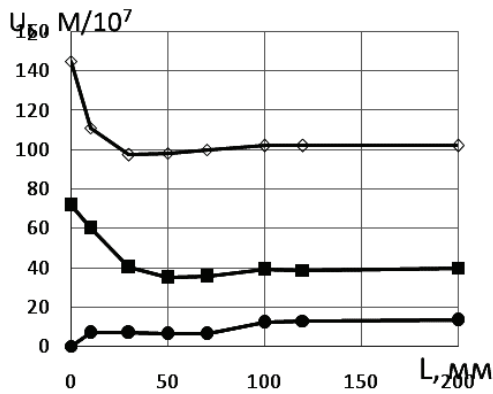
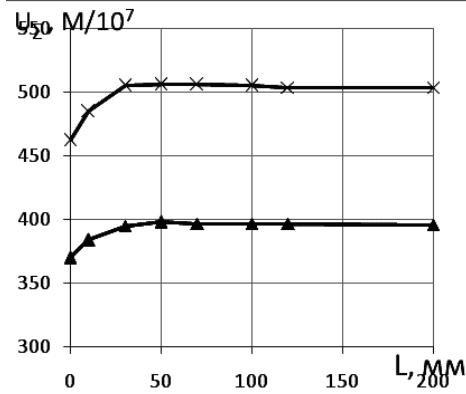


Рисунок 12 – Суммарные перемещения



**НДС соединений двух сплошных валов и втулки(тип II)**

Полученные результаты приведены на рис. 13-17.

С увеличением зазора  $L$  в торцевом сечении эквивалентные напряжения втулки падают, в вале растут, контактные давления растут, все перемещения уменьшаются и только на втулке в зоне контакта повышаются. При значении  $L = 150$  мм они перестают существенно изменяться.

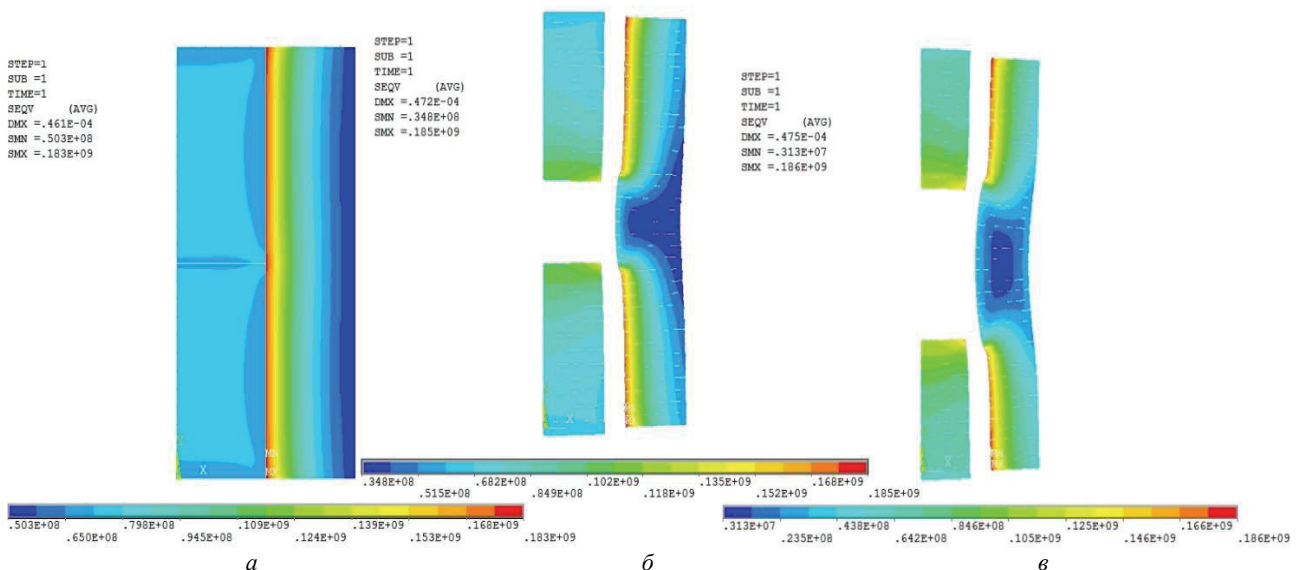


Рисунок 13 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а –  $L = 0$ , б –  $L = 70$  мм, в –  $L = 150$  мм

