

*Г.Ю.МАРТЫНЕНКО*, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКОВ НА ДВУХ КОЛЬЦЕВЫХ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТАХ**

У роботі запропонована методика розрахунку силових характеристик і визначення квазіпружних коефіцієнтів радіальних магнітних підшипників на двох постійних кільцевих магнітах, яка заснована на методі скінченних елементів. Виконано зіставлення розрахункових і експериментальних даних. Приведена порівняльна характеристика двох типів магнітних підшипників.

In the paper the procedure of calculation of power descriptions and definition of quasielastic coefficients for the radial magnetic bearings on two permanent circular magnets is offered. This procedure is based on the finite element analysis. Comparison of design and experimental data is executed. Comparative description of two types of the magnetic bearings is carried out.

**Введение.** На сегодняшний день магнитные подшипники (МП) используются в качестве опор роторов наряду с традиционными подшипниками качения и скольжения, а также газодинамическими подшипниками и являются альтернативой им, так как обладают по сравнению с ними целым рядом преимуществ (отсутствие смазочных систем, повышение надежности, снижение потерь на трение и механического изнашивания, сравнительно большой зазор и др.). Сами МП подразделяются по принципу действия на магнитные подшипники на постоянных магнитах (МППМ) и на электромагнитные подшипники (ЭМП) [1], к которым относятся МП на электромагнитах постоянного тока, МП с резонансной цепью и активные (управляемые) электромагнитные подшипники (АМП) с системой управления, реализующей некоторый алгоритм управления [2]. АМП по сравнению с МППМ обладает рядом преимуществ: более высокая грузоподъемность, возможность изменения жесткости и демпфирования в широких пределах, а также возможность обеспечения устойчивости движения в заданном диапазоне возмущающих воздействий. К недостаткам АМП относятся: наличие источника питания со значительным энергопотреблением, зависящим от грузоподъемности и требуемой жесткости, наличие системы автоматического регулирования (САР) включающей, кроме источника питания датчики, усилители, электромагниты (статоры с катушками) и регулятор, и как следствие, высокая стоимость. МППМ в свою очередь лишены перечисленных недостатков. Однако, главным их недостатком является невозможность создания полного магнитного подвеса ротора только с применением постоянных магнитов вследствие теоремы Ирншоу [3-5] (о неустойчивости положения равновесия активного элемента в статическом силовом поле, если сила и расстояние связаны законом обратных квадратов) и утверждений Браунбека [6-7] (устойчивый подвес тела в постоянном

магнитном поле возможен в случае, когда магнитная проницаемость материала тела меньше магнитной проницаемости окружающей среды). Данные положения приводят к тому, что при обычных атмосферных условиях в постоянном магнитном поле могут быть вывешены только тела, изготовленные из диамагнетиков или сверхпроводников. Ферромагнитные тела могут быть вывешены только в том случае, если в качестве окружающей среды используется ферромагнитная жидкость с более высокой магнитной проницаемостью. В работе [5] для обеспечения устойчивости положения постоянных магнитов в трех направлениях предложено погружать их в ферромагнитную жидкость, в качестве которой используется синтетический эфир на масляной основе с насыщенностью намагничивания 325 Гс и вязкостью 0,13 Па · с.

Таким образом, полный подвес ротора на МППМ для подавляющего большинства роторных машин невозможен с технологической и эксплуатационной точки зрения. Поэтому полный магнитный подвес ротора может быть осуществлен либо с использованием управляемых АМП в качестве всех опор ротора, либо в сочетании АМП и МППМ.

Одним из способов конструкционного решения для радиальных МППМ является использование двух магнитных колец. Существует множество схем таких МППМ [5], некоторые из которых приведены на рис. 1.

