

УДК 539.3

В. Ф. ВАСИЛЬЧЕНКО, А.Н. ЛОМАКИН

## ОПТИМИЗАЦИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматриваются круглые пластины, подвергающиеся действию нестационарной нагрузки. Предложен алгоритм решения задачи о пластине минимального веса с ограничениями на перемещения и напряжения. Задача решается на основе метода последовательных приближений. Необходимые условия оптимальности формулируются на основе принципа Понтрягина. На основе данных условий оптимальности и алгоритма метода последовательных приближений разработана универсальная программа оптимизации круглых пластин. С ее помощью находят конфигурации минимального объема с ограничениями на напряжения и перемещения для произвольного закрепления. При этом исходные и сопряженные переменные для каждого конкретного геометрического исполнения пластины  $h(r)$  ищутся путем разложения по собственным формам колебаний. Краевые задачи решаются методом начальных параметров; начальные задачи при этом интегрируются методом Рунге – Кутты. Максимизация гамильтониана производится в конечном наборе точек по радиусу пластины. Приведены результаты расчета оптимальной пластины.

**Ключевые слова:** пластины, оптимизация, напряженно-деформированное состояние, минимизирующий объем, крайняя задача.

**Введение.** Круглые пластины, подвергающиеся воздействию нестационарных изгибающих нагрузок, служат моделями разнообразных элементов конструкций. Это диски турбомашин, крышки-перегородки, диафрагмы, основания роторных машин и т. п. В математическом плане задачи оптимизации круглых пластин близки к соответствующим задачам оптимизации стержней при изгибных колебаниях. В то же время для них характерен и ряд отличительных особенностей, которые требуют детализации и изучения.

**Постановка задачи.** В статье рассматривается задача минимизации массы круглой пластины при ограничениях, накладываемых на характеристики напряженно-деформированного состояния. Для исследования привлекается математический аппарат принципа максимума Понтрягина [1]. Вычисление оптимальных параметров основывается на методе последовательных приближений варьируемым функциям [2]. Алгоритм решения задач оптимизации элементов конструкций в случае периодического нагружения представлен в книге [3].

**Решение задачи.** Рассмотрим круглую пластину с внутренним радиусом  $r_1$  и внешним  $r_2$ , нагруженную произвольной осесимметричной изгибающей нагрузкой  $q(r, t)$ . Деформации пластины описываются системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{M}{rD} - \frac{\gamma}{r} \varphi; \\ \frac{\partial M}{\partial r} &= Q - (1 - \gamma)D \frac{\varphi}{r} + \frac{\gamma}{r} M; & (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= \rho h r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(r, t) r. \end{aligned}$$

Здесь  $w(r, t)$ ,  $\varphi(r, t)$  – перемещение и угол поворота на окружности радиуса  $r$  в момент времени  $t$

$$M = r M_r; \quad Q = r Q_r,$$

где  $M_r$  ( $r, t$ ),  $Q_r$  ( $r, t$ ) – изгибающий момент и перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины ок-

ружности радиуса  $r$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)}$  – цилиндрическая жесткость;  $E$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  – модуль упругости, коэффициент

Пуассона и плотность материала;  $h(r)$  – закон изменения толщины пластины по радиусу (конфигурация).

Система уравнений дополняется начальными условиями

$$W(r, 0) = W_0(r); \quad \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = V_0(r) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 w(r_1, t) + b_1 Q(r_1, t) &= C_1(t); \\ a_2 \varphi(r_1, t) + b_2 M(r_1, t) &= C_2(t); \\ a_3 w(r_2, t) + b_3 Q(r_2, t) &= C_3(t); \\ a_4 \varphi(r_2, t) + b_4 M(r_2, t) &= C_4(t), \end{aligned} \quad (3)$$

которые для различных значений коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $C_i$  реализуют наиболее употребительные способы закрепления внутреннего  $r = r_1$  и внешнего  $r = r_2$  контуров кольцевой пластины, а также дают возможность учесть нагружение контурными силами и моментами. Для сплошных пластин необходимо учесть условия  $\varphi = 0$  и  $M = 0$  в точке  $r = 0$ .