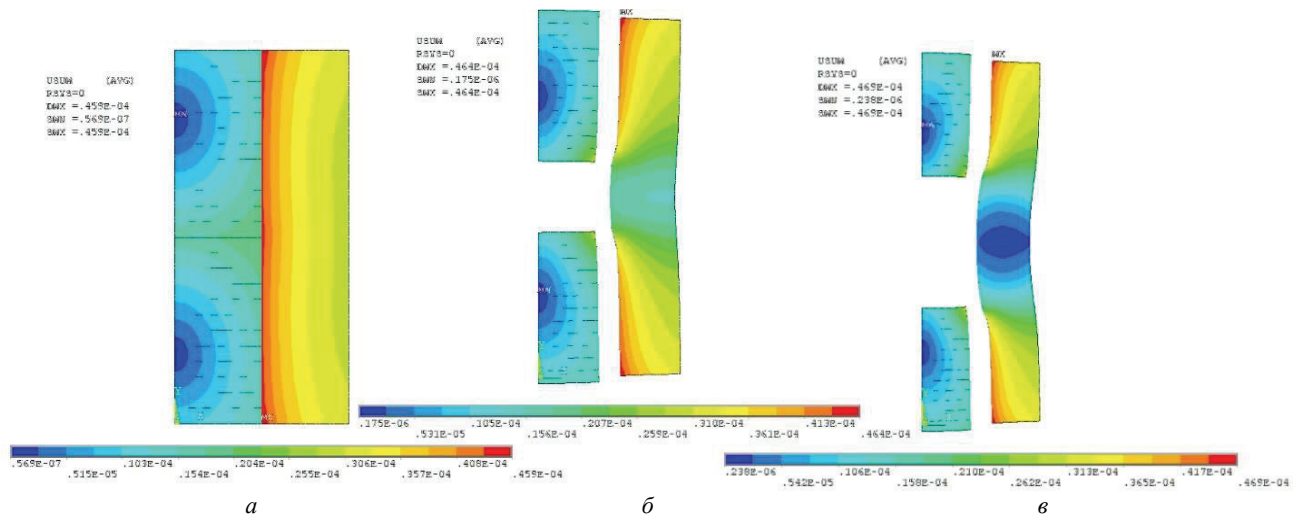


Рисунок 14 – Суммарные перемещения: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 150$  мм