В них применяются магнитные кольца с осевой (рис. 1, а-в) или радиальной (рис. 1, г-д) намагниченностью и реализующие подвес за счет сил притяжения (рис. 1, в, е) или отталкивания (рис. 1, а,б,г,д). На рис. 1 более темным цветом изображены механически неподвижные кольца, которые крепятся к корпусу роторной машины, а более светлым – подвижные кольца, располагаемые на роторе. Следует отметить, что у всех приведенных радиальных МППМ устойчивый подвес реализуется только в радиальном направлении, а в осевом направлении такие МППМ неустойчивы.

**1. Постановка задачи.** Целью данной работы является создание методики определения жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на постоянных кольцевых магнитах (МППКМ) и исследование на ее основе влияния направления намагниченности постоянных кольцевых магнитов на жесткостные характеристики таких подшипников при прочих равных параметрах. В качестве исследуемых типов МППКМ, исходя из простоты технической реализации, выбраны схемы представленные на рис. 1, а и рис. 1, г.

**2. Расчет статических электромагнитных и магнитных полей.** Математическим описанием непрерывных в пространстве и во времени процессов распределения электромагнитного поля являются дифференциальные уравнения в частных производных относительно характеристик поля (векторов напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , векторов электрической и магнитной индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ , вектора плотности тока  $\vec{J}$ ,

векторного магнитного потенциала  $\bar{A}$ , скалярного магнитного потенциала  $\varphi_M$ ), которые получают из преобразования уравнения Максвелла, представляющего собой закон полного тока в дифференциальной форме [8, с. 633]:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_a$  – плотность тока электрического смещения, возникающего в любом диэлектрике при изменении напряженности электрического поля во времени.

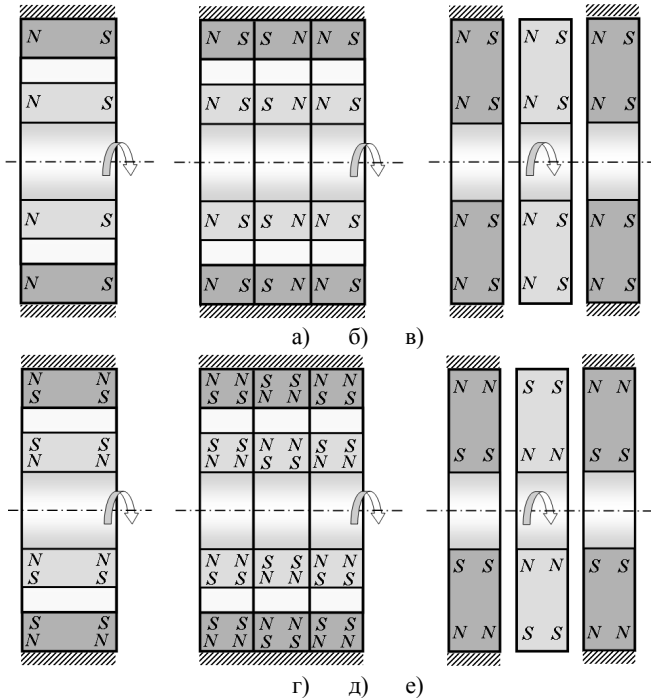


Рисунок 1 – Схемы радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах

Второе слагаемое в правой части уравнения (1) в случае, когда магнитное поле не изменяется с течением времени, равно нулю. Тогда приходим к основным уравнениям статического электромагнитного поля [8, 9]:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}, \quad \text{div } \bar{B} = 0 \Rightarrow \text{rot } \bar{B} = \mu_a \bar{J}, \quad (2)$$

если учесть, что  $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ , и предположить, что  $\mu_a = \text{const}$  во всей области поля или поле может быть подразделено на отдельные области, так что магнитные проницаемости  $\mu_a$  в каждой отдельной области постоянны.

