

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, докт. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ассистент, НТУ «ХПИ»

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО СЕПАРИРУЕМОГО СЛОЯ ЗЕРНА НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

В функциях Кельвина від'ємного індексу отримано розв'язок задачі про коливання швидкості потоку зернової суміші, вібров'язкість якої є лінійною функцією координати, яка нормальна до площини нахиленого віброрешета. Виведені формули апробовані розрахунками.

In the Kelvin functions of negative index is used to solve the oscillation problem of a flow rate of grain mixture, vibroviscosity which is a linear function of the coordinate normal to the plane of oblique vibrose. Derived formulas tested by calculations.

В функциях Кельвина отрицательного индекса получено решение задачи о колебании скорости потока зерновой смеси, вибровязкость которой является линейной функцией координаты, нормальная к плоскости наклоненного виброрешета. Выведены формулы апробированы расчетами.

Постановка проблемы. Повышение эффективности виброрешетного разделения зерновых материалов связано с установлением закономерностей движения их по направляющим перфорированным поверхностям. Несмотря на определенные достижения в этой области, остается малоизученным распределение вибрационных полей в движущихся зерновых средах. Имеющиеся исследования касаются в основном движения отдельной частицы или тела по вибрирующей поверхности без учета взаимодействия их с окружающей средой. Поэтому изучение распространения колебаний от виброрешет в массив сыпучей среды имеет важное научно-прикладное значение ибо от них зависят процессы сегрегации и просеивания на решетке.

Анализ последних исследований и публикаций. Колебания скорости движения неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете, как слоя вязкой жидкости, без учета разделения смеси на фракции, рассматривались в [1,2,3]. Аналогичную задачу для линейно-неоднородного слоя, но с учетом разделения зернового материала на проходovou и сходовую фракции, решали в [4,5]. Влияние просеивания проходовой фракции на колебания скорости потока учитывали конвективным членом в уравнении гидродинамики. Вводилась также поправка на уменьшение толщины движущегося слоя, вследствие отделения части зерна на перфорированной поверхности виброрешета. Здесь предложен другой вариант решения этой краевой задачи гидродинамики. Благодаря использованию функций Кельвина отрицательного индекса, который ранее брали положительным, построено более компактное решение и на его основе получены новые формулы для расчета скорости движения смеси и производительности наклонного виброрешета в установившемся режиме его работы.

Целью данного исследования является вывод и апробация расчетами

формулы для теоретического определения скорости потока плоского слоя зерновой смеси, переменной вибровязкости, с учетом колебаний скорости, вызванных продольными вибрациями решета в плоскости наибольшего ската, а также определения производительностей решета по сходовой и проходовой фракциям в стационарном режиме.

Изложение основного материала. Следуя публикациям [4,5], проекцию скорости потока смеси на ось $0x$ (см. рис. 1) описываем выражением

$$u(y,t) = \frac{g \sin \theta}{a_*(1-s)} (h-y) + u_2(y,t), \quad (1)$$

где $u_2(y,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1-s}{y} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{a_* y} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

при граничных условиях:

$$u_2(h,t) = A^* \omega \sin(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} < \infty. \quad (3)$$

В (1), (2), (3):

$$s = \varepsilon v_{\perp} a_*^{-1} < 1,$$

ε – коэффициент «живого сечения» решета; v_{\perp} – нормальная проекция скорости просеивания зерен через отверстия; g – ускорение свободного падения; θ – угол наклона виброрешета к горизонту; h – толщина движущегося слоя; A^* , ω – амплитуда и частота продольных вибраций решета в плоскости наибольшего ската; a_* – коэффициент пропорциональности в линейном изменении эффективной кинематической вибровязкости смеси по y :

$$v(y) = a_* y.$$

Множитель a_* зависит от механико-технологических характеристик зерновой смеси и параметров вибраций решета. Формулы для его вычисления опубликованы в [1,2].

Система координат и расчетная схема показаны на рис. 1.

