

К.Ю.СЧАСТЛИВЕЦ, науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
С.Ю.ПОГОРЕЛОВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
С.И.МАРУСЕНКО, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В процесі розробки законів керування для космічних апаратів постає задача керованого руху пружних об'єктів. Однією з можливих методик розв'язання таких задач є методика з використанням метода скінчених елементів для розв'язання динамічного аналізу моделі з урахуванням пружних збурень. В результаті проведених досліджень розроблено методику, яка дозволяє моделювати керований рух пружного тіла з використанням МСЕ.

The guided motion problem of elastic body appears in process of spacecraft control law designing. One of possible methods of suchlike problem solution is the FEM- based method of dynamic analysis which account of elastic disturbances. As a result of performed analysis the method which allows simulating the controlled motion of elastic body has been developed.

В процессе разработки законов управления для космических аппаратов появляется задача управляемого движения упругих объектов. Одной из возможных методик решения таких задач является методика с использованием метода конечных элементов для динамического анализа модели с учетом упругих возмущений. В результате проведенных исследований разработана методика, позволяющая моделировать управляемое движение упругого тела с использованием МКЭ.

1 Описание проблемы. В процессе разработки законов управления для космических аппаратов (КА) встает задача учета влияния упругих возмущений, возбужденных вынужденными колебаниями КА, вызванными, в свою очередь, переменным управляющим воздействием. Решение подобных задач обычно проводилось аналитически для упрощенных моделей, составленных из ограниченного числа сосредоточенных масс, соединенных упругими связями с заданными упругими и демпфирующими характеристиками. Развитие вычислительной техники сделало возможным решать данную задачу численными методами с использованием более сложных моделей с распределенными характеристиками. Одной из возможных методик решения подобных задач является методика с использованием метода конечных элементов для решения задачи динамического анализа модели с учетом упругих возмущений. Общий алгоритм решения проблемы управляемого движения (разворота) упругого тела приведен на рис. 1.

2 Математическая постановка задачи. Задача динамического анализа движения упругого тела под действием нестационарных внешних нагрузок для линейной системы описывается следующим уравнением:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{\dot{u}\} + [C]\{u\} = \{F^a(t)\}, \quad (1)$$

где $[M]$ – матрица масс, $[K]$ – матрица демпфирования, $[C]$ – матрица жестко-

сти, $\{\ddot{u}\}$ – вектор узловых ускорений, $\{\dot{u}\}$ – вектор узловых скоростей, $\{u\}$ – вектор узловых перемещений, $\{F^a(t)\}$ – вектор внешних сил, изменяющийся во времени.

Задача управляемого движения упругого тела в общем случае является геометрически нелинейной, так как во время маневра тело совершает большие повороты как твердое тело, в то время как напряжения в нем остаются в рамках линейной теории. Это приводит к тому, что вместе с телом поворачиваются системы координат конечных элементов (рис. 2).

Для компенсации данной нелинейности вводится матрица поворота $[Tn]$, определяющая положение повернутых систем координат элементов относительно некой первоначальной системы координат:

$$[Tn] = [Tv] [Rn] \quad (2)$$

Конкретный вид матрицы $[Tn]$ зависит от типа используемого элемента и для стержневого элемента определяется путем усреднения узловых поворотов [1].

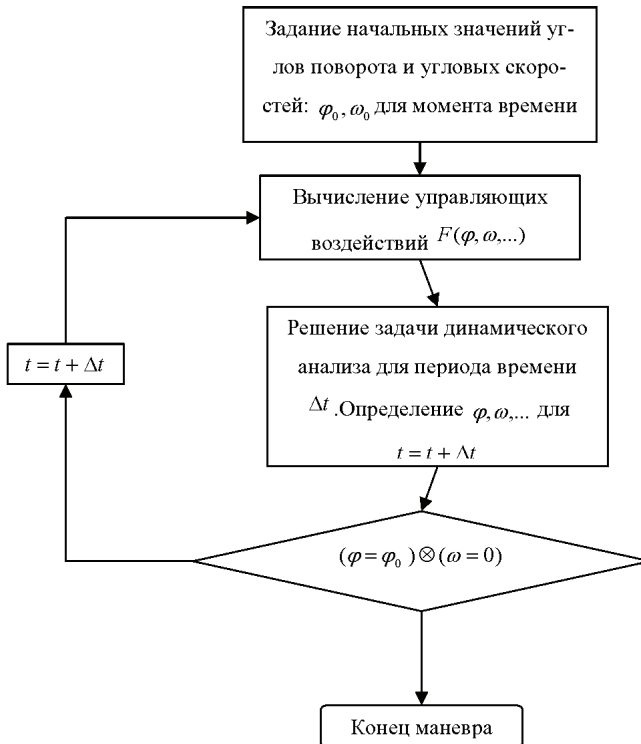


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма моделирования управляемого движения упругого тела

