

С.Н.ТАРАН, ГП «Институт машин и систем», Харків

ПРО ОДНУ УМОВНО ПОТЕНЦІАЛЬНУ СИЛОВУ СХЕМУ

В роботі розглядається специфічна силова схема, визначена в обмеженій області, яка допускає введення потенціалу для рухів строго визначеного напрямку.

The specific force scheme determined in bounded area is considered in this work. The introductions of a potential for the movements in the strictly certain direction is supposed in this scheme.

Вивчення явищ коливань вала в гідродинамічному підшипнику являється актуальною задачею. Строге вирішення цієї задачі ускладнюється тим, що реакція мастильного прошарку суттєво нелінійно залежить від зміщення вала відносно корпусу підшипника [1].

Сучасні методи теоретичних досліджень коливань вала базуються на наближених числових методах вирішення диференціальних рівнянь руху вала в просторі зазору. Враховуючи те, що реакція мастильного прошарку при наближенні вала до корпусу підшипника сягає безкінченності (сінгулярна), то постає необхідність введення певних спрощень в алгоритм вирішення задачі. Спрощення, в свою чергу, приводять до появи розбіжностей між теоретичними і експериментальними результатами досліджень.

Детальний аналіз робіт по визначеній тематиці і бібліографія приведені в класичній монографії [2].

Запропонована в роботі силова схема може бути використана для описання і подальшого аналізу (в якісному плані) коливальних процесів в гідродинамічному підшипнику.

Задача. Нехай в області, обмеженій одиничним колом, задана певна вектор-функція $\vec{F}(\vec{r})$, або $\vec{F}(\rho, \varphi)$, де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з центру одиничного кола, ρ і φ – полярні координати точки області визначення функції \vec{F} . Функція \vec{F} така, що для довільно вибраної точки $M(\rho_0, \varphi_0)$, виконується інтегральна рівність:

$$\int_0^{\rho_0} \vec{F}(\rho, \varphi_0) \cdot d\vec{\rho} = \int_{\rho_0, \varphi_0}^{\rho_0, \varphi_0 + 2\pi} \vec{F}(\rho_0, \varphi) \cdot d\vec{L}, \quad (1)$$

де L – коло радіуса ρ_0 .

Коротко можна сказати: циркуляція вектора \vec{F} вздовж радіуса $(0, \rho_0)$ дорівнює циркуляції \vec{F} по колу радіуса ρ_0 . На рис. 1 показана схема обчислення приведеної рівності: I_1 – путь інтегрування для лівої частини, I_2 – для правої частини.

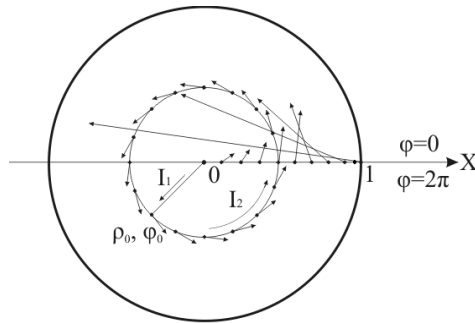


Рисунок 1

Нижче ми приведемо явний аналітичний вираз для $\vec{F}(\vec{r})$.

Для зручності будемо ототожнювати функцію $\vec{F}(\vec{r})$ з силою, яка діє на матеріальну індикаторну масу, розміщену в точці (ρ, φ) . Тоді циркуляція вектора \vec{F} по певній траєкторії – суть робота вектора \vec{F} вздовж указанного путі (траєкторії). Нижче ми будемо, в основному, обчислювати роботу сили \vec{F} або вздовж певного радіуса, або по колу певного радіуса. Будемо називати ці обчислення так: робота сили \vec{F} при віртуальному зміщенні індикаторної точки вздовж радіуса \vec{r} , указуючи початкову (\vec{r}_n) і кінцеву точки (\vec{r}_k) інтегрування (коротко: віртуальна (можлива) радіальна робота...) і робота сили \vec{F} при віртуальному зміщенні індикаторної точки по колу певного радіуса – віртуальна робота по орбіталі...