При отсутствии токов (статическое магнитное поле):

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = 0, \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = \operatorname{div} \mu_a \bar{\mathbf{H}} = \mu_a \operatorname{div} \bar{\mathbf{H}} = 0, \quad (3)$$

а значит как дивергенция, так и ротор напряженности магнитного поля во всем пространстве равны нулю (то есть нет ни источников, ни вихрей). Тогда сама напряженность поля тоже равна нулю, и поле можно получить только при наличии намагниченности среды, состояние которой определяется вектором намагниченности  $\bar{\mathbf{M}}$ . В этом случае [8, с. 599] и [9, с. 266]:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_0(\bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{M}}) = \mu_0 \mu \bar{\mathbf{H}} = \mu_a \bar{\mathbf{H}}. \quad (4)$$

Расчет статического магнитного поля и магнитного поля постоянных токов может быть выполнен двумя способами – с помощью магнитного скалярного ( $\varphi_M$ ) или векторного ( $\bar{\mathbf{A}}$ ) потенциалов.

Для совокупностей точек, где  $\bar{\mathbf{J}} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = 0$  (то есть для областей не занятых током) и магнитное поле может рассматриваться как потенциальное, то есть как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал  $\varphi_M$  можно принять:

$$\bar{\mathbf{H}} = -\operatorname{grad} \varphi_M. \quad (5)$$

В этом случае с учетом  $\mu_a = \operatorname{const}$  скалярный магнитный потенциал  $\varphi_M$  подчиняется уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi_M = 0$  [8, с. 606], которое в декартовой системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi_M(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi_M(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M(x, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Для расчета магнитных полей также широко используется векторный потенциал магнитного поля  $\bar{\mathbf{A}}$ . С учетом  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$  справедливо [8, с. 608]:

$$\bar{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}. \quad (7)$$

При этом вектор  $\bar{\mathbf{H}}$  также может быть определен через  $\bar{\mathbf{A}}$  в однородной среде или в среде, которая может быть подразделена на области с  $\mu_a = \operatorname{const}$ .

Так как линии вектора  $\bar{\mathbf{A}}$  есть замкнутые на себя линии, то  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0$  и векторный магнитный потенциал подчиняется уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu_a \bar{\mathbf{J}}, \quad (8)$$

которое составлено относительно векторной величины, а с учетом:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z, \quad \bar{\mathbf{J}} = \bar{i}J_x + \bar{j}J_y + \bar{k}J_z, \quad (9)$$

разбивается на три уравнения относительно скалярных величин  $A_x, A_y, A_z$ :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a J_z. \quad (10)$$

Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора потенциала:

$$\Phi = \oint \bar{\mathbf{A}} dl. \quad (11)$$

Если среда моделирования нелинейная, то есть  $\mu_a \neq \operatorname{const}$ , то с учетом то-

го что  $\mu_a = \mu\mu_0$  из уравнения Максвелла получаем:

$$\operatorname{rot} (1/\mu) \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} = \mu_0 \bar{\mathbf{J}}. \quad (12)$$

**3. Применение метода конечных элементов (МКЭ) для расчета статических электромагнитных полей и сил.** Конечно-элементная формулировка анализа электромагнитных полей основана на уравнениях Максвелла вида (1) в общем случае и (2), (3) в случае стационарных процессов [10, 11].

Трехмерная задача магнитостатики является результатом минимизации нелинейного функционала магнитной энергии, ассоциированного с одной скалярной функцией – магнитным потенциалом  $U = \varphi_M$  или трехмерным вектором магнитного потенциала  $U = A_x, A_y, A_z$  [10]. Задача может быть решена с помощью итерационной процедуры Ньютона-Рафсона.

Конечно-элементная формулировка проблемы может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} [K] \{\Delta U\}_k = \{R\} - \{F\} \\ \{U\}_{k+1} = \{U\}_k + \{\Delta U\} \end{cases}, \quad (13)$$

где  $[K]$  – матрица коэффициентов электромагнитной задачи,  $\{U\}$  – вектор узловых потенциалов,  $\{\Delta U\}$  – приращение вектора потенциалов,  $\{R\}$  – вектор приложенных нагрузок (электрический ток, напряжение или магнитная индукция),  $\{F\}$  – вектор остаточных нагрузок,  $k$  – номер итерации.