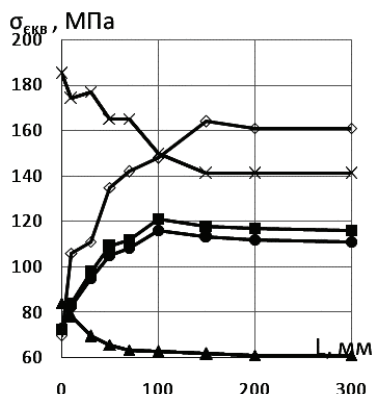


Рисунок 15 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

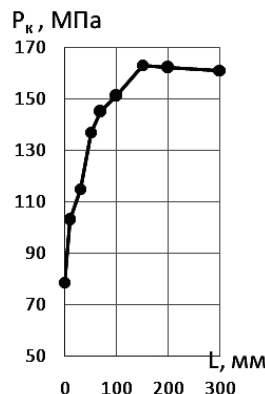


Рисунок 16 – Контактные давления

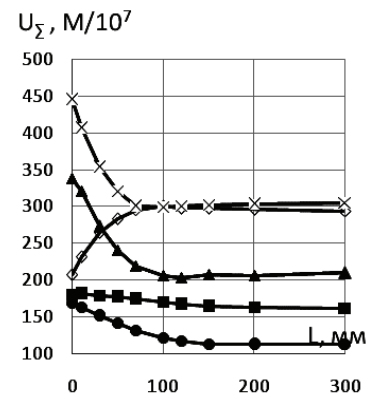


Рисунок 17 – Суммарные перемещения

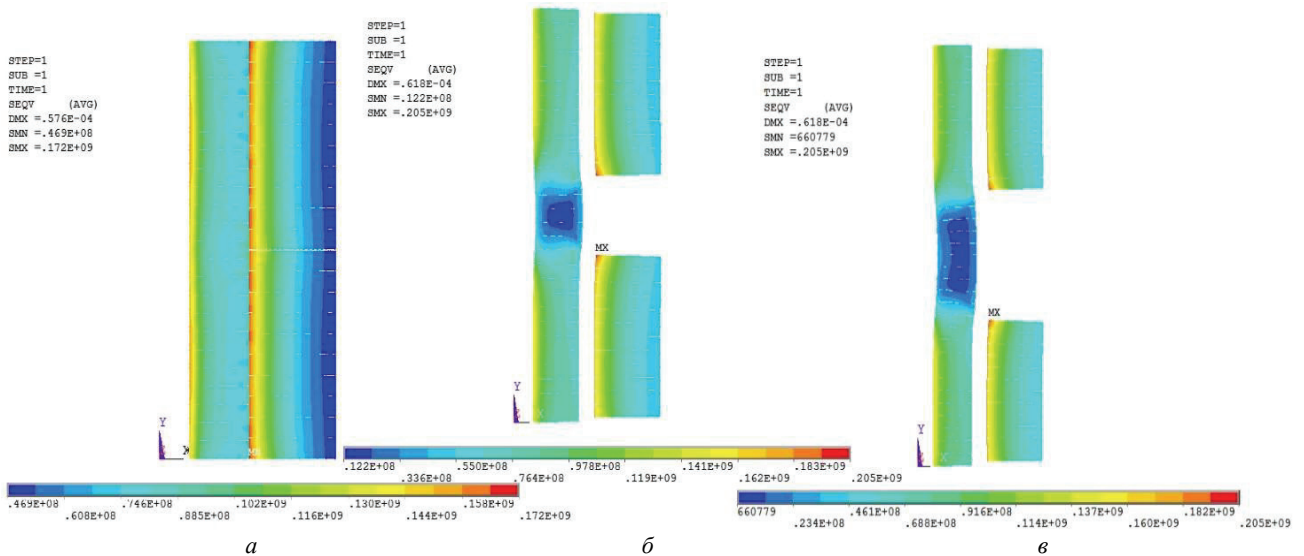


Рисунок 18 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 100$  мм

**НДС соединение двух пустотелых валов и втулки(тип IV)**

Полученные результаты приведены на рис. 23-27.

С увеличением зазора  $L$  эквивалентные напряжения в торцевом сечении вала повышаются, во втулке снижаются, и при  $L = 100$  мм стабилизируются. Контактные давления растут до  $L = 100$  мм. Суммарные перемещения на валу увеличиваются, а во втулке

уменьшаться и, при достижении зазора  $L = 100$  мм перестают существенно меняться.

В табл. 4 и 5 приведены сводные характеристики НДС соединений типа А или типа Б и соответствующих им соединениям типа I, II или III, IV, причем эти характеристики соответствуют расчетным точкам С и D для  $R = 60$  мм в торцевом сечении соединений с натягом при осевой координате  $l = 0$ .

