

А. МОВАГГАР, аспирант, НТУ «ХПИ»;
Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СТЕКЛОВОЛОКОННОГО КОМПОЗИТА

Метою цієї роботи є побудова енергетичної моделі анізотропної пошкоджуваності для прогнозування втомлісної міцності та оцінки накопичених пошкоджень в композиційних матеріалах. У роботі міра пошкоджуваності представляється симетричним тензором другого рангу. Прийнята гіпотеза, що швидкість накопичення пошкоджень залежить від енергії пружної деформації композиту. Параметри енергетичної моделі, які визначають швидкість накопичення пошкоджень, знаходять за результатами експериментів в втомлісну міцність зразків із скловолоконного композиту СТЕФ-1. Показано, що запропонований варіант теорії добре відображає процес накопичення втомлісних пошкоджень та руйнування склопластика.

The purpose of this paper is to introduce an energy-based anisotropic damage model for predicting fatigue life and evaluation of progressive damage in composite materials. In this work we postulate that the damage state is sufficiently described by the second-rank symmetric damage tensor. The model is based on the assumption that the damage growth rate in composite materials depends on the value of elastic strain energy. The model parameters, which determine the damage accumulation rate, were established by the results of fatigue experiments of glass fabric laminates STEF-1. It is shown that the proposed theory reflects well fatigue damage accumulation process and fracture of glass fiber composite.

Целью настоящей работы является построение энергетической модели анизотропной повреждаемости для предсказания усталостной прочности и оценки накопленных повреждений в композиционных материалах. В работе мера повреждаемости представляется симметричным тензором второго ранга. Принимается гипотеза о том, что скорость накопления повреждений зависит от энергии упругого деформирования композита. Параметры энергетической модели, определяющей скорость накопления повреждений, находились по результатам экспериментов на усталостную прочность образцов из стекловолоконного композита СТЭФ-1. Показано, что предложенный вариант теории хорошо отражает процесс накопления усталостных повреждений и разрушение стеклопластика.

1 Введение. Исследование усталостного поведения армированных композитных материалов и, в частности, выявления особенностей их сопротивления деформациям и разрушению представляет большой научный и практический интерес, обусловленный непрерывным ростом объемов производства и расширением областей применения композитов в быстроразвивающихся отраслях современной техники. Приобретают приоритетное значение исследования, направленные на установление закономерностей возникновения и развития различного рода усталостных механических повреждений, накопление которых во времени может привести не только к снижению значений характеристик надежности конструкций и элементов, но и стать причиной преждевременного истощения их несущей способности и разрушения.

Благодаря быстрому развитию механики континуальных повреждений, сравнительно нового направления механики деформируемого твердого тела, предложен широкий спектр моделей повреждаемости в композитах при раз-

личных условиях нагружения. Тем не менее, они не лишены противоречий, связанных, в частности, с определением зарождения трещины в матрице, условий роста микродефектов, разрушение волокна, отслаивание по границам раздела матрицы и волокна, формулировкой критериев разрушения. Остается открытым вопрос о количественной оценке накопления усталостных повреждений в реальных конструкциях из композитов [1].

В данной работе представлены результаты исследований усталостной прочности и оценки накопленных повреждений стекловолоконного композита СТЭФ-1. Экспериментальные результаты по усталостному разрушению были обработаны по методу наименьших квадратов и найдены параметры энергетической модели усталостного повреждения композиционного материала.

2 Концепция эффективных напряжений. Математическое моделирование анизотропной поврежденности материалов и, в частности композитов, являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий. Под поврежденностью понимается уменьшение эффективной площади плоского элемента, нормального вектору n , передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений [2].

Классические представления о поврежденности связаны с так называемым геометрическим подходом, который позволяет довольно просто учесть анизотропию состояния поврежденности. При помощи этого подхода эффект возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями представляется с помощью понятия эффективного напряжений.

При актуальном состоянии поврежденности, вследствие распределенных микродефектов передающая нагрузку от одной части тела на другую эффективная площадь элементов $\delta\tilde{S}$ оказывается меньше, чем площади этого элемента без учета его поврежденности δS , таким образом:

$$(I_{ij} - D_{ij})n_j \delta S = \tilde{n}_j \delta \tilde{S}, \quad (1)$$

где I_{ij} – единичный тензор второго ранга, D_{ij} – тензор повреждаемости второго ранга.