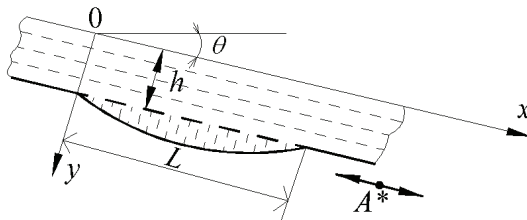


Рисунок 1 – Расчетная схема виброрешета с зерновым слоем

Согласно изложенной постановке задачи, в установившемся режиме движения, проекция скорости потока u на ось $0x$ не зависит от x , а проекция

скорости потока $v = \varepsilon v_{II}$ на ось Oy является постоянной величиной. При таких упрощениях выполняется условие неразрывности потока (несжимаемости жидкости [6])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$u_2(y, t) = \text{Im}[w(y) \exp(i\omega t)] = \text{Im} w(y) \cos(\omega t) + \text{Re} w(y) \sin(\omega t), \quad (4)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Согласно (2), (3), комплексная функция вещественного аргумента $w(y)$ является решением краевой задачи:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1-s}{y} \frac{dw}{dy} - \frac{i\omega}{a_* y} = 0; \quad (5)$$

$$\text{Re} w(h) = A^* \omega; \quad \text{Im} w(h) = 0. \quad (6)$$

Общее решение (5) выражается суммой [7]

$$w(y) = \xi^s \left[(c_1 + ic_2) e^{-i\frac{s\pi}{2}} I_{-s} \left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + (c_3 + ic_4) e^{i\frac{s\pi}{2}} I_s \left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right], \quad (7)$$

в которой $\xi = 2\sqrt{\omega y a_*^{-1}}$; $I_{\pm}(z)$ – модифицированная функция Бесселя соответственно отрицательного и положительного индекса s ; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Используя формулу дифференцирования цилиндрической функции [7]

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^s I_s(\xi)] = \xi^s I_{s-1}(\xi),$$

а также асимптотику поведения производной при малом значении аргумента [7]

$$\xi^s I_{s-1}(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^s}{\Gamma(s)} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{1-2s},$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция, убеждаемся, что ограниченность производной в (3) будет выполнена когда $c_3 = c_4 = 0$.

Таким образом, отличные от нуля в (7) только c_1 и c_2 .

Цилиндрическая функция комплексного аргумента выражается через функции Кельвина вещественного аргумента $ber_{-s}(\xi)$ и $bei_{-s}(\xi)$ соотношением [7]

$$I_{-s} \left(\xi e^{i\frac{s\pi}{4}} \right) = e^{i\frac{s\pi}{2}} [ber_{-s}(\xi) + i bei_{-s}(\xi)],$$

а общее решение (7) преобразуется в

$$w(y) = \xi^s (c_1 + ic_2) [ber_{-s}(\xi) + i bei_{-s}(\xi)].$$

Его вещественной и мнимой частями являются:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w(y) &= \xi^s [c_1 ber_{-s}(\xi) - c_2 bei_{-s}(\xi)]; \\ \operatorname{Im} w(y) &= \xi^s [c_1 bei_{-s}(\xi) + c_2 ber_{-s}(\xi)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия (6) выполняются, когда

$$\begin{aligned} c_1 ber_{-s}(\eta) - c_2 bei_{-s}(\eta) &= \eta^{-s} A^* \omega; \\ c_1 bei_{-s}(\eta) + c_2 ber_{-s}(\eta) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

причем $\eta = 2\sqrt{\omega h a_*^{-1}}$.