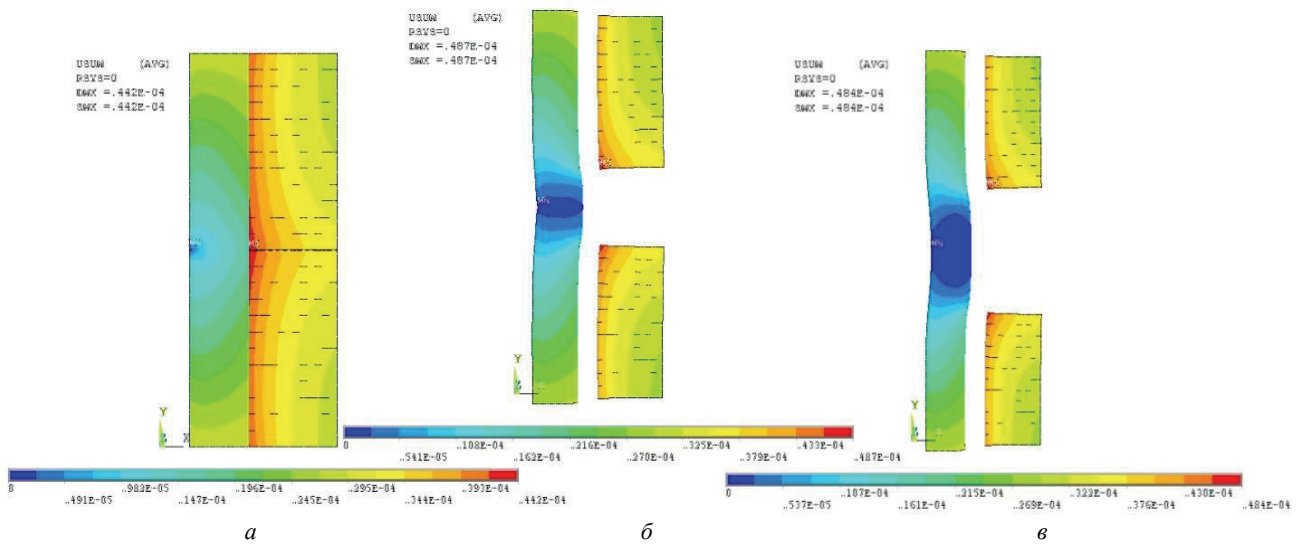


Рисунок 19 – Суммарные перемещения: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 100$  мм

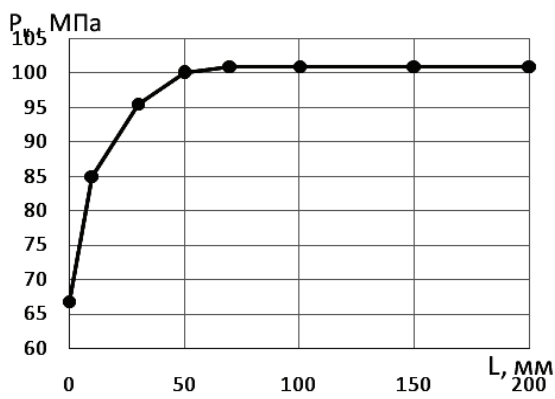


Рисунок 20 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

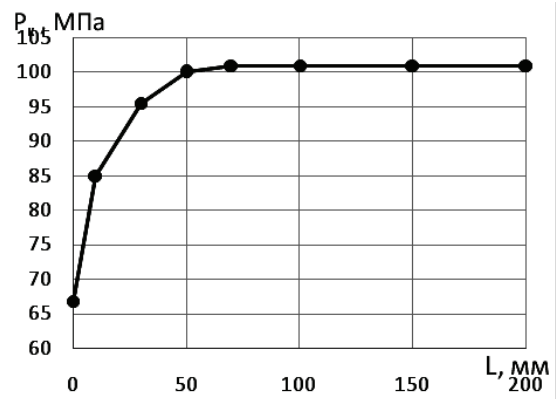


Рисунок 21 – Контактные давления

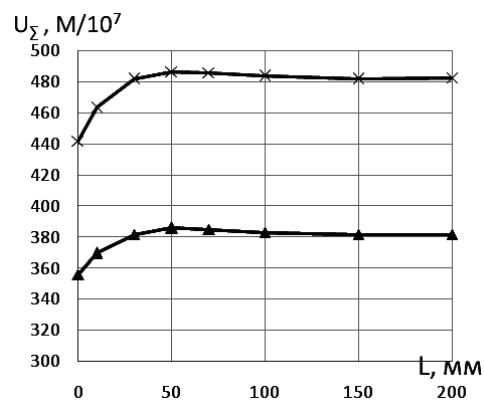
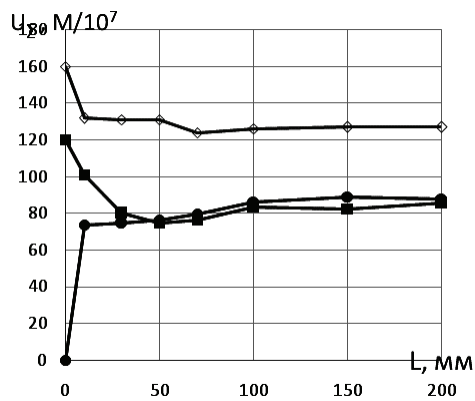


Рисунок 22 – Суммарные перемещения

Таблица 4 – НДС соединений с натягом типа А и типа I, II

Характеристики НДС	Радиус детали	Тип А	Тип I				Тип II			
			L, мм				L, мм			
			0	50	70	120	0	50	100	150
$\sigma_{\text{сKB}}$ , МПа	Втулка R60	183	181	218	217	212	185	165	150	141
	Вал R60	70,2	89,2	55,9	54,3	51,9	69,8	135	148	164
$P$ , МПа	R 60	76,2	73,3	103	102	102	78,8	137	151	163
$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м	Втулка R60	469	462	505	506	505	445	321	259	302
	Вал R60	140	145	97	100	102	207	283	300	291