По определению тензор эффективных напряжений в случае анизотропного повреждения вводится следующим образом [3]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} (I_{kj} - D_{kj})n_k = \sigma_{ij}n_j. \quad (2)$$

Тензор эффективных напряжений, в общем случае, не является симметричным, что вызвано различием в ориентации главных осей тензора напряжений и тензора повреждаемости. Симметричную форму эффективных напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ для совместимости с рамками термодинамики можно получить следующим образом [3]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \left[(\delta_{ik} - D_{ik})^{-1} \sigma_{kl} \delta_{jl} + \delta_{ik} \sigma_{kl} (\delta_{jl} - D_{jl})^{-1} \right]. \quad (3)$$

Второй закон термодинамики применяется в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0, \quad (4)$$

где \vec{q} – вектор плотности теплового потока, направленный наружу по отношению к телу, ψ – плотность свободной энергии и s – плотность энтропии. Так как плотность свободной энергии является для упругого материала функцией компонентов тензора деформации ε_{ij}^e , температуры T и повреждаемости D [3], то:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij}. \quad (5)$$

При постановке этого выражения во второй закон термодинамики (4), неравенство Клаузиуса-Дюгема представляется в виде:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{\partial \psi}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0. \quad (6)$$

С введением эффективного напряжения при анизотропной повреждаемости и принципом эквивалентности деформации, потенциал Гельмгольца можно написать как:

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (I_{ij} - D_{ij}) a_{imkl} \varepsilon_{jm}^e \varepsilon_{kl}^e, \quad (7)$$

где a_{imkl} – тензор упругих постоянных материала. При этом физические соотношения упругого деформирования с учетом повреждаемости для изотермического процесса имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (I_{ij} - D_{ij}) a_{rskl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (8)$$

Термодинамика необратимых процессов определяет сопряженную с повреждаемостью переменную Y_{ij} , таким образом, что произведение $Y \cdot \dot{D} \geq 0$ определяет энергию, рассеянную в процессе повреждения [4]:

$$Y_{ij} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D_{ij}} = \frac{1}{2} a_{imkl} \varepsilon_{jm}^e \varepsilon_{kl}^e. \quad (9)$$

Вследствие положительно-определенности функции Y_{ij} , неравенство Клаузиуса-Дюгема для изотермического процесса будет выполняться при отрицательных значениях скорости повреждаемости $\dot{D}_{ij} \geq 0$.

3 Определяющие соотношения развития анизотропной повреждаемости композита. В предложенной анизотропной модели принимается гипотеза о том, что скорость накопления повреждений в композите зависит от максимальной энергии за цикл упругой деформации композита W_e , параметра цикла R , текущего уровня повреждения и действительного напряжения, тогда:

$$\frac{dD_{ij}}{dN} = f(W_e, R, D_{ij}, \sigma_{ij}). \quad (10)$$

Предполагается, что существует степенная зависимость между скоростью накопления усталостных повреждений и энергией упругой деформации композита, тогда модель представляется в виде [5]:

$$\dot{D}_{ij} = k(R) \cdot (W_e)^n \cdot M_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}. \quad (11)$$

При плоском напряженном состоянии кинетическое уравнение повреждаемости (11) упрощается и можно переписать его в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} \dot{d}_{11} \\ \dot{d}_{22} \\ \dot{d}_{12} \end{pmatrix} = k(R) \cdot (W_e)^n \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где W_e – максимальная энергия упругой деформации, m_{ij} , n – константы, определяющие скорость накопления повреждений, которые устанавливаются по результатам экспериментов на усталостную прочность и $k(R)$ – функция, которая зависит от параметра цикла. При одновременном действии всех трех напряжений при плоском напряженном состоянии разрушение происходит, когда выполняется условие:

$$W_e \rightarrow \infty. \quad (13)$$

4 Сопоставление теоретических значений с экспериментальными данными. В случае одноосного напряженного состояния и при стационарном цикле изменения напряжений зависимость параметра повреждаемости от количества циклов выглядит как:

$$d_{ii} = 1 - \left(- \frac{(n+2) \cdot m_{ii} \cdot k(R) \cdot (\sigma_{ii})^{2n+1}}{2^n \cdot E^n} \cdot N + 1 \right)^{\frac{1}{n+2}}, \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

где E – модуль упругости соответствующего направления.

