

*А.В.ВОРОПАЙ*, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ, Харьков

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С АМОРТИЗАТОРОМ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-опертою по контуру та погашувача коливань. На пластину діє нестационарне навантаження, що збуджує коливання. Викладаються результати розв'язку задачі ідентифікації невідомого навантаження. Розрахунки зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А.М.Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and vibration absorber. The non-stationary concentrated load, which initiates vibration, is acting on the plate. The results of unknown load's identification are presented. The problems are reduced to the system of first-kind Volterra integral equations, which is solved numerically with using of Tikhonov's regularization method.

Механическая система состоит из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно опертой по контуру и гасителя колебаний. На пластину действует нестационарная нагрузка, вызывающая колебания. Изложены результаты решения задачи идентификации неизвестной нагрузки. Расчеты сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А.М.Тихонова.

**Введение.** Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении.

Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [1] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [2] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе рассматриваются нестационарные колебания механической системы, состоящей из прямоугольной пластины, на которой в некоторой точке установлен амортизатор. Для решения подобных задач удобно использовать следующий подход – воздействие амортизатора на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, приложенной к пластине в месте установки гасителя. Тогда задача сводится к идентификации этой неизвестной нагрузки, определяемой на базе теории интегральных уравнений Вольтерра, что позволяет получить аналитико-численное решение.

**1. Постановка задачи.** Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и амортизатора, контактирующего с пластиной в некоторой точке (рис. 1). Считается, что амортизатор установлен ортогонально срединной плоскости пластины, а перемещение его штока полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где он находится, то есть  $w_D(t) = w(x_D, y_D, t)$ . Сила сопротивления амортизатора пропорциональна скорости его штока:

$$R(t) = \kappa \cdot \frac{dw_D(x_D, y_D, t)}{dt},$$

где  $\kappa$  – коэффициент демпфирования.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка  $P(t)$ , вызывающая нестационарные колебания пластины с амортизатором. В прямой задаче требуется определить компоненты перемещения во времени точек пластины (прогибы и углы поворота нормали).

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки амортизатора произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина коэффициента демпфирования.

**2. Решение прямой задачи.** В рамках теории пластин С. П. Тимошенко система дифференциальных уравнений [3], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с установленным на ней гасителем колебаний, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} G' h (\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(t) \delta(x - x_D) \delta(y - y_D); \\ D \nabla^2 \psi_{xy} - G' h (\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1 - \nu) \nabla^2 \varphi_{xy} + (1 + \nu) \nabla_1^2 \psi_{xy}] - G' h (\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R(\tau)}{\kappa} d\tau, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $h$  – толщина пластины;  $G' = k'G$ ;  $k'$  – коэффициент сдвига;  $I = h^3/12$ ;  $w$  – прогиб срединной плоскости пластины;  $\psi_x, \psi_y$  – углы поворота;  $\rho, E, \nu$  – упругие постоянные материала пластины;  $t$  – время,  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ ;

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

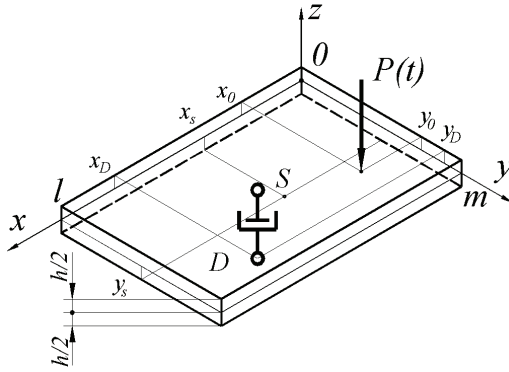


Рисунок 1 – Схема нагружения

Укажем, что  $P(x,y,t)$  и  $R(t)$  – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная) и реакция взаимодействия между пластиной и амортизатором соответственно.