Таблиця 5 – НДС соединений с натягом типа А и типа III, IV

Характеристики НДС	Радиус детали	Тип Б	Тип III				Тип IV			
			L, мм				L, мм			
			0	30	70	100	0	30	50	100
$\sigma_{скв}$ , МПа	Втулка R60	172	166	199	206	205	167	140	135	126
	Вал R60	75,2	88,9	68,7	53,5	50,6	80,4	140	141	150
$P$ , МПа	R 60	71,6	66,8	95,5	101	101	76,6	112	125	140
$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м	Втулка R60	446	442	448	486	484	409	322	232	270
	Вал R60	180	160	118	124	126	232	300	321	341

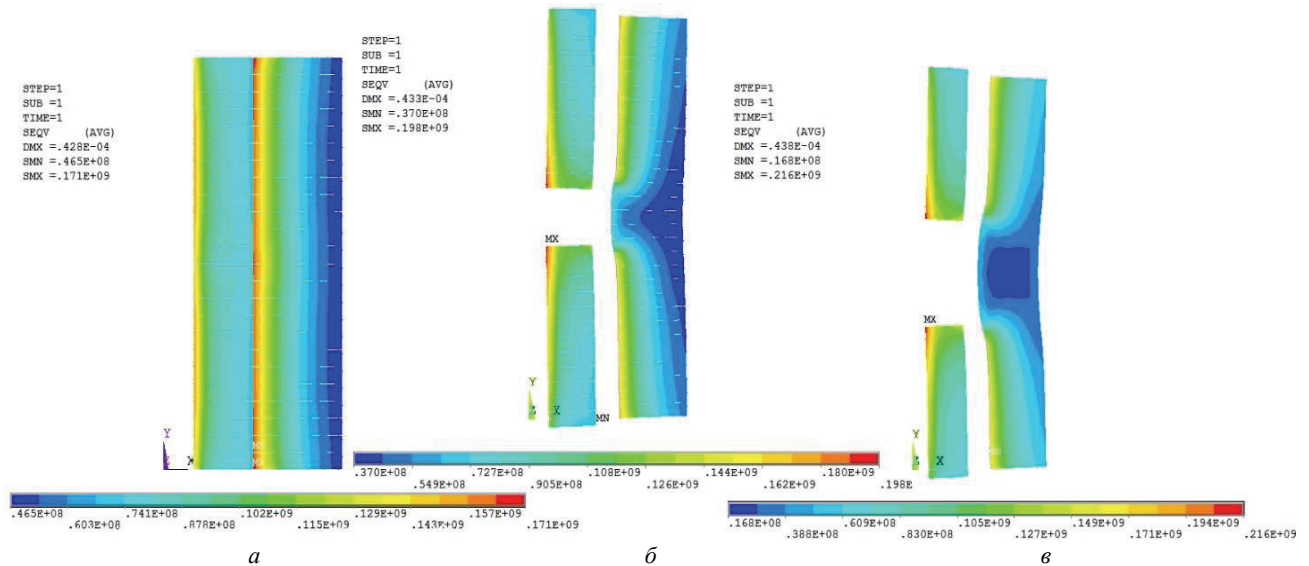


Рисунок 23 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 100 мм

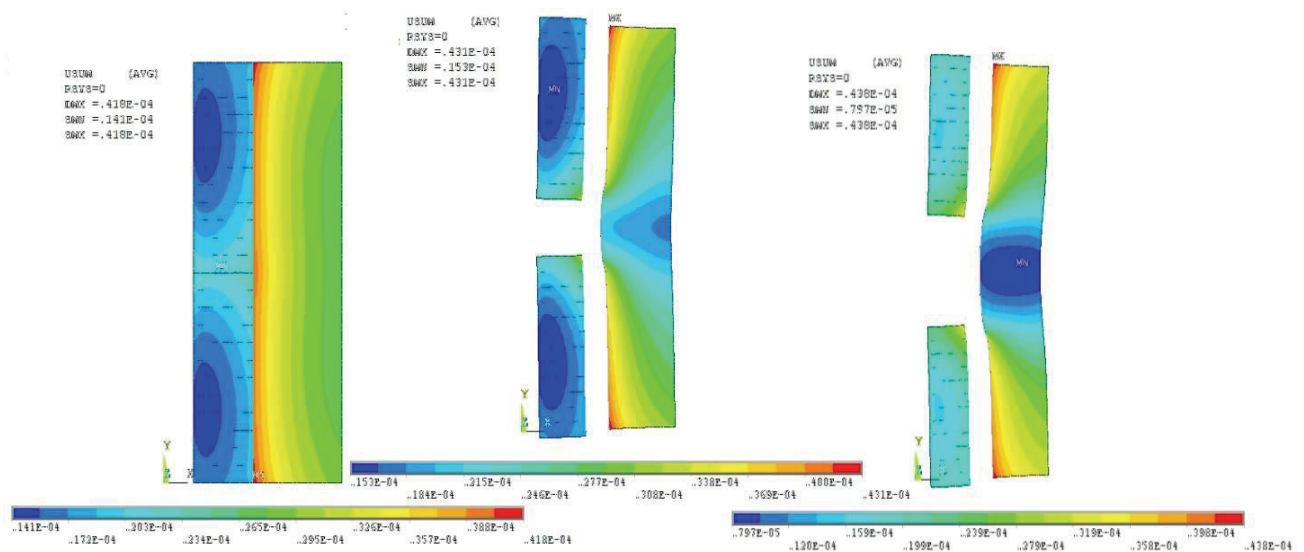


Рисунок 24 – Суммарные перемещения: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 100 мм

**Проверка результатов**

Для проверки правильности полученных результатов используем соединения с натягом типа А и Б (см. рис. 1, 2) и сравним контактные давления, полученными в программе ANSYS и по формуле (2) [2].