Физико-механические свойства стеклотекстолита марки СТЭФ-1 приведены в таблице.

Физико-механические свойства листового стеклотекстолита марки СТЭФ-1

Модуль упругости, (МПа)	Вдоль основы	5620
	Вдоль утка	4590
	По диагонали (45°)	1440
Коэффициент Пуассона	Вдоль основы	0,22
	Вдоль утка	0,18

Теоретическое значение параметра повреждаемости d_{12} определяется после поворота системы координат вокруг одной из главных осей ортотропии на 45°. При повороте осей координат компоненты тензора повреждаемости D_{ij} и характеристики материала изменяются по формулам преобразования компонентов тензоров [6]:

$$T'_{ijkl} = T_{mnrp} l_{im} l_{jn} l_{kr} l_{lp}. \quad (15)$$

После преобразования находится значение d_{12} :

$$d_{12} = 1 - \left(-(0,71 \cdot n + 2) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71n} \cdot \left(2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4} \right) \cdot (\sigma_{12})^{1,42n+1} \cdot N + 1 \right)^{\frac{1}{n \cdot 0,71+2}}. \quad (16)$$

Интервал изменения параметра повреждаемости близкий к единице, $0,9 < D_{kp} < 1$ соответствует незначительному числу циклов. Это позволяет определять $S - N$ зависимость в случае одноосного напряженного состояния, интегрируя соотношение (14) в пределах от 0 до 1:

$$\sigma_{ii} = \left(\frac{2^n \cdot E^n}{(n+2) \cdot m_{ii} \cdot k(R)} \cdot \frac{1}{N_f} \right)^{\frac{1}{2n+1}}, \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

где N_f – соответствует числу циклов до разрушения.

Соответственно определяются теоретические значения разрушающих напряжений образцов, вырезанных под 45 градусов:

$$\sigma_{12} = \left(\frac{1}{(0,71 \cdot n + 2) \cdot k(R) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71n} \cdot \left(2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4} \right) \cdot \frac{1}{N_f}} \right)^{\frac{1}{1,42n+1}}. \quad (18)$$

Экспериментальные результаты по усталостному разрушению образцов были обработаны по методу наименьших квадратов для определения компонентов тензора повреждаемости m_{ij} и константы n . Эта задача сводится к нахождению численных значений параметров m_{ij} и n , при которых функция Q достигает своего минимума:

$$Q(m_{ij}, n, E_1, E_2, E_3) = \sum_{i=1}^n [\sigma_{i1}(N_{i1}) - F(N_i, E_1, m_{11}, n)]^2 + \sum_{i=1}^n [\sigma_{i2}(N_{i2}) - F(N_i, E_2, m_{22}, n)]^2 + \sum_{i=1}^n [\sigma_{i3}(N_{i3}) - F(N_i, E_3, m_{12}, n)]^2. \quad (19)$$

Функция F представляет собой степенную зависимость, тогда при фиксированном значении параметра цикла $k(R) = 1$ функция Q принимает вид:

$$Q = \sum_{i=1}^{30} \left[\sigma_{i1} - \left(\frac{2^n \cdot E_1^n}{(n+2) \cdot m_{11}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot N_1^{\frac{-1}{2n+1}} \right]^2 + \sum_{i=1}^{30} \left[\sigma_{i2} - \left(\frac{2^n \cdot E_2^n}{(n+2) \cdot m_{22}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot N_2^{\frac{-1}{2n+1}} \right]^2 + \sum_{i=1}^{30} \left[\sigma_{i3} - \left(\frac{1}{(0,71 \cdot n + 2) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71n} \cdot \left(2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4} \right)} \right)^{\frac{1}{1,42n+1}} \cdot N_3^{\frac{-1}{1,42n+1}} \right]^2. \quad (20)$$

Прологарифмируем функцию F и введем новую переменную $t = \ln N$, тогда Q будет функцией от t .