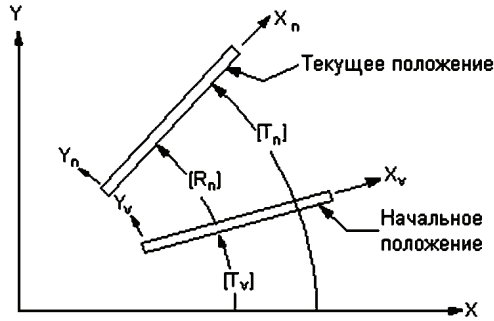


Рисунок 2 – Геометрическая нелинейность при больших поворотах

В данной задаче применена модель вязкого трения, при котором сила трения пропорциональна скорости движения тела. Матрица $[C]$, определяющая данную зависимость имеет, следующий вид:

$$[C] = \beta[K] + \sum_{j=1}^{N_m} [\beta_j^m [K_j]], \quad (3)$$

где β – коэффициент демпфирования при матрице жесткости, β_j – коэффициент демпфирования при матрице жесткости для j -го материала, $[K_j]$ – часть матрицы жесткости для j -го материала, N_m – число материалов, используемых в системе.

Для нахождения вектора узловых перемещений $\{u\}$ для момента времени t_n необходимо решить краевую задачу

$$[A]\{u\} = \{F_a\}, \quad (4)$$

где $[A]$ – матрица коэффициентов, в общем случае зависящая от $\{u\}$.

Данная краевая задача является в общем случае нелинейной и решается с использованием метода Ньютона-Раффсона [2]:

$$\begin{aligned} [A_i^T]\{\Delta u_i\} &= \{F^a\} - \{F^{ng}\}, \\ \{u_{i+1}\} &= \{u_i\} + \{\Delta u_i\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{\Delta u_i\}$ – приращения перемещений на i -ой итерации, $[A_i^T]$ – матрица-якобиан, $\{F^{ng}\}$ – вектор восстанавливающих нагрузок.

Задача динамического анализа решается одной из реализаций метода прямого интегрирования во времени [3]:

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1-\alpha_m}\} + [K]\{\dot{u}_{n+1-\alpha_m}\} + [C]\{u_{n+1-\alpha_m}\} = \{F_{n+1-\alpha_m}^a\}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}_{n+1-\alpha_m}\} &= (1 - \alpha_m)\{\ddot{u}_{n+1}\} + \alpha_m\{\ddot{u}_n\}; \\ \{\dot{u}_{n+1-\alpha_f}\} &= (1 - \alpha_f)\{\dot{u}_{n+1}\} + \alpha_f\{\dot{u}_n\}; \\ \{u_{n+1-\alpha_m}\} &= (1 - \alpha_f)\{u_{n+1}\} + \alpha_f\{u_n\}; \\ \{F_{n+1-\alpha_f}^a\} &= (1 - \alpha_f)\{F_{n+1}^a\} + \alpha_f\{F_n^a\}. \end{aligned}$$

3 Описание исследовательской модели. В качестве объекта исследования был выбран микроспутник, представляющий собой небольшое центральное ядро с 4-мя большими упругими элементами – солнечными батареями.

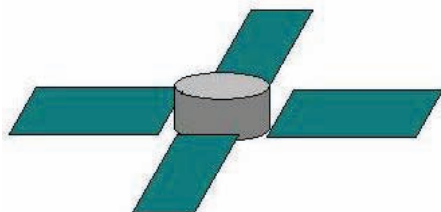


Рисунок 3 – Модель микроспутника

Было принято решение в качестве исследовательской модели использовать упрощенную модель спутника, представляющую собой шарнирно закрепленный стержень, состоящий из двух частей с разными жесткостными, демпфирующими и массово-габаритными характеристиками, совершающий поворот вокруг точки закрепления (рис. 4). Данный выбор был обусловлен стремлением минимизировать требования к вычислительным мощностям на период разработки и отладки реализации алгоритма.



Рисунок 4 – Стержневая исследовательская модель

Как было сказано выше, модель представляет собой шарнирно закрепленный в одном конце составной двумерный стержень. Одна его часть (1), ближайшая к точке закрепления, моделирует жесткое ядро спутника, а вторая часть (2) его упругие элементы: солнечные батареи и т.д. Для каждой из частей задается следующий набор параметров:

- Длина участка стержня;
- Высота участка стержня;
- Момент инерции сечения участка стержня;
- Площадь сечения участка стержня;
- Модуль упругости участка стержня;
- Плотность участка стержня;

– Коэффициент демпфирования участка стержня.