Записана інтегральна рівність (1) вказує на те, що всі радіальні напрямки в певній мірі рівноцінні, звідси вектор-функцію зручно записувати в проєкціях на радіальний F_r і на тангенціальний F_τ напрямки. Знаки «+» чи «-» в залежності від орієнтації \vec{r} і вибраного додатного напрямку руху по колу: знак для F_r означає співпадає чи не співпадає F_r з \vec{r} , для F_τ – знак «+» означає орієнтацію проти руху годинникової стрілки.

Функцію ознозначно визначимо, якщо запишемо залежність $F_r(x)$ і $F_\tau(x)$, див. рис. 1, тому що всі радіальні напрямки рівноцінні, а напрямок 0-X один із них.

В роботі ми уникаємо користуватись терміном «векторне поле», тому що цей термін неявно асоціюється з поняттям «стаціонарне», використанням притаманним цьому поняття $\text{div}\vec{F}, \text{rot}\vec{F} \dots$ Силова схема, яка буде запропонована нижче, не буде потенціальною в строгому розумінні цього слова [3].

Ясно, що коли присутня складова $F_\tau(|r|)$, то для двох різних точок області

визначення інтеграл $\int_{\tau.1}^{\tau.2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$ буде залежати від путі, який з'єднає ці точки.

Пояснимо термін «умовно потенціальна», який винесено в заголовок роботи.

Нехай існує $\vec{F}(\vec{r})$, яка задовольняє інтегральну рівність (1). Тоді виконаємо наступне: весь простір області визначення функції $\vec{F}(\vec{r})$ – внутрішність одиничного круга – заповнимо системою кіл (орбіталей) з монотонно зростаючим значенням $|\vec{r}|$ ($0 < r < 1$). Кожній орбіталі припишемо певне числове значення – величину циркуляції $\vec{F}(\vec{r})$ по указаній орбіталі: $A_0^1, A_0^2, A_0^3 \dots$. Тепер розглянемо радіальні зміщення індикаторної точки, наприклад, від точки а до точки b, рис. 2.

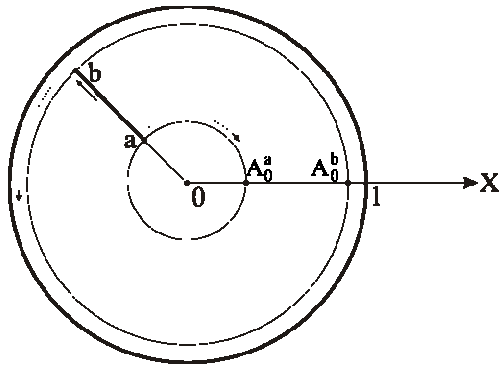


Рисунок 2

Віртуальній радіальній роботі від точки а до точки b відповідає:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = A_0^b - A_0^a,$$

де A_0^a і A_0^b – величини циркуляції по орбіталям, що проходять через точки а і b відповідно.

Ця рівність витікає негайно, згідно з (1).

І навпаки, віртуальна радіальна робота від точки b до точки а буде:

$$\int_b^a \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = A_0^a - A_0^b.$$

Якщо точки а і b лежать на різних радіальних напрямках, то за путь інтегрування слід взяти путь, що проходить через центр одиничного круга, див. рис. 3.

Формула для обчислення віртуальної радіальної роботи від точки а до точки b залишається незмінною:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^0 + \int_0^b = A_0^b - A_0^a.$$

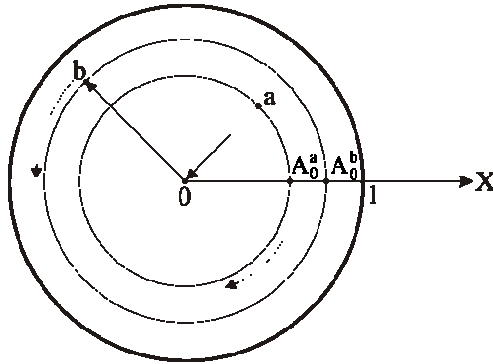


Рисунок 3

Зрозуміло, що величина циркуляції по орбіталі, як функція $|\vec{r}|$, служить потенціалом для віртуальних радіальних рухів індикаторної точки – $\Pi(|\vec{r}|)$.

