

Заключение. В статье описана технология создания конечно-элементных моделей механизма наклона плавильной печи, характеризующаяся сквозной параметризацией создаваемых моделей, возможностью их экспорта между различными системами САД и САЕ, а также адаптацией к моделированию контактного взаимодействия по нескольким парам контактирующих поверхностей. Эти модели служат в качестве стартовых при осуществлении в дальнейшем многовариантных исследований НДС механизма наклона плавильной печи с целью обоснованного выбора рациональных параметров конструкции.

Список литературы: 1. *Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Мартыненко А.В., Нечепуренко А.В., Полицук Т.В.* К вопросу расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – 2007. – № 23. – С. 81-92. 2. *Полицук Т.В., Пеклич М.М., Ткачук Н.Н.* Кинематический и силовой расчет механизма наклона плавильной печи // Механіка та машинобудування. – 2007. – № 1. – С. 100-106. 3. *Ткачук Н.А., Ткачук Н.Н., Полицук Т.В.* Контактное взаимодействие элементов конструкций с кинематически генерируемыми поверхностями // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Транспортное машиностроение. – 2007. – № 31. – С. 75-80. 4. *Ткачук Н.А., Бруль С.Т., Малакей А.Н., Гриценко Г.Д., Орлов Е.А.* Структура специализированных интегрированных систем автоматизированного анализа и синтеза элементов транспортных средств специального назначения. // Механіка та машинобудування. – 2005. – № 1. – С. 184-194. 5. *Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н.* Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механіка та машинобудування. – 2006. – № 1. – С. 57-79. 6. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике / *Алямовский А.А., Собачкин А.А., Одинцов Е.В.* и др. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 800 с.

Поступила в редколлегию 21.09.2007

УДК 621.833.031

А.Г.ПРИЙМАКОВ, канд.техн.наук; **А.В.УСТИНЕНКО**, канд.техн.наук;
Г.А.ПРИЙМАКОВ; НТУ «ХПИ»

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ПОЗИЦИЙ ТЕРМОКОНТАКТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Розглянуто постановку контактної задачі в пружно-пластичній області за наявності зносу в зоні контакту. Запропоновано методику визначення термоконттактних деформацій і напруг деякого шару, що знаходиться під поверхневим шаром зуба в умовах повзучості.

Contact task in a resiliently-plastic area at presence of chafing in the contact area is considered. The method of determination of thermal-contact strains and stress of some stratum, being under the surface stratum of tooth in the conditions of creep is offered.

Введение. При эксплуатации силовых зубчатых передач, особенно волновых, совместное действие контактных напряжений и температурного градиента приводит к формированию термоконтактных напряжений. Последние могут действовать как в упруго-пластической области, так и в области ползучести. Анализ НДС зубьев силовых передач, определение их допустимых напряжений следует выполнять с учетом этих особенностей.

Целью статьи является определение термоконтактных напряжений в силовых зубчатых передачах в упруго-пластической области и в области ползучести с целью более полного анализа их НДС.

Упруго-пластическая область.

Контактная задача для поверхностного слоя в условиях износа. Рассмотрим контактную задачу в упруго-пластической области при наличии износа в зоне пятна контакта тел 1 и 2 трибосистемы (зубья шестерни и колеса). При таком подходе можно использовать модель Галина [1, 2], в которой контактируют оболочка произвольного радиуса кривизны с упругим полупространством, износ которого определяется. Правомерность применения этой модели для наших условий доказана в работе [3].

Обозначим скорость контактного радиального деформирования тела 1 (упругое полупространство) $\delta = dw/dt$, где w – радиальная деформация оболочки (тело 2). Величина δ определяется согласно гипотезе Престона:

$$\delta = dw/dt = k_1 V \tau = k \sigma, \quad (1)$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности между работой сил трения и массой удаленного материала; V – среднее значение скорости перемещения оболочки в радиальном направлении; τ – тангенциальное усилие (по закону Кулона $\tau = f \sigma_H$, где f – коэффициент трения; σ_H – контактное напряжение); $k = f k_1 V$.

Согласно модели Галина давление в зоне контакта уменьшается во времени, а давление на краях площадки полупространства равно нулю.