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{30} \left(\ln \sigma_{i1} - \left(\frac{n}{2n+1} \ln E_1 + \frac{1}{2n+1} \ln \frac{2^n}{m_{11} \cdot (n+2)} - \frac{1}{2n+1} t_{i1} \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{30} \left(\ln \sigma_{i2} - \left(\frac{n}{2n+1} \ln E_2 + \frac{1}{2n+1} \ln \frac{2^n}{m_{22} \cdot (n+2)} - \frac{1}{2n+1} t_{i2} \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{30} \left(\ln \sigma_{i3} - \left(\frac{1}{1,42 \cdot n + 1} \ln \frac{1}{(0,71 \cdot n + 2) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71n} \cdot \left(2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4} \right)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{1,42 \cdot n + 1} t_{i3} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим

$$a_1 = \frac{n}{2n+1} \ln E_1 + \frac{1}{2n+1} \ln \left(\frac{2^n}{m_{11} \cdot (n+2)} \right);$$

$$a_2 = \frac{n}{2n+1} \ln E_2 + \frac{1}{2n+1} \ln \left(\frac{2^n}{m_{22} \cdot (n+2)} \right);$$

$$a_3 = \frac{1}{1,42 \cdot n + 1} \ln \left(\frac{1}{(0,71 \cdot n + 2) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71n} \cdot \left(2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4} \right)} \right);$$

$b = -\frac{1}{2n+1}$, тогда для функции остаточных ошибок имеем:

$$Q' = \sum_{i=1}^{30} (\ln \sigma_{i1} - (a_1 + b t_{i1}))^2 + \sum_{i=1}^{30} (\ln \sigma_{i2} - (a_2 + b t_{i2}))^2 + \sum_{i=1}^{30} (\ln \sigma_{i3} - (a_3 + b t_{i3}))^2. \quad (22)$$

Условие минимума функции Q' сводится к системе четырех уравнений для определения неизвестных a_1, a_2, a_3 и b :

$$\frac{\partial Q'}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial Q'}{\partial b} = 0. \quad (23)$$

Обработка результатов экспериментов над образцами дала следующие значения констант:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1,861 \cdot 10^{-31} & 0 & 0 \\ 0 & 7,57 \cdot 10^{-31} & 0 \\ 0 & 0 & 2,447 \cdot 10^{-25} \end{pmatrix} (\text{Па})^{-n}, \quad n = 2,776. \quad (24)$$

Поставляя полученные значения m_{ij} и n в кинетическое уравнение (17) и (18), получим три $S-N$ кривые для предсказания усталостной долговечности:

$$\sigma_1(N_1) = \left(\frac{2^n \cdot E_1^n \cdot 1}{(n+2) \cdot m_{11} \cdot N_{f1}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} ; \quad \sigma_2(N_2) = \left(\frac{2^n \cdot E_2^n \cdot 1}{(n+2) \cdot m_{22} \cdot N_{f2}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} ;$$

$$\sigma_3(N_3) = \left[\frac{1}{(0,71 \cdot n + 2) \cdot (3,374 \cdot 10^{-10})^{0,71 \cdot n} \cdot (2,358 \cdot 10^{-31} + \frac{m_{12}}{4}) \cdot N_{f3}} \cdot \frac{1}{N_{f3}} \right]^{\frac{1}{1,42 \cdot n + 1}} \quad (25)$$

Теоретические $S-N$ зависимости при нагружении образцов, вырезанных в направлении прямолинейных волокон основы, утка и по диагонали листа стеклопластика имеют вид:

После определения неизвестных параметров m_{ij} и n , входящих в кинетическое уравнение (12), можно определить количественную оценку повреждаемости.