Соединение типа А:

$$\Delta = \left| \frac{78,749 - 77,87}{78,749} \right| = 1,116 \% .$$

Соединение типа Б:

$$\Delta = \left| \frac{71,999 - 72,60}{71,999} \right| = 0,835 \% .$$

Полученные результаты свидетельствуют о практическом совпадении данных программы ANSYS и стандартных формул (2) [2].

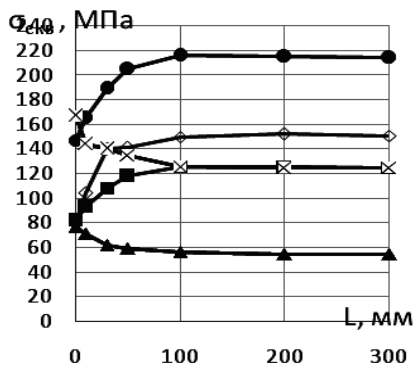


Рисунок 25 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

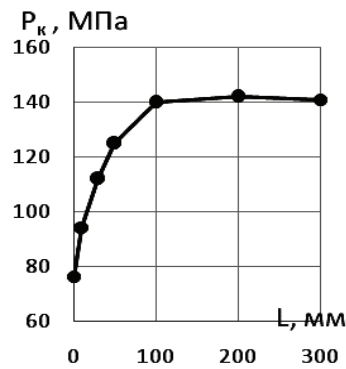


Рисунок 26 – Контактные давления

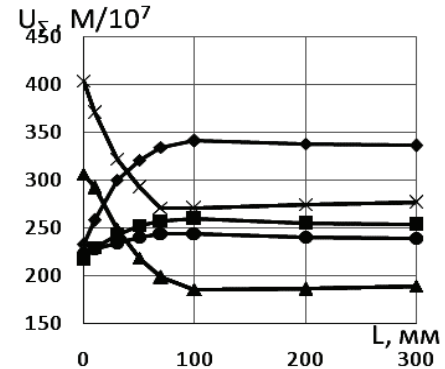


Рисунок 27 – Суммарные перемещения

**Выводы.** Исследовалось влияние одного соединения с натягом на другое для следующих соединений: тип I – сплошной вал и две втулки, тип II – два сплошных вала и втулка, тип III – пустотелый вал и две втулки, тип IV – два пустотелых вала и втулка.

Расчеты подтвердили идентичность НДС каждого из двух соединений с натягом, входящих в соединения типа I, II, III, IV.