В качестве разновидности управляемого движения спутника было решено рассматривать плоское вращение вокруг центра масс. Управляемое вращение упругого стержня осуществляется посредством приложения перпендикулярно к оси стержня управляющей силы F , рассчитываемой по следующему закону управления:

$$F(\varphi, \omega) = -k_1(\varphi_k + \varphi) - k_2\omega, \quad (7)$$

где φ, ω – текущие значения угла поворота и угловой скорости в точке закрепления стержня; φ_k – целевое (конечное) значение угла поворота; k_1, k_2 – коэффициенты закона управления.

В качестве выходных данных модели были определены следующие величины:

- Время, с;
- Угол поворота относительно центра вращения, рад;
- Угловая скорость относительно центра вращения, рад/с;
- Величина управляющей силы, Н;
- Линейные ускорения в 10 точках, равномерно распределенных по длине модели;
- Отклонения от недеформированной оси стержня в 10 точках, равномерно распределенных по длине модели, м.

Параметры закона управления были приняты:

- Максимальная тяга управляющего усилия – 10 Н.
- Характерное время реакции управления (шаг интегрирования по времени) 0,1 с.
- Необходимая точность маневра: по углу – 1 градус, по угловой скорости 0,1 град./с.

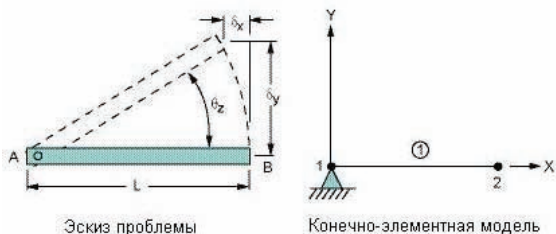


Рисунок 5 – Поворот стержня на заданный угол

4 Верификация модели. В рамках верификационных процедур для исследовательской расчетной модели были проведены два верификационных расчета:

- Равномерный поворот шарнирно-закрепленного стержня на заданный угол.
- Равноускоренное движение шарнирно-закрепленного стержня под

действием момента, приложенного в точке закрепления.

4.1 Поворот стержня на заданный угол. Целью данного верификационного расчета было исследование адекватности результатов численного моделирования поворота с расчетными. В качестве модели был взят стержень с массой, стремящейся к нулевой (рис. 5) и следующими граничными условиями в точке А: перемещения равны нулю, угловая скорость 400 об/с. В качестве параметров сравнения рассматривались перемещения свободного конца стержня.

Параметры модели были приняты следующими:

- Длина – 0,254 м;
- Плотность – $1 \cdot 10^{-6}$ кг/м³;
- Модуль упругости – $7,3 \cdot 10^{10}$ Па.

Сравнительные результаты моделирования и расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Сравнительные результаты моделирования и расчета поворота стержня

Поворот, град	Перемещение, м	Расчет	Моделирование
60	δ_x	-0,127	-0,127
90	δ_y	0,254	0,254
180	δ_x	-0,508	-0,508
210	δ_y	-0,127	-0,127
315	δ_x	-0,074422	-0,074422
360	δ_y	0,0	0,0

4.2 Равноускоренное движение стержня. Целью данного верификационного расчета было исследование адекватности динамического отклика шарнирно-закрепленного стержня на приложение в центре крутящего момента. Параметры модели были выбраны следующие:

- Длина – 1 м;
- Плотность – 1000 кг/м³;
- Сечение – прямоугольное, высота – 0,1 м, ширина – 0,1 м;
- Величина крутящего момента – 1 Н · м.

В качестве параметра сравнения рассматривалось угловое ускорение вокруг центра вращения. Сравнительные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Сравнительные результаты моделирования и расчета равноускоренного поворота стержня

Параметр	Расчет	Моделирование
Угловое ускорение, м/с ²	0,3	0,299244

5 Математическая модель управляемого плоского вращения жесткого стержня. Для сравнения с результатами моделирования для управляе-

мого движения упругого тела была разработана эквивалентная модель жесткого тела, обладающая одинаковыми с ней массово-габаритными характеристиками и совершающая аналогичный маневр по аналогичному закону движения.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{I}; \\ \Delta\omega &= \varepsilon\Delta t; \\ \Delta\varphi &= \omega_0\Delta t + \frac{\varepsilon\Delta t^2}{2}, \end{aligned} \tag{8}$$

где M – управляющий момент; I – момент инерции стержня относительно центра вращения; ε – угловое ускорение; $\Delta\omega$ – приращение угловой скорости за время Δt ; $\Delta\varphi$ – приращение угла поворота за время Δt при начальной угловой скорости ω_0 .