Вследствие износа радиальная деформация w изменится на величину

$$\Delta w = w_0(x) - w(x, t) = k \int_0^t p(x, t) dt. \quad (2)$$

При этом давление $p(x, t)$ и прогиб $w(x, t)$ связаны уравнением [4]

$$p(x, t) = EJ \frac{d^4}{dx^4} w(x, t), \quad (3)$$

где J – момент инерции сечения оболочки.

Из (2) вытекает такое интегродифференциальное уравнение,

$$w(x, t) = w_0(x) - kEJ \frac{d^4}{dx^4} \int_0^t w(x, t) dt. \quad (4)$$

Подстановка $w_{\beta}(x, t) = e^{-\beta t} w_{\beta}(x)$ приводит к уравнению

$$\frac{d^4 w_{\beta}(x_1)}{dx_1^4} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{\beta}{EJk} w_{\beta}(x_1) = 0, \quad (5)$$

где $x_1 = \pi x/a$; β – половина центрального угла зоны контакта.

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$w_{\beta}(x_1) = \lambda_1 \sin v x_1 + \lambda_2 \cos x_1 + \lambda_3 \operatorname{sh} v x_1 + \lambda_4 \operatorname{ch} v x_1, \quad (6)$$

где $v = (\beta/EJk)^{1/4} \cdot \pi/a$; a – координата границы зоны контакта; λ_{1-4} – постоянные интегрирования, физический смысл которых – некоторые постоянные локальные деформации.

Определив собственные значения λ_n и функции ϕ_n уравнения (5) и разложив начальное значение $w_0(x_1)$ в ряд по собственным функциям

$$w_0(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \phi_n(x_1), \quad (7)$$

получим общее решение задачи,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \exp\left(-\frac{a^4 EJk}{\pi^4} v_n^4 t\right) \phi_n(x_1), \quad (8)$$

где $\phi_n(x_1)$ – среднее значение телесного угла зоны контакта.

Ограничившись лишь первым членом ряда $w_0(x_1)$, запишем:

$$w(x, t) = k_1 \exp\left(-\frac{a^4 EJk}{\pi^4} v_1^4 t\right) \phi_1(x). \quad (9)$$

Зависимость (9) позволяет определить контактную деформацию, а, следовательно, и контактные напряжения $\sigma_H = \sigma_{w(x, t)}$ в любой точке пятна контакта тел 1 и 2 в условиях их активного износа. Она является математической моделью контактных взаимодействий тел трибосистемы «шестерня-колесо».

В [2] также показано, что температурное смещение функции распределения частиц износа характеризуется соотношением

$$\gamma_T = \sqrt{T_2/T_1}, \quad (10)$$

где T_1 и T_2 – заданные температуры шестерни и колеса.

Такое простое соотношение позволяет скорректировать размеры пятна контакта на величину температурного смещения.

Также на поверхности тела 1 следует исследовать термоконтактные напряжения и деформации некоторого слоя dr для получения полной картины НДС, так как это тело является более нагруженным и определяет надежность, долговечность и износостойкость трибосопрежения зубчатой пары [4, 5].

Термоконтактные деформации и напряжения некоторого слоя в процессе теплопереноса. Рассмотрим слой dr , лежащий на некотором расстоя-

нии h от поверхностного слоя зубчатого колеса. Априори считаем, что в нем происходят исследуемые нами структурные и реологические изменения. Таким образом будем рассматривать поверхностный слой совместно со слоем dr , то есть как двухслойную конструктивно-ортотропную оболочку ограниченной длины с зафиксированными краями и нагруженную силами P и температурным полем ΔT . Такая расчетная схема рекомендуется в [4, 6].

В [4, 5] авторы рассмотрели решение подобной задачи на основе гипотезы Кирхгофа-Лява, позволяющей свести сложные пространственные задачи к двумерным, то есть рассмотреть расчет поверхности приведения. В этих работах получено решение в ортогональной системе криволинейных координат (α_1, α_2, z) для определения компонент деформаций $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ и напряжений $\sigma_{1z}, \sigma_{2z}, \tau_z$ в волокнах, размещенных на расстоянии z_0 от нейтрального слоя (см. рис.). Там же приведены зависимости для определения напряжений в нормальных сечениях двухслойной оболочки в верхнем и нижнем слоях системы с учетом термоупругих гипотез Дюгамеля-Неймана, позволяющих свести систему внешнего нагружения $(P, \Delta T)$ к системе внутренних усилий T_1, T_2, Q_1, Q_2, S и внутренних моментов G_1, G_2, H_1, H_2 .