Из системы (9) определяем константы:

$$\begin{aligned} c_1 &= A^* \omega \frac{\eta^{-s} ber_{-s}(\eta)}{ber_{-s}^2(\eta) + bei_{-s}^2(\eta)}; \\ c_2 &= -A^* \omega \frac{\eta^{-s} bei_{-s}(\eta)}{ber_{-s}^2(\eta) + bei_{-s}^2(\eta)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая их, а также (1), (4) и (8), проекцию скорости потока смеси на ось Ox представляем выражением:

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \frac{g \sin \theta}{a_*(1-s)} (h-y) + \xi^s [c_1 bei_{-s}(\xi) + c_2 ber_{-s}(\xi)] \times \\ &\times \cos(\omega t) + \xi^s [c_1 ber_{-s}(\xi) - c_2 bei_{-s}(\xi)] \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Оно более компактно, чем решения в работах [4,5].

Без учета просеивания проходовой фракции $v_{II} = s = 0$ и формулы (10) и (11) совпадают с теми, что опубликованы в [1,2].

Решение (11) имеет неопределенность вида $|0 \cdot \infty|$ при $y \rightarrow 0$ или $\xi \rightarrow 0$. Она легко раскрывается с помощью предельных соотношений:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s \cdot \begin{bmatrix} ber_{-s}(\xi) \\ bei_{-s}(\xi) \end{bmatrix} = \frac{2^s}{\Gamma(1-s)} \begin{bmatrix} \cos \frac{3s\pi}{4} \\ -\sin \frac{3s\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

В результате, вычисление скорости на свободной поверхности слоя сводится к формуле

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{gh \sin \theta}{a_*(1-s)} + \frac{2^s}{\Gamma(1-s)} \left[\left(c_2 \cos \frac{3s\pi}{4} - c_1 \sin \frac{3s\pi}{4} \right) \cos(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(c_1 \cos \frac{3s\pi}{4} + c_2 \sin \frac{3s\pi}{4} \right) \sin(\omega t) \right]. \end{aligned}$$

При $s = 0$ она переходит в результаты, опубликованные в [1,2].

Удельную, приходящуюся на единицу ширины решета, производитель-

ность по сходовой фракции находим интегрированием

$$\bar{Q}_c = \frac{gh^2 \sin \theta}{2a_*(1-s)} + \frac{a_*}{2\omega} \int_0^\eta \xi^{s+1} \left\{ bei_{-s}(\xi) [c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)] + ber_{-s}(\xi) [c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)] \right\} d\xi.$$

Поскольку [7]

$$\int \xi^{s+1} \cdot \begin{bmatrix} bei_{-s}(\xi) \\ ber_{-s}(\xi) \end{bmatrix} d\xi = \frac{\xi^{s+1}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} bei_{-s-1}(\xi) + ber_{-s-1}(\xi) \\ ber_{-s-1}(\xi) - bei_{-s-1}(\xi) \end{bmatrix},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{s+1} \cdot \begin{bmatrix} ber_{-s-1}(\eta) \\ bei_{-s-1}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{2^{s+1}}{\Gamma(-s)} \begin{bmatrix} \cos \frac{3(s+1)\pi}{4} \\ -\sin \frac{3(s+1)\pi}{4} \end{bmatrix},$$

то

$$\bar{Q}_c = \frac{gh^2 \sin \theta}{2a_*(1-s)} + \frac{a_* \eta^{s+1}}{2\sqrt{2}\omega} \left\{ \begin{aligned} &ber_{-s-1}(\eta) + bei_{-s-1}(\eta) + \frac{2^{s+1}}{\Gamma(-s)} \cdot \sqrt{2} \eta^{-s-1} \cos \frac{3s\pi}{4} \\ &\times [c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)] + [ber_{-s-1}(\eta) - bei_{-s-1}(\eta) + \\ &+ \frac{2^{s+1}}{\Gamma(-s)} \cdot \sqrt{2} \eta^{-s-1} \cos \frac{3s\pi}{4}] \cdot [c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Производительность решета по сходовой фракции также выражается с помощью функций Кельвина отрицательного индекса.

Формула (12) более компактна, чем выражения \bar{Q}_c в [4,5].