На этапе расчета выбор метода достигается применением в конечно-элементной модели соответствующего типа конечного элемента (КЭ) со степенями свободы в каждом узле:  $\varphi_M$  – при использовании метода скалярного потенциала, и  $A_x, A_y, A_z$  – метода векторного потенциала [10]. Кроме этого, применение специальных конечных элементов для задания условий на бесконечности исключают необходимость моделировать бесконечную среду, окружающую электромагнитное устройство (например, воздух), что позволяет обходиться моделями небольшого размера.

Для того чтобы уравнения Лапласа или Пуассона имели единственное решение, они дополняются граничными условиями на замкнутой границе:

1. Граничные условия первого рода (Дирихле) –  $\varphi_M = f_1(x, y, z)$ ,
2. Граничные условия второго рода (Неймана) –  $\partial\varphi_M/\partial n = f_2(x, y, z)$ ,
3. Граничные условия третьего рода –  $\partial\varphi_M/\partial n + f_3(\varphi_M) = f_4(x, y, z)$ .

Могут быть заданы также и смешанные граничные условия.

В результате выполненных вычислений с помощью МКЭ могут быть получены распределения магнитного поля (вектора магнитной индукции, вектора напряженности и магнитного векторного потенциала), а также основных электромагнитных характеристик (индуктивности и магнитной силы).

Расчет магнитных сил возможен двумя способами – на основе определения виртуальной работы (работы на возможных перемещениях) или компонентов тензора напряжений Максвелла для магнитного поля ( $\bar{\mathbf{T}}_M$ ).

По тензору напряжений магнитная сила, действующая на поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , может быть вычислена по формуле [9, с. 51]:

$$\bar{\mathbf{F}}_M = \oint_S \bar{\mathbf{T}}_M d\bar{\mathbf{S}} = \oint_S [\mu_a \bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{n}}) - \frac{1}{2} \mu_a H^2 \bar{\mathbf{n}}] dS, \quad (14)$$

где  $\bar{\mathbf{n}}$  – единичный вектор, нормальный к поверхности.

С использованием принципа виртуальной работы электромагнитная узловая сила (в том числе электро- или магнитостатическая) рассчитывается для элемента, находящегося в воздушном слое, окружающем подвижную часть модели, и в направлении  $s$  может быть получена как производная от энергии по смещениям этой части [12]:

$$F_s = \int_v \{B\}^V \left\{ \frac{\partial H}{\partial s} \right\} dv + \int_v \left( \int \{B\}^V \{dH\} \right) \frac{\partial}{\partial s} dv, \quad (15)$$

где  $F_s$  – сила в элементе в направлении  $s$ ,  $\{\partial H/\partial s\}$  – производная от напряженности поля по перемещениям,  $s$  – виртуальные перемещения узлов взятые поочередно в направлениях осей системы координат,  $v$  – объем КЭ.

Чтобы определить полную силу  $\bar{\mathbf{F}}_M$ , действующую на подвижное тело, силы в воздушном слое, окружающем его необходимо просуммировать.

**4. Объект исследований и экспериментальные данные.** В качестве объекта исследований выбран радиальный магнитный подшипник на кольцевых постоянных магнитах с осевой намагниченностью, схема которого представлена на рис. 1, а. Геометрические размеры входящих в него колец – диаметры внешнего неподвижного (статорного) кольца  $D_1 = 58$  мм и  $D_2 = 40$  мм, а внутреннего подвижного (роторного) кольца –  $D_3 = 29$  мм и  $D_4 = 15$  мм, толщина обоих колец  $h = 10,5$  мм. Кольца изготовлены из сплава NdFeB с остаточной индукцией  $B_r = 1,07$  Тл и коэрцитивной силой  $H_c = 808000$  А/м.

Экспериментально зависимость «магнитная сила – радиальное смещение внутреннего кольца» данного магнитного подшипника были определены с помощью установки представленной на рис. 2, в которую входили сам МППКМ, динамометр (цена деления – 1 Н), индикатор часового типа ИЧ10 (ц.д. – 0,01 мм), станина и крепежные элементы из немагнитных материалов.