Варьируемой будем считать конфигурацию  $h(r)$ , подчиненную конструктивным ограничениям

$$h_1(r) \leq h(r) \leq h_2, \quad (4)$$

а задача оптимизации будет состоять в определении конфигурации  $h(r)$ , удовлетворяющей ограничениям (4) и минимизирующей объем пластины

$$I_0 = V = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r h(r) dr$$

при условии, что на заданном интервале времени  $(0, T)$  выполнены ограничения на перемещение и интенсивность напряжений

$$|W(r, t)| \leq W_d; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_r \sigma_\theta \leq \sigma_d. \quad (5)$$

Радиальное и окружное нормальные напряжения подсчитываются через решения краевой задачи (1) – (3) по формулам

$$\sigma_r = \frac{6M}{rh^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{Eh}{2r} \varphi + \gamma \sigma_r.$$

Ограничения на перемещения и напряжения сводятся к интегральным условиям

$$I_w = \int_0^T \int_{r_1}^{r_2} K_w |W| dr dt = 0; \quad I_\sigma = \int_0^T \int_{r_1}^{r_2} K_\sigma \sigma_i^2 dr dt = 0$$

с помощью штрафных функций

$$K_w(r,t) = \begin{cases} K_1, |W(r,t)| > W_d; \\ 0, |W(r,t)| \leq W_d; \end{cases}$$

$$K_\theta(r,t) = \begin{cases} K_2, \sigma_i(r,t) > \sigma_d; \\ 0, \sigma_i(r,t) \leq \sigma_d. \end{cases}$$

Значения параметров  $K_1, K_2$  заранее неизвестны и устанавливаются пробными расчетами. Необходимые условия оптимальности формируются на основе принципа максимума [1] и будут представлены исходной краевой задачей (1) – (3), сопряженной краевой задачей

$$\frac{d\bar{W}}{dr} = \bar{\varphi}; \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = -\frac{\bar{M}}{rD} - \nu \frac{\bar{\varphi}}{r} - 6K_2 \frac{\sigma_r(2-\nu) + \sigma_\theta(2\nu-1)}{rh^2};$$

$$\frac{d\bar{M}}{dr} = \bar{Q} - (1-\nu^2)D \frac{\bar{\varphi}}{r} + \frac{\nu}{r} \bar{M} - K_2 \frac{Eh}{2r} (2\sigma_\theta - \sigma_r); \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dr} = \rho hr \frac{d^2W}{dt^2} - K_1 \text{sign}(W)$$

с однородными начальными условиями

$$\bar{W}(r, T) = \frac{d\bar{w}(r, T0)}{dt} = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями

$$a_1 \bar{W}(r_1, t) + b_1 \bar{Q}(r_2, t) = 0;$$

$$a_2 \bar{\varphi}(r_1, t) + b_2 \bar{M}(r_1, t) = 0;$$

$$a_3 \bar{W}(r_2, t) + b_3 \bar{Q}(r_2, t) = 0; \quad (8)$$

$$a_4 \bar{\varphi}(r_2, t) + b_4 \bar{M}(r_2, t) = 0$$

замкнутыми на оптимальном  $h(r)$  условием максимума гамильтониана

$$H = \int_0^T \left( -\frac{M\bar{M}}{rD} + (1-\nu^2)D \frac{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}{r} + \rho hr \bar{W} \frac{d^2W}{dt^2} - K_2 \sigma_i^2 \right) dt - rh. \quad (9)$$

На основе данных условий оптимальности и алгоритма метода последовательных приближений [2, 3] была разработана универсальная программа оптимизации круглых пластин. С ее помощью находятся конфигурации минимального объема с ограничениями на напряжения и перемещения для произвольного закрепления. При этом исходные и сопряженные переменные для каждого конкретного геометрического исполнения пластины  $h(r)$  ищутся путем разложения по собственным формам колебаний [4]. Краевые задачи решаются методом начальных параметров; начальные задачи при этом интегрируются методом Рунге – Кутты. Максимизация гамильтониана (9) производится в конечном наборе точек по радиусу пластины.