Учитывая, что $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(-s) = \infty$, $ber_{-1}(\eta) = -ber_1(\eta)$, $bei_{-1}(\eta) = -bei_1(\eta)$, из

(12) предельным переходом $s \rightarrow 0$ получаем формулу, которая опубликована в [1,2], без учета просеивания смеси на решетке.

Удельная производительность решета по проходовой фракции пропорциональна v_{II} и равна

$$\bar{Q}_{II} = L\varepsilon v_{II},$$

где L – длина перфорированной поверхности решета.

При учете разделения фракций, аналогично [5], вводим поправку на уменьшение толщины движущегося слоя. Пренебрегая изменением h по длине решета, принимаем в среднем

$$h \approx \sqrt{h_0^2 - \frac{L\varepsilon v_{II} a_*}{g \sin \theta}},$$

где h_0 – толщина слоя, с которой смесь поступает на перфорированную поверхность.

Без учета разделения фракций $h = h_0$.

Результаты расчета и выводы. Для сравнения результатов, к которым приводят различные варианты решения граничной задачи, брали исходные данные работы [4]: плотность зерновой смеси $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$, коэффициент внутреннего сухого трения в смеси $f = 0,47$; эквивалентная масса одного зерна $M = 0,00004 \text{ кг}$; эквивалентный радиус зерна $r_0 = 0,001825 \text{ м}$; $h_0 = 0,006 \text{ м}$; $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 0,3$; $L = 0,79 \text{ м}$. Вычисленное по формулам [1]:

$$a_* = \frac{b}{6\omega r_0 \sqrt{(2A^*)^2 - (\delta b \rho h)^2}}; \quad \delta = \frac{\pi}{4M\omega^2}; \quad b = 0,7f(\pi r_0)^2 g \cos \theta,$$

при указанных исходных данных, значение $a_* = 0,0164 \text{ м/с}$. Рассчитанные $u(y,t)$ по (11) при $v_{II} = 0,003 \text{ м/с}$ записаны в табл. 1.

Для сравнения на рис. 2 показаны графики изменения $u(y,t)$, полученные в работе [4] с помощью более громоздких решений. Легко убедиться, что проекции скорости, указанные в четырех колонках табл. 1, по сути являются точками соответствующих графиков на рис. 2.

Чтобы оценить влияние просеивания проходовой фракции на скорость потока смеси, в табл. 2 указаны $u(y,t)$, вычисленные по формуле (11) при $v_{II} = 0,006 \text{ м/с}$ (числители) и $v_{II} = 0$ (знаменатели). Наблюдаются существенные расхождения в результатах расчета. В отдельных случаях $u(y,t)$ отличаются не только величиной, а и знаками. У свободной поверхности слоя ($y \rightarrow 0$) при учете просеивания скорость потока существенно меньше, чем без учета его.

Таблица 1 – Значения $u(y,t)$ при $v_{II} = 0,003 \text{ м/с}$

$\frac{\omega t}{\pi}$	$10u(y,t), \text{ м/с}$				
	$yh^{-1} = 0,1$	$yh^{-1} = 0,25$	$yh^{-1} = 0,5$	$yh^{-1} = 0,75$	$yh^{-1} = 1$
0,0	2,402	1,728	0,438	-0,413	0,000
0,25	2,261	1,591	0,769	0,868	2,220
0,50	2,170	1,668	1,414	2,023	3,140
0,75	2,184	1,914	1,994	2,375	2,220
1,00	2,293	2,185	2,171	1,718	0,000
1,25	2,434	2,322	1,840	0,436	-2,220
1,50	2,525	2,245	1,195	-0,719	-3,140
1,75	2,512	1,999	0,614	-1,071	-2,220
1,90	2,454	1,828	0,446	-0,784	-0,970

Распределения $u(y,t)$ по толщине слоя для двух моментов времени $t = 0$ и $\omega t = 0,6\pi$ представлены на рис. 3. Сплошные линии соответствуют $v_{II} = 0,005 \text{ м/с}$, а пунктирные – $v_{II} = 0$.