Тепер основне. Вимогу рівності (1) задовольняє функція:

$$F_r(x) = k \left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right] e^{-0,8\pi x^2} \cos(\pi x^2);$$

$$F_t(x) = k \left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right] e^{-0,8\pi x^2} \sin(\pi x^2).$$
(2)

Запис приведений, коли \vec{r} пробігає інтервал (0,1) осі 0X (рис. 1).

Інтегральна рівність (1) буде виконуватись при умові, якщо нульовій точці (центру круга) приписати певне числове значення – A_0^0 . Це число залежить від коефіцієнту k у формулах (2).

Обчислення віртуальної радіальної роботи, а також віртуальної роботи по орбіталі відбувається з урахуванням цього факту.

Щоб уявити природу виписаної функції (формули (2)) і вияснити умови, при яких виконується рівність (1), звернемося до геометричного відображення функції $\vec{F}(\vec{r})$. На рис. 4 показаний характер зміни функції – її силова схема.

Відмітимо, що $|\vec{F}(\vec{r})|$ функція $|\vec{r}|$ і всяка точка одиничного кола являється особливою: при $|\vec{r}| \rightarrow 1$, $|\vec{F}(\vec{r})| \rightarrow \infty$.

Далі, маючи силову схему, можна побудувати «силові» і «нульові» лінії.

Смисл їх зрозумілий – будемо поле направлень і, послідовно з'єднуючи точки, отримуємо лінію...

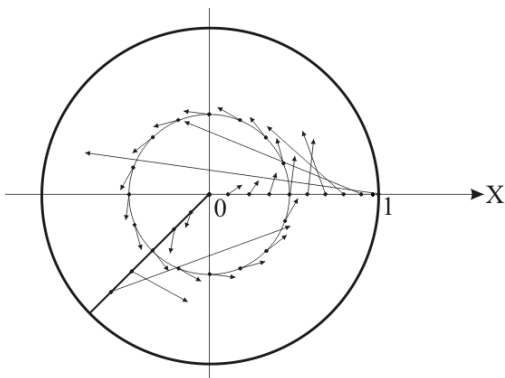


Рисунок 4

На рис. 5 показані «силова» і «нульова» (пунктиром) лінії, які відповідають точці $x = 1$ – сходяться в цій точці.

Символом \curvearrowright (старогрецька буква «сампі») позначено інваріант схеми: кут рівний $\pi/16$, або $11^\circ 15'$.

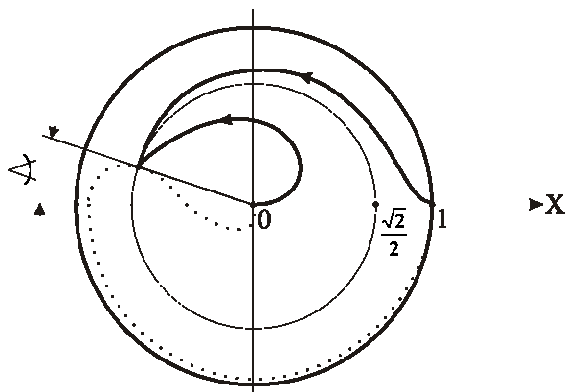


Рисунок 5

Поступаючи і далі таким чином, можна побудувати безчисленну множину «силових» і «нульових» ліній – усі вони попарно з'єднуються в точках одиничного кола і всі збігаються в нульову точку (центр круга). На рис. 6 схематично показана картина розгалужень «силових» і «нульових» ліній.

Приведений аналіз показує, що і точка «0» являється особливою, строго кажучи: область визначення функції $\vec{F}(\vec{r})$ – круг з виколотою точкою.