Система дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решается посредством разложения искомых функций  $w_0$ ,  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. Решение задач для прямоугольных пластин, на которые воздействует система нескольких независимых нестационарных нагрузок, описано, например, в [4]. В результате решения получаются следующие аналитические выражения:

$$w(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \quad (2)$$

$$\Psi_x(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau;$$

$$\Psi_y(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau;$$

где  $K_i(x,y,t)$  – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$K_i^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t;$$

$$K_i^{\Psi_x}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}};$$

$$K_i^{xy}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}.$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G' h}{\rho \cdot J}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}; \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}; \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right);$$

$$C_{ikn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}; \quad \Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Аналитические выражения для определения собственных частот имеют вид:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) + \Delta_{kn}]}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) - \Delta_{kn}]}.$$

Проблема заключается в идентификации закона изменения во времени неизвестной реакции  $R(t)$ , для определения которой выражение (2) для точки установки амортизатора  $(x_D, y_D)$  может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра I рода относительно неизвестной  $R(\tau)$ :

$$\int_0^t R(\tau) \left[ K_R(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Решение уравнения осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [5] (РА Тихонова) в силу некорректности задачи. В результате решения находится сила взаимодействия между гасителем и пластиной  $R(t)$ , что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

**3. Решение обратной задачи.** В случае когда требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки  $P(t)$  необходимо знать изменение прогиба хотя бы в одной точке пластины. Пусть в некоторой точке  $S$  пластины  $w(x_S, y_S, t)$  известно изменение прогиба во времени (например, экспериментальные данные) – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра I рода (так как неизвестных сил в этом случае будет уже две – это  $P(t)$  и  $R(t)$  – также неизвестная реакция между гасителем и пластиной):

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau) K_{DP}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) \left[ K_{DR}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = 0; \\ \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t-\tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \quad (4)$$

Согласно РА Тихонова производится конечномерная аппроксимация

системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации в матричном виде систему (4) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_{ij}$  отвечают соответствующим ядрам СИУ (4), вектора  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{R}$  соответствуют неизвестным функциям  $P(t)$  и  $R(t)$ , а  $\mathbf{w}_s$  – известной функции  $w(x_S, y_S, t)$ .

Блочная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (5) решается с использованием обобщенного алгоритма (Гаусса или Крамера), а также с использованием процедуры регуляризации при обращении матриц согласно РА Тихонова. Более подробное решение подобных СЛАУ описано, например, в [4].

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат. При вычислениях принимались следующие значения:  $E = 2,07 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 7890$  кг/м<sup>3</sup>;  $h = 0,04$  м;  $l = 0,6$  м;  $m = 0,4$  м;  $x_0 = 0,15$  м,  $y_0 = 0,3$  м;  $x_S = 0,25$  м,  $y_S = 0,1$  м;  $x_D = 0,45$  м,  $y_D = 0,15$  м – координаты места установки амортизатора; коэффициент демпфирования амортизатора  $\kappa = 10^5$  Н/(м/с); число членов в соответствующих двойных рядах Фурье  $50 \times 50$ .

При проведении расчетов на величины прогибов  $\overline{w_s}(t)$ , которые являются результатами решения прямой задачи при заданном законе изменения во времени внешней нагрузки  $P(t)$ , налагался «шум» в соответствии с формулой  $\overline{w_s}(t) = w_s(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t)$ , где  $\delta$  – относительная погрешность;  $w_{\max}$  – максимальный прогиб пластины в рассматриваемой точке,  $Rnd(t)$  – случайные числа в интервале  $[-1; 1]$ . Укажем, что процедура «зашумления» моделирует погрешности, возникающие при реальных измерениях параметров НДС элементов конструкций.

Существенное влияние на устойчивость численного решения блочной СЛАУ (5), особенно при «зашумленной» правой части, оказывают параметры регуляризации  $\alpha_i$ , содержащиеся в РА Тихонова. Эти параметры целесообразно брать независимыми для каждой из идентифицируемых функций, хотя они могут и совпадать – это зависит от соответствующих ядер интегральных уравнений. Они определяются на основе минимизации по  $\alpha_i$  соответствующих функционалов невязки. Для приведенного численного расчета относительная погрешность «зашумления» принималась  $\delta = 0,2$ . Для этого случая параметры регуляризации целесообразно принять равными  $\alpha_p = 10^{-43}$ , а  $\alpha_R = 10^{-44}$ .