Расчет показывает, что просеивание оказывает заметное влияние и на профиль скорости, который меняется с течением времени. Без учета колеба-

ний [1,5] профиль скорости потока зерновой смеси по решетке в установившемся режиме движения не зависит от t .

Таблица 2 – Значения $u(y,t)$ при $v_{II} = 0,006$ м/с (числители) и $v_{II} = 0$ (знаменатели)

$\frac{\omega t}{\pi}$	10 $u(y,t)$, м/с				
	$yh^{-1} = 0,1$	$yh^{-1} = 0,25$	$yh^{-1} = 0,5$	$yh^{-1} = 0,75$	$yh^{-1} = 1$
0,0	1,425	0,757	-0,187	-0,555	0,000
	2,898	2,246	0,824	-0,308	0,000
0,25	1,222	0,752	0,461	0,947	2,220
	2,805	2,090	1,011	0,849	2,220
0,50	1,216	1,067	1,345	2,147	3,140
	2,717	2,083	1,522	1,967	3,140
0,75	1,409	1,517	1,948	2,343	2,220
	2,687	2,231	2,058	2,391	2,220
1,00	1,688	1,838	1,917	1,420	0,000
	2,732	2,446	2,305	1,872	0,000
1,25	1,891	1,842	1,269	-0,082	-2,220
	2,826	2,602	2,117	0,715	-2,220
1,50	1,898	1,527	0,384	-1,282	-3,140
	2,913	2,609	1,606	-0,403	-3,140
1,75	1,705	1,078	-0,219	-1,478	-2,220
	2,943	2,461	1,070	-0,827	-2,220
1,90	1,537	0,854	-0,284	-1,037	-0,970
	2,925	2,332	0,873	-0,621	-0,970

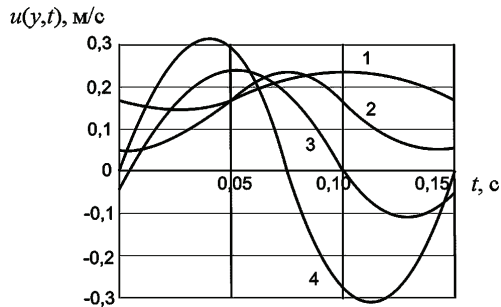


Рисунок 2 – Графики колебаний скорости потока при $v_{II} = 0,003$ м/с и разных y

Таким образом, изложенная теория позволяет рассчитывать вибрационное поле в неоднородном слое зерновой смеси, вызванное продольными колебаниями наклонного виброрешета с учетом разделения смеси на проходную и сходовую фракции.

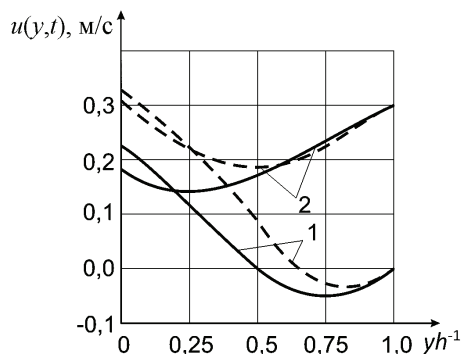


Рисунок 3 – Профили скорости: 1 – $\omega t = 0$; 2 – $\omega t = 0,6\pi$

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Х.: Миськдрук, 2010. – 174 с. 2. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Колебания неоднородного зернового потока на виброрешетках // Вібрації в техніці та технологіях. – 2010. – № 4 (60). – С. 138-143. 3. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Колебания скорости вибротранспортирования решетом неоднородного слоя зерновой смеси // Транспортное машиностроение. Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ, 2010. – Вып. 38. – С. 134-139. 4. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10, т. 7. – С. 32-42. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Виброрешетная сепарация зерновых смесей. – Х.: Миськдрук, 2011. – 280 с. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 7. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 05.05.2011