6 Результаты моделирования. Моделировался поворот на 180 градусов для исследовательской упругой модели и соответствующей ей жесткой модели.

Время поворота на угол 180 градусов:

- жесткой модели – 58,8 с.;
- упругой модели – 327,2 с.

Зависимости угла поворота, угловой скорости и величины управляющей силы приведены на рис. 6-8.

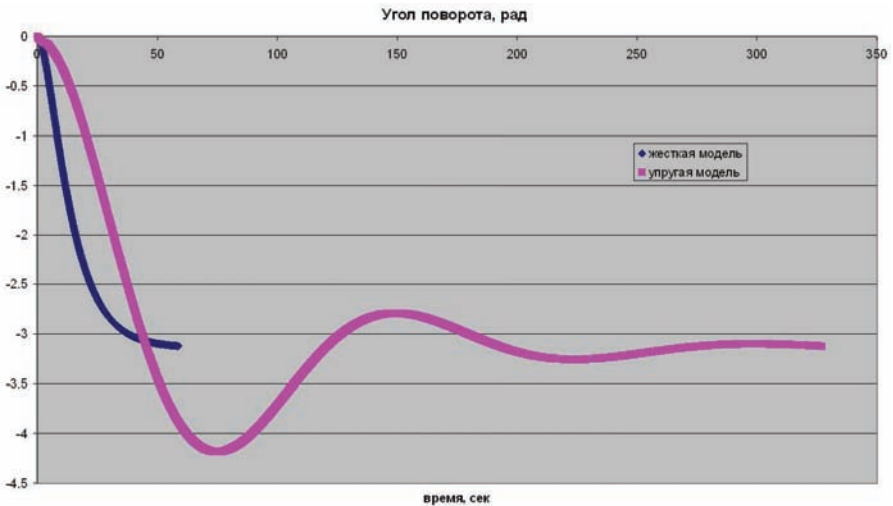


Рисунок 6 – Изменение угла поворота при маневре жесткого и упругого тел

Для изучения отклонения упругого стержня от недеформированной оси были выведены отклонения в узлах U10-U250 с шагом в тридцать узлов. Ди-

намика отклонения стержня от недеформированной оси в течении первых 11 с. приведена на рис. 9.