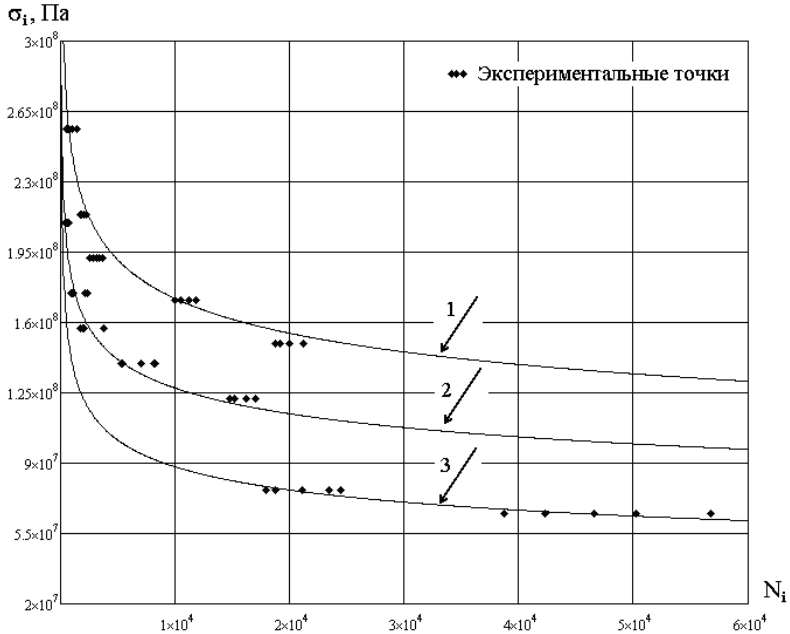


Рисунок 1 – 1 – Кривая усталости образцов, вырезанных вдоль основы, 2 – вдоль утка и 3 – по диагонали

На рис. 2 приведены графики роста параметров повреждаемости в зависи-

мости от числа циклов до разрушения. Кривые построены интегрированием кинетического уравнения при одинаковом значении амплитудного напряжения, например $\sigma = 1,5 \cdot 10^8$ МПа и при фиксированном значении параметра цикла $k(R) = 1$ для образцов, вырезанных вдоль основы 1, утка 2 и по диагонали 3.

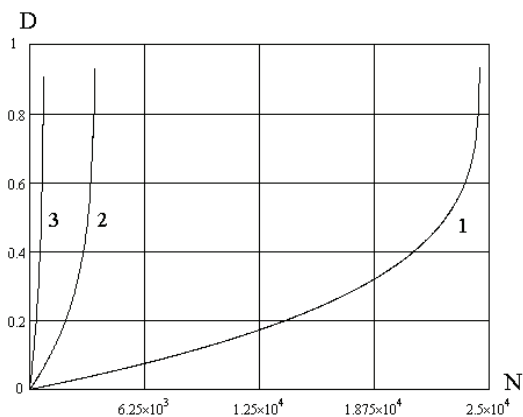


Рисунок 2 – Изменение параметра повреждаемости образцов, вырезанных вдоль основы 1, утка 2 и по диагонали 3

5 Заключение. В данной работе представлена континуальная модель накопления усталостных анизотропных повреждений, основанная на предположении о том, что скорость роста параметров повреждения зависит от максимального значения энергии упругого деформирования композита и от текущего уровня повреждения и действительного напряжения.

Для идентификации параметров энергетической анизотропной модели, использованы результаты экспериментальных исследований, полученных при усталостных испытаниях образцов, вырезанных вдоль основы, утка и по диагонали листового стеклотекстолита марки СТЭФ-1. Показано, что предложенный вариант теории хорошо отражает процесс накопления усталостных анизотропных повреждений и разрушение образцов из стеклопластика.

Список литературы: 1. Композиционные материалы в 8 т. / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – Том 5. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 483 с. 2. *Kachanov L. M.* Introduction to Continuum Damage Mechanics. – М. Nijhoff Publ., Dordrecht, 1986. – 148 p. 3. *Lemaitre J.* A course on damage mechanics. – Springer edition, 1996. – 228 p. 4. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. – Berlin, Springer edition, 2005. – 380 p. 5. *Моваггар А., Львов Г. И.* Энергетическая модель усталостной прочности композиционных материалов // Тематический выпуск Вестника НТУ «ХПИ» «Динамика и прочность машин». – Х.: НТУ «ХПИ», 2010. – № 37. – С. 111-122. 6. *Ашкенazi Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник, – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

Поступила в редколлегию 21.09.2011