**Пример.** В качестве примера рассматривается решение задачи оптимизации наружного щита мощного турбогенератора. Щит должен обладать необходимой жесткостью и прочностью, а также обеспечивать, за счет уплотнения места соединения с ротором, герметизацию внутренней полости статора, где под некоторым избыточным давлением находится охлаждающая среда – водород.

Исходя из геометрических размеров конструк-

ции, моделью наружного щита может служить кольцевая пластина с внутренним и внешним радиусами  $r_1 = 0,4$  м,  $r_2 = 1,8$  м.

Параметры материала:

$$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \nu = 0,3; \quad \rho = 7,84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Расчетная нагрузка  $q = 7,84 \cdot 10^5$  Па прикладывается в момент времени  $t = 0$  и имитирует внезапный взрыв охлаждающей среды.

Необходимо найти закон изменения толщины щита по радиусу, подчиняющийся конструктивным ограничениям  $0,07 \text{ м} \leq h(r) \leq 0,2$  м и минимизирующий объем материала при условии, что для всех  $r \in [r_1, r_2], t \in [0, T]$  ( $T = 0,02$  с) выполнено условие относительно интенсивности напряжений,

$$\sigma_i^2(r, t) \leq \sigma_d^2, \quad (10)$$

где максимальное значение интенсивности напряжений для исходного варианта изготовления щита  $h(r) = 0,14$  м. Условие (10) обеспечивает для оптимального по весовым характеристикам щита такой же запас по прочности, как и для исходного варианта конструкции.

После анализа экспериментальных данных была рассмотрена модель пластины свободной на внутреннем контуре относительно линейных перемещений и упруго закреплена на пружине жесткостью  $C_\varphi$  ( $C_\varphi = 0,3 \cdot 10^8 \text{ нм}^{-1}$ ) относительно угловых перемещений. Выбранная модель соответствует начальным и граничным условиям

$$W(r, 0) = \frac{dW(r, 0)}{dt} = 0; \quad M(r_1 t) + r_1 C_\varphi \varphi(r_1, t) = 0;$$

$$Q(r_1, t) = W(r_2, t) = \varphi(r_2, t) = 0.$$

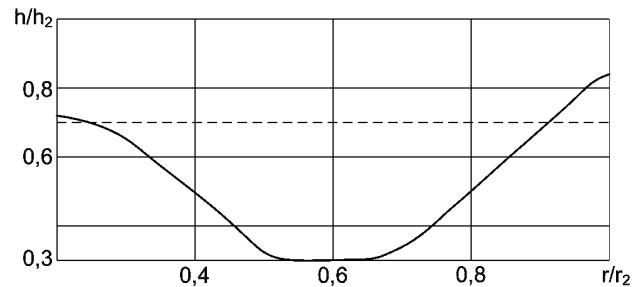
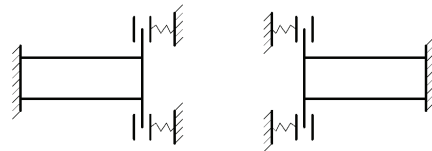


Рисунок 1 – Оптимальная конфигурация конструкции

**Выводы.** На рис. 1 приведена оптимальная конфигурация. Пунктиром показан исходный проект. Оптимальный проект дает экономию материала около 15%.