Размещение волокон по толщине зададим через расстояние z от поверхности приведения. Относительные удлинения и сдвиг поверхности приведения $\epsilon_1, \epsilon_2, w = 2\epsilon_3$, а изменения ее кривизны и кручения – χ_1, χ_2 и χ_3 . Эти параметры полностью определяют деформированное состояние двухслойной оболочки и выражаются через компоненты перемещения вдоль координатных линий u, v и по внешней нормали w известными соотношениями [6].

Таким образом, сведем расчет НДС такой оболочки к исследованию условий равновесия и НДС поверхности приведения.

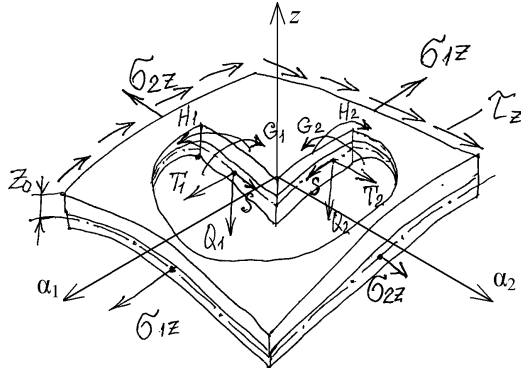
Пусть двухслойная оболочка тела 1, образованная поверхностным слоем толщиной δ_1 , слоем dr толщиной δ_2 (общая толщина $\delta_0 = \delta_1 + \delta_2$), радиусом R_1 и длиной l , находится в температурном поле $T = T(\alpha_1, \alpha_2, z)$. Коэффициенты линейного расширения внешнего слоя β_1 , слоя dr – β_2 . Компоненты напряжений, возникающие в нормальных сечениях тела с двухслойной оболочкой, в соответствии с термоупругими гипотезами Дюгамеля-Неймана:

– во внешнем слое $0 \leq z \leq z_0$

$$\begin{aligned} \sigma_{1T}^{(1)} &= E_{\text{нп}} [\epsilon_1 + \nu_{\text{нп}} \epsilon_2 + z(\chi_1 + \nu_{\text{нп}} \chi_2) - (1 + \nu_{\text{нп}}) \beta_1 T]; \\ \sigma_{2T}^{(1)} &= E_{\text{нп}} [\epsilon_2 + \nu_{\text{нп}} \epsilon_1 + z(\chi_2 + \nu_{\text{нп}} \chi_1) - (1 + \nu_{\text{нп}}) \beta_1 T]; \\ \tau_T^{(1)} &= E_{\text{нп}} (1 - \nu_{\text{нп}}) (\epsilon_3 + z \chi_3), \end{aligned} \quad (11)$$

– в слое dr при $z_0 \leq z \leq \delta_0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1T}^{(2)} &= E_{\text{нп}} [\epsilon_1 + \nu_{\text{нп}} \epsilon_2 + z(\chi_1 + \nu_{\text{нп}} \chi_2) - (1 + \nu_{\text{нп}}) \beta_2 T]; \\ \sigma_{2T}^{(2)} &= E_{\text{нп}} [\epsilon_2 + \nu_{\text{нп}} \epsilon_1 + z(\chi_2 + \nu_{\text{нп}} \chi_1) - (1 + \nu_{\text{нп}}) \beta_2 T]; \\ \tau_T^{(2)} &= E_{\text{нп}} (1 - \nu_{\text{нп}}) (\epsilon_3 + z \chi_3) = \tau_T^{(1)}. \end{aligned} \quad (12)$$



Ортогональная система криволинейных координат и направления усилий и моментов на поверхности приведения двухслойной конструктивно ортотропной оболочки

Тело 1 вращается и находится практически в условиях осесимметричного нагрева, при котором

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R_1}; \quad \chi_1 = \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (13)$$

Внутренние усилия и моменты:

$$T_1 = B \left(\frac{du}{dx} + \nu_{np} \frac{w}{R_1} \right) - N; \quad T_2 = B \left(\frac{w}{R_1} + \nu_{np} \frac{du}{dx} \right) - N;$$

$$G_1 = D \frac{d^2w}{dx^2} + M; \quad G_2 = D \nu_{np} \frac{d^2w}{dx^2} + M. \quad (14)$$