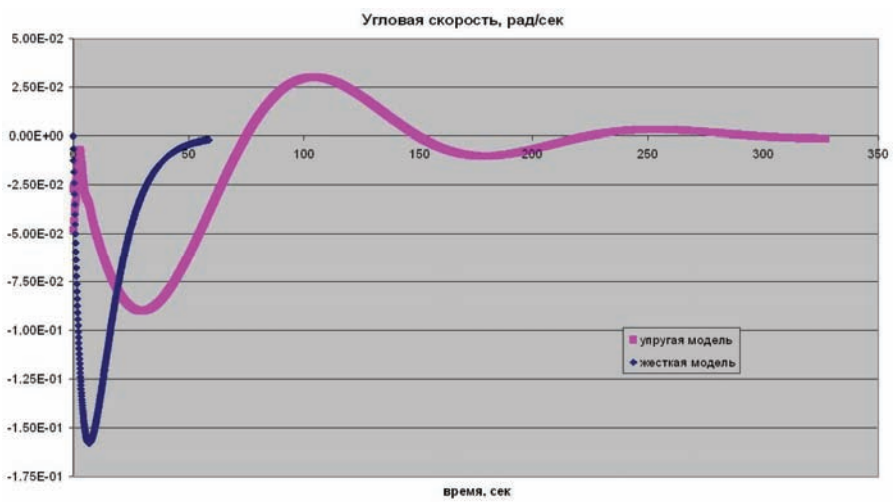


Рисунок 7 – Изменение угловой скорости при маневре жесткого и упругого тел

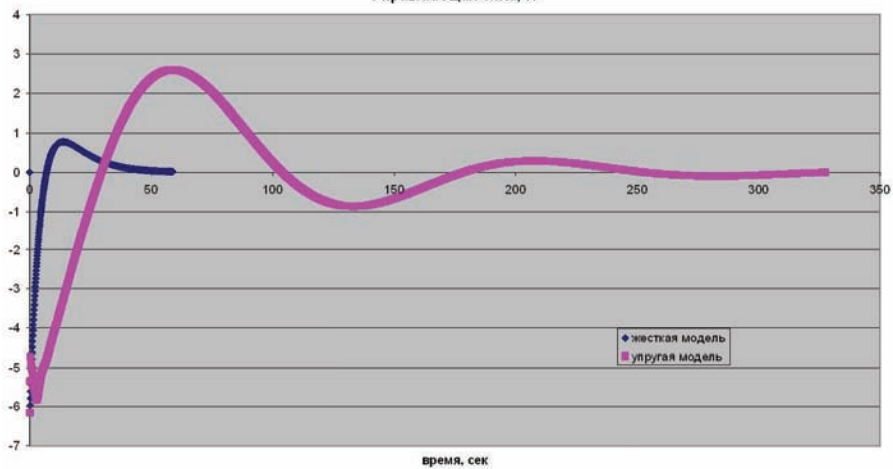


Рисунок 8 – Изменение величины управляющей силы при маневре жесткого и упругого тел

Также получены распределения линейных ускорений по оси стержня во времени, показанные для первых 9 с. (рис. 10.)

Выводы. В результате проведенных исследований разработана методика, позволяющая моделировать управляемое движение упругого тела с ис-

пользованием МКЭ. Разработана программная реализация данной методики.

Из результатов моделирования видна необходимость учета упругих свойств спутника в создании законов управления. Маневр, совершенный по закону управления, не учитывающему упругих свойств спутника, занимает для рассматриваемой модели в пять раз больше времени, чем маневр абсолютно жесткой модели спутника.

Отклонения упругого стержня от недеформированной оси

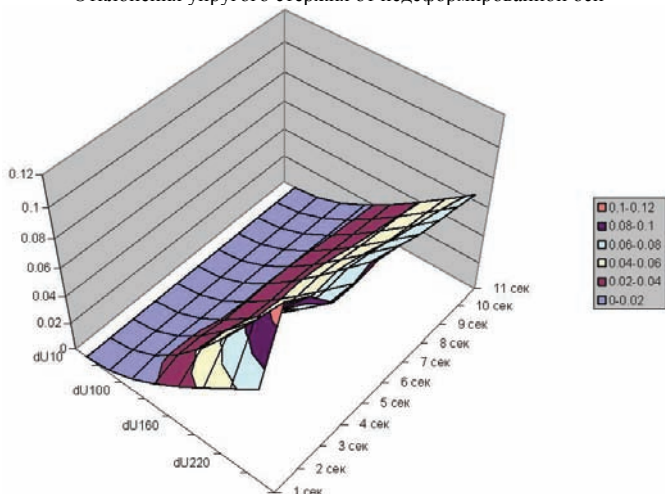


Рисунок 9 – Динамика отклонения стержня в течении первых 11 с.

Профиль линейных ускорений вдоль оси стержня, м(сек²сек)

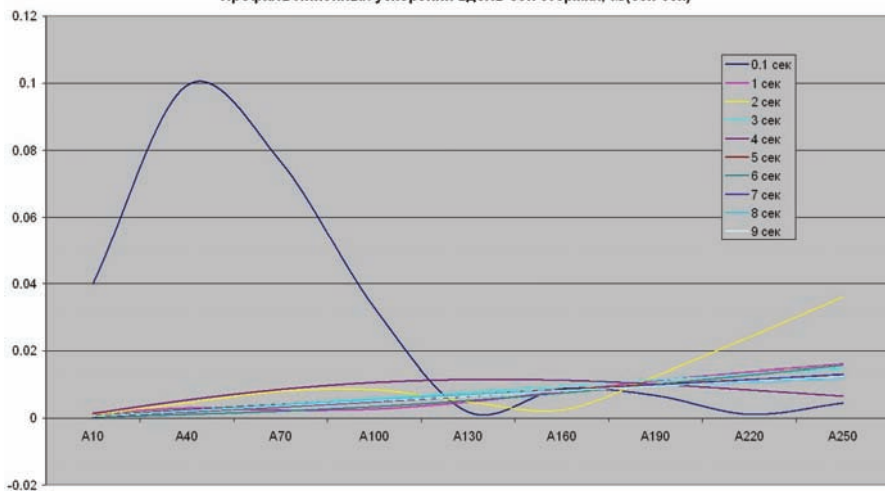


Рисунок 10 – Профиль линейных ускорений вдоль оси стержня

Список литературы: **1.** Rankin, C. C., Brogan, F. A. An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations // Journal of Pressure Vessel Technology. – Vol. 108. – PP. 165-174 (May 1986). **2.** Bathe, K. J. Finite Element Procedures. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1996). **3.** Chung, J., Hulbert, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method // Journal of Applied Mechanics. – Vol. 60. – PP. 371 (1993).

Поступила в редколлегию 23.06.2011