**Список литературы:** 1. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с. 2. Черноушко Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф. Л. Черноушко, Н. В. Банчук. – М.: Наука, 1973. – 238 с. 3. Гринев В. Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В. Б. Гринев, А. П. Филипов. – К.: Наукова думка, 1975. – 295 с. 4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Pontryagin L. S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov*. Moscow: Nauka, 1969, 384 p. 2. Chernous'ko F. L., Banichuk N.V. *Variacionnye zadachi mehaniki i upravleniya*. Moscow: Nauka, 1973, 238 p. 3. Grinev

V. B., Fillipov A.P. *Optimizaciya elementov konstrukcij po mehanicheskim harakteristikam*. Kyiv: Naukova dumka, 1975, 295 p. 4. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow: Nauka, 1967, 444 p.

*Поступила (received) 22.07.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Васильченко Виктор Федорович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-60-32, e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Vasilchenko Viktor Fedorovich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Applied Mathematics, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 60- 32; e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Ломакин Александр Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-68-79, e-mail: anlomakin@rambler.ru

**Lomakin Aleksandr Nikolaevich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 68- 79; e-mail: anlomakin@rambler.ru

УДК 539.3

**Д.Г. ВИНОГРАДСКИЙ, А.Г. АНДРЕЕВ**

**ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ**

Данная работа посвящена исследованию взаимного влияния соединений с натягом для вариантов соединений: сплошной вал с двумя втулками, два сплошных вала с втулкой, пустотелый вал с двумя втулками, два пустотелых вала с втулкой в ПК ANSYS. Получены характеристики НДС (эквивалентные напряжения. Контактные давления суммарные перемещения) в зависимости от величины интервала между соединениями с натягом.

**Ключевые слова:** соединения с натягом, метод конечных элементов, напряжения, деформации.

**Введение.** Соединение с натягом широко применяются в различных машинах и механизмах, когда требуется передача больших осевых сил, крутящих моментов или нагрузок. Прочность и относительная неподвижность этих соединений обеспечиваются силами трения, которые зависят от давления между соединительными деталями, и определяется величиной натяга - разницы размеров охватывающей и охватываемой деталей. Силы трения обусловлены созданием распределенной нормальной нагрузки (давления) на сопряженных поверхностях соединяемых деталей. Посадочный размер охватывающей детали делают несколько меньше посадочного размера охватываемой детали. После соединения посадочный размер деталей становится общим, при этом посадочный размер охватывающей детали в результате упругих деформаций увеличивается, а охватываемой – уменьшается. Из соединений деталей с натягом наибольшее распространение получили цилиндрические соединения, у которых одна деталь охватывается второй по цилиндрической поверхности. Характерными примерами деталей, соединенных посадкой с натягом, являются: венцы зубчатых и червячных колес, подшипники качения, роторы электродвигателей и т. д.

**Постановка задачи.** При удлинении валов или соединении их с помощью втулок используются посадки с натягом, которые могут влиять друг на друга, поскольку фактический натяг не будет равен исходному геометрическому, а будет скорректирован влия-

нием рядом находящегося второго соединения с натягом, а также консольным эффектом выступающих частей валов и втулок.

Целью данной работы является выяснение, в какой мере это справедливо.

Рассматриваются 6 типов соединения с натягом:

– тип А – сплошной вал и втулка равных осевых размеров (рис. 1),

– тип Б - пустотелый вал и втулка равных осевых размеров (рис. 2),

– тип I – сплошной вал с двумя втулками (рис. 3),

– тип II – два сплошных вала с втулкой (рис. 4),

– тип III – пустотелый вал с двумя втулками (рис. 5),

– тип IV – два пустотелых вала с втулкой (рис. 6).

При оценке взаимного влияния с натягом очевидно, что любое из соединений типа I, II, III, IV – это 2 соединения типа А или Б и конструктивно объединяющие их в одно целое элементы в виде валов и втулок.

Таблица 1 – Характеристики материала

Физический параметр	Значения для стали 40Х
Модуль упругости E, МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7800
Предел текучести $\sigma_t$ , МПа	785
Предел прочности $\sigma_b$ , МПа	980
Коэффициент трения $\mu$	0,15
Натяг в соединении $\Delta$ , М	0,00012