Уравнения равновесия при осесимметричном нагреве:

$$T_1 = 0; \quad \frac{dG_1}{dx} = Q_1; \quad \frac{d^2G_1}{dx^2} + \frac{T_2}{R_1} = 0. \quad (15)$$

Из (15) найдем

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{B} - \nu_{np} \frac{w}{R_1}, \quad (16)$$

а также

$$T_2 = B \left(1 - \nu_{np}^2 \right) \frac{w}{R_1} - \left(1 - \nu_{np} \right) N, \quad (17)$$

где B , D – соответственно приведенные жесткости при растяжении-сжатии и изгибе; N , M – обобщенные температурные характеристики при условии, что $\Delta T = \text{const}$ [4, 6],

$$B = \frac{E_{np} \delta_0}{1 - \nu_{np}^2}; \quad D = \frac{E_{np} \left[z_0^3 - (\delta_0 - z_0)^3 \right]}{3(1 - \nu_{np}^2)}; \quad (18)$$

$$N = \frac{E_{\text{нп}}}{1-\nu_{\text{нп}}} (\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2) \Delta T; \quad M = \frac{E_{\text{нп}} \delta_1 \delta_2}{2(1-\nu_{\text{нп}})} (\beta_1 - \beta_2) \Delta T. \quad (19)$$

Подставив (14) и (17) в последнее соотношение (15), получим дифференциальное уравнение осесимметричного нагрева двухслойной оболочки,

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{(1-\nu_{\text{нп}})N}{DR_1} - \frac{1}{D} \frac{d^2 M}{dx^2}, \quad (20)$$

где

$$k^4 = B(1-\nu_{\text{нп}}^2)/4DR_1^2. \quad (21)$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$w = C_1 e^{-kx} \cos kx + C_2 e^{-kx} \sin kx + \frac{NR_1}{B(1+\nu_{\text{нп}})}. \quad (22)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий при $x = 0$; $G_1 = Q_1 = 0$ и из условия симметричности НДС оболочки относительно ее середины,

$$C_1 = -\frac{M}{2k^2 D}; \quad C_2 = \frac{M}{2k^2 D}. \quad (23)$$

Таким образом, радиальную тепловую деформацию виртуальной оболочки от края до середины определим так:

$$w = \frac{M}{2k^2 D} e^{-kx} (\sin kx - \cos kx)x + \frac{NR_1}{B(1+\nu_{\text{нп}})}. \quad (24)$$

Наибольший интерес вызывает максимальное значение w_0 в центре пятна контакта при значениях компонент деформации $\varepsilon_{1\text{max}}$, $\varepsilon_{2\text{max}}$, $\chi_{1\text{max}}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1\text{max}} &= \frac{N}{B(1+\nu_{\text{нп}})} - \frac{\nu_{\text{нп}} M}{\sqrt{BD(1-\nu_{\text{нп}}^2)}} e^{-kx} (\sin kx - \cos kx); \\ \varepsilon_{2\text{max}} &= \frac{M}{\sqrt{BD(1-\nu_{\text{нп}}^2)}} e^{-kx} (\sin kx - \cos kx) + \frac{N}{B(1+\nu_{\text{нп}})}; \\ \chi_{1\text{max}} &= \frac{M}{D} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx), \end{aligned} \quad (25)$$

$$w_0 = \frac{R_1}{\sqrt{B(1+\nu_{\text{нп}})}} \left[\frac{N}{\sqrt{B(1+\nu_{\text{нп}})}} - \frac{M}{\sqrt{D(1-\nu_{\text{нп}})}} \right]. \quad (26)$$

Так как контактная и температурная составляющие действуют в радиальном направлении, то, на основе принципа суперпозиции деформаций и напряжений, их можно суммировать.

Расчеты показывают, что межслоевые сдвиги, пропорциональные поперечной силе Q , на порядок меньше других компонент деформационного состояния, поэтому в общем балансе НДС ими можно пренебречь.

Условия ползучести.

Снова рассмотрим двухслойную оболочку тела 1. Ее термонапряженное состояние определяется силами P , создающими осесимметричное нормальное давление p . Оболочка считается прогретой квазиравномерно, поэтому для определения деформаций ползучести можно применить теорию старения.

Кинематически допустимое поле перемещений точек срединной поверхности в условиях ползучести в каждый момент времени определяется так:

$$w + \delta_0 + R_1 \leq f \left(z + u - \frac{\delta_0}{2} \frac{dw}{dz} \right). \quad (27)$$

Это ограничение получено на основе гипотезы прямой нормали.