На рис. 2 показано изменение возмущающей нагрузки  $P(t)$  (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция амортизатора  $R(t)$  – жирные черные кривые. Серыми кривыми на рис. 2 показаны результаты решения обратной задачи, а именно идентифицированные значения возмущающей силы  $P(t)$  и реакции амортизатора  $R(t)$ . Как видно из

рис. 2 идентифицированные кривые практически полностью совпадают (с исходными данными для прямой задачи), заметим, что при решении обратной задачи зависимости  $P(t)$  и  $R(t)$  считались неизвестными и были найдены из блочной СЛАУ (5).

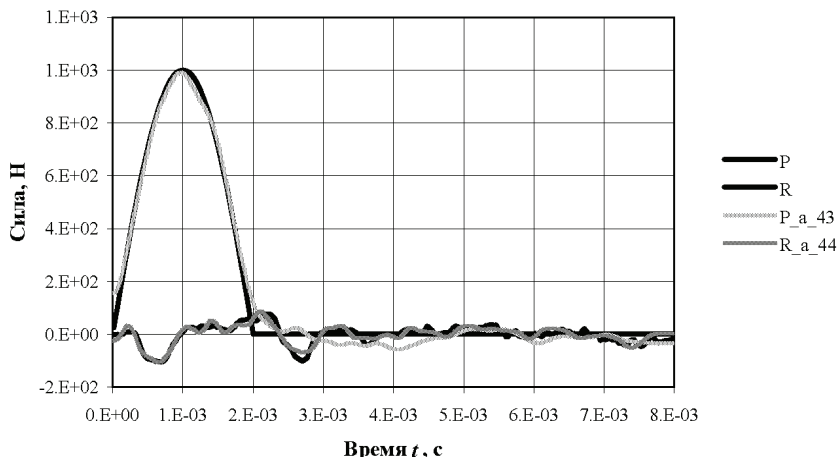


Рисунок 2 – Идентификация неизвестных нагрузок

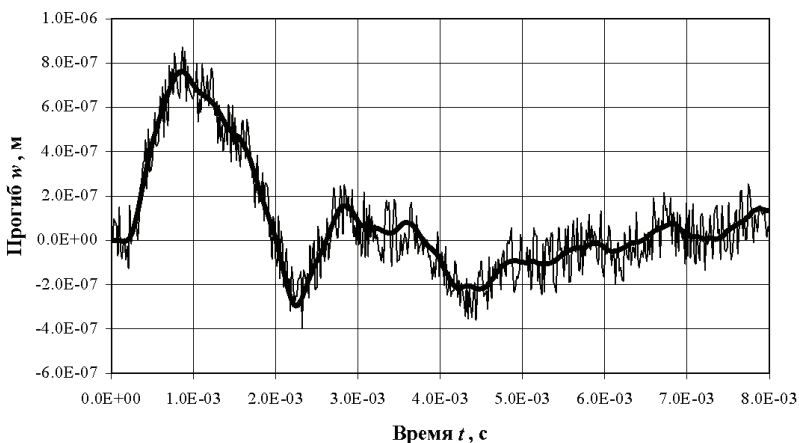


Рисунок 3 – Исходные данные идентификации

- На рис. 3 показаны две кривые изменения перемещения точки пластины:
- кривая 1 показывает изменение прогиба в некоторой точке пластины найденное при решении прямой задачи;
  - кривая 2 – исходные данные для задачи идентификации («зашумленное» изменение прогиба).

**Выводы.** Предложен новый подход при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней амортизатором, в виде неизвестной силы, которая прикладывается к пластине. На основе предложенного в работе подхода, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения прямой и обратной нестационарных задач механики твердого деформируемого тела. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по «зашумленным» исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

**Список литературы:** 1. *Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y.* An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*. – 300 (1-2). – 2007. – P. 250-64. 2. *Ranjan V., Ghosh M. K.* Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005. – Vol. 43. – P. 1513-1533. 3. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973 – 272 с. 4. *Янютин Е. Г., Воронай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В.* Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 5. *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

*Поступила в редколлегию 17.05.2011*