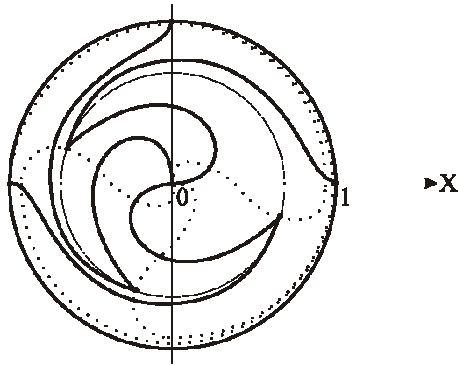


Рисунок 6

Наближеними числовими методами інтегрування можна пересвідчитись у справедливості виконання рівності (1) для вписаних функцій (2).

Процедура приписування (нормування) потенціалу в нульовій точці нескладна – вона витікає із аддитивності інтеграла по інтервалах.

На рис. 7 показаний загальний вид потенціалу $\Pi(\vec{r})$. Коефіцієнт k в формулах (2) прийнятий рівним 1.

Для любого іншого k (дійсного, додатного) картина якісно не змінюється. Значення потенціалу множаться на величину k .

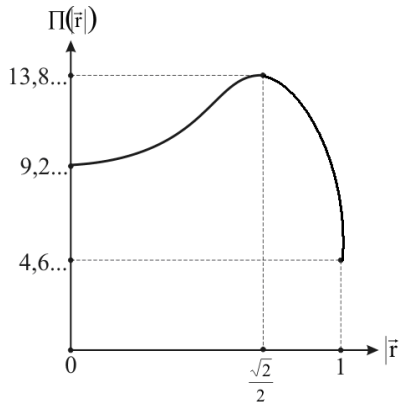


Рисунок 7

Описана умовно потенціальна силова схема допускає введення двох незалежних числових параметрів: коефіцієнту k в формулах (2) і певної свободи при нормуванні потенціалу.

Список літератури: 1. Зоммерфельд А. К теории трения при смазке // Сб. статей под редакцией проф. Л.С.Лейбензона. / Гидродинамическая теория смазки. Государственное технико-

теоретическое издательство. – Москва-Ленинград, 1934. – 574 с. 2. *Коровчинский М.В.* Теоретические основы работы подшипников скольжения. – М.: Машиностроение, 1969. – 403 с. 3. *М.А.Лаурентьев, Б.В.Шабат* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977.

Поступила в редколлегию 12.09.2007

УДК 620.171.3 : 53.072.11

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд.физ.-мат.наук, НТУ «ХПИ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ

У роботі розглядається новий метод визначення точності методу фотопружності. Суть методу полягає у використанні модельного засобу визначення точності. Точність визначається у порівнянні початкових (модельних) напружень та визначених у змодельованому засобі вимірювання. У якості початкового (модельного) напруження запропоновано використовувати визначені у реальному експерименті напруження. Досліджена коректність цього засобу дослідження точності.

New method of accuracy definition for the method of photoelasticity is considered in the paper. Essence of a method consists in the modelling way of accuracy determination. Accuracy is determined in comparison of initial (modelling) stresses and stresses determined in the simulated way of measurement. The stresses determined in real experiment are used as initial (modelling) stresses. The correctness of this method is investigated.

1. Введение. В работах [1-4] указывалось на тенденцию к сравнительно интенсивному использованию метода фотоупругости в последние годы по сравнению с 1980-90-ми годами, когда наблюдался глубокий спад в использовании этого метода. В этих же работах проводились модельные исследования метода фотоупругости. В этих исследованиях, среди прочего, определялась погрешность метода фотоупругости.

2. Актуальность рассматриваемой проблемы. Сложность определения погрешности в результирующих напряжениях связана с многоэтапностью алгоритма и с тем фактом, что задача фотоупругости является, так называемой, обратной задачей, в которой погрешность может стремиться к бесконечности. Особенно большую трудность вызывает зависимость погрешности от величины самих определяемых напряжений. На практике это проявляется в том, что попытки получить аналитические оценки верхних границ, которые не могут превышать погрешности в напряжениях, для многих алгоритмов приводят к невероятно большим величинам. Например, очень большие величины погрешности получаются, если в части алгоритма относящейся к решению системы линейных уравнений, использовать для оценки верхних границ погрешности соответствующие выражения с числом обусловленности [5,6].