Поскольку перемещения и углы поворота нормального элемента малы, то условие (27) может быть линеаризовано [7],

$$w \leq f(z) - \delta_0 - R_1. \quad (28)$$

Кинематические граничные условия при этом $z = 0$; $z = l$. Геометрическое место точек, для которых выполняется равенство в условии (28), образует область пятна контакта S_k тел 1 и 2.

Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями так:

$$\epsilon_{11} = \frac{du}{dz} - z \frac{d^2w}{dz^2}; \quad \epsilon_{22} = \frac{w}{R_1}. \quad (29)$$

Усилия и моменты вне зоны контакта должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{dT_{11}}{dz} = 0; \quad \frac{d^2M_{11}}{dz^2} - \frac{1}{R_1} T_{22} + p, \quad (30)$$

где $z \in S_k$; $p \approx P/S_k$.

В зоне контакта давление q между телами 1 и 2 определим из условия равновесия

$$q = \frac{d^2M_{11}}{dz^2} - \frac{1}{R_1} T_{22} + p. \quad (31)$$

После определения компонент тензора деформаций по (29) соответствующие им напряжения найдем из уравнений состояния

$$\sigma_{11} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} (\epsilon_{11} + 0,5\epsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} (\epsilon_{22} + 0,5\epsilon_{11}), \quad (32)$$

в которых интенсивность напряжений σ_i является функцией времени t и интенсивности деформаций ϵ_i для данного конструкционного материала,

$$\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i, t), \quad (33)$$

Авторы рекомендуют использовать предложенную Ю.Н. Работновым [7] зависимость для учета подобия кривых ползучести:

$$\sigma_i = \varphi(\epsilon_i) (1 + \alpha t^\beta)^{-1}, \quad (34)$$

где $\varphi(\varepsilon_i)$ – некоторая функция интенсивности деформаций ползучести [7, 8]; α , β – константы, определяемые по результатам обработки экспериментальных данных исследования ползучести конструкционных материалов [5, 8].

Линейная деформация нормального элемента находится из условия изотропности материала,

$$\varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (35)$$

Учитывая геометрический характер гипотез Кирхгофа-Лява (применяются при определении перемещений в оболочке и не распространяются на физические зависимости), а также (35), интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = 2\sqrt{\frac{1}{3}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2)}. \quad (36)$$

Таким образом, для термонапряженного состояния в условиях ползучести НДС определяем по нижеследующему алгоритму:

- находят компоненты тензора деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} по (29) и (35);
- определяется интенсивность деформаций ε_i по (36);
- определяется интенсивность напряжений σ_i по (34);
- находят компоненты тензора напряжений ползучести по (32).

Выводы.

Термоконтатные деформации и напряжения (с учетом износа) необходимо учитывать при выборе материалов и допускаемых напряжений для зубчатых пар.

Получена зависимость (9) для контактных деформаций в условиях износа контактирующих тел, например, для трибостемы «шестерня-колесо».

При определении термонапряженного или термоконтатного НДС двухслойных систем следует применять гипотезы Кирхгофа-Лява и Дюгамеля-Неймана о деформативности поверхности приведения.

Список литературы: 1. *Глендорф Г., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. – М.: Мир, 1973. – 280 с. 2. *Протасов Б.В.* Энергетические соотношения в трибосопряжении и прогнозирование его долговечности. – Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1979. – 152 с. 3. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 597 с. 4. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Приймаков Г.А.* Математическая модель анализа напряженно-деформированного состояния поверхностного слоя и его устойчивости на поверхностях трения при определении допускаемых напряжений // Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. Тем. вып. «Проблемы механического привода». – Харьков, 2005. – Вып. 40. – С. 65–77. 5. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В.* Учет температурных деформаций и напряжений при выборе допускаемых напряжений в машиностроении // Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. Тем. вып. «Динамика и прочность машин». – Харьков, 2005. – Вып. 21. – С. 119–126. 6. *Королев В.И.* Упруго-пластические деформации оболочек. – М.: Машиностроение, 1971. – 303 с. 7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 8. *Ползучесть элементов машиностроительных конструкций* / Под ред. А.Н. Подгорного. – К.: Наукова думка, 1984. – 262 с.

Поступила в редколлегию 30.11.2007