В соединениях с натягом типа А и типа В характеристики НДС в диаметральных сечениях относительно равномерны. Однако в соединениях типов I, II, III, IV, когда соединения с натягом связываются между собой валами или втулками, во внутренних торцевых кромках соединений возникает всплеск напряжений, что обусловлено влиянием связующих соединения конструктивных элементов и «консольным» эффектом выступающих частей валов и втулок. При увеличении интервала  $L$  между валами или втулками они сначала интенсивно изменяются, затем стабилизируются, при достижении значения  $L_0$ .

По мере увеличения интервала  $L$  между втулками или валами  $\sigma_{\text{экр}}$  во втулках соединений типа I и III растут, в соединениях типа III, IV падают, в валах соединений типа I, II падают, в соединениях типа II, IV растут.

Для  $\sigma_{\text{экр}}$  интервалы стабилизации  $L_0$  составляют: для соединений типа I – 120 мм, тип II – 150 мм, типа III, IV – 100 мм.

Для контактных давлений  $P_k$  интервалы стабилизации составляют: для соединений типа I – 100 мм, тип II – 150 мм, типа III, IV – 100 мм.

Для суммарных перемещений  $U_{\Sigma}$  интервалы стабилизации  $L_0$  составляют: для соединений типа I – 100 мм, тип II – 150 мм, типа III – 50 мм, IV – 100 мм.

Характеристики НДС соединений типа I, II, III, IV при  $L = 0$  по сравнению с характеристиками типов А, В довольно близки.

Полученные результаты согласуются с распределением напряжений в задаче Ляме о толстостенных цилиндрах под действием внутренних и внешних давлений.

Результаты исследования свидетельствуют о возможности применения принципа Сен-Венана к соединениям с натягом.

**Список литературы:** 1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. Учеб. пособие / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с. 2. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении / Е.И. Берникер. – М.; Л.: Машиностроение, 1966. – 166 с. 3. Тарабасов Н.Д. Расчет напряженных посадок в машиностроении / Н.Д. Тарабасов. – М.: Машгиз, 1961. – 264 с. 4. Шевченко Р.А. Компьютерное моделирование некоторых типов профильных соединений с натягом при осевых нагрузках / Р.А. Шевченко, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57. – С. 106-114. 5. Данилов Д.В. НДС профильных з'єднань з натягом під дією контактних навантажень / Д.В. Данилов, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – № 52. С. 63-76. 6. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с. 7. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах / К.А. Басов. Под общ. ред. Д.Г. Красковско-го. – М.: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с. 8. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса ANSYS / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс 2006. – 248 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Samul V.I. Osnovi teorii uprugosti i plastichnosti. Uchebnoe posobie. Moscow: Visshaya shkola, 1982, 264 p. 2. Bemiker E.I. Posadka s natyagom v mashinostroenii. Moscow: Mashinostroenie, 1968, 168 p. 3. Tarabasov N.D. Raschet napryazhenykh posadok v mashinostroenii. Moscow: Mashgiz, 1961. 264 p. 4. Shevchenko R.A., Andreev A.G. Komp'yuternoe modelirovanie nekotorykh tipov profil'nykh soedinenij s natyagom pri osevykh nagruzkah. Visnyk NTU "KhPI", 2014, No 57, pp. 106-114. 5. Danilov D.V., Andreev A.G. NDS profil'nykh soedinenij s natyagom pod dejstviem kontaktnykh nagruzk. Visnyk NTU "KhPI", 2011, No 52, pp. 63-76. 6. Basov K.A. ANSYS: spravochnik pol'zovatelya. Moscow: DMK Press, 2005, 640 p. 7. Basov K.A. ANSYS v primerah i zadachah. Pod red. D.G. Kraskovskogo. Moscow: Komp'yuter Press, 2002, 224 p. 8. Basov K.A. Graficheskii interfeice kompleksa ANSYS. Moscow: DMK Press, 2006, 248 p.

Поступила (received) 19.07.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Виноградский Дмитрий Георгиевич** – студент, кафедра Динамика и прочность машин, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (063) 426-13-64; e-mail: cikmon@mail.ru

**Vinogradsky Dmitry Georgievich** - Student, Department of Dynamics and strength of machines, National Technical University «KhPI»; tel.: (063) 426-13-64; e-mail: cikmon@mail.ru

**Андреев Арнольд Георгиевич** - кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

**Andreev Arnold'g Georgievich** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University «KhPI», tel.: (057)707-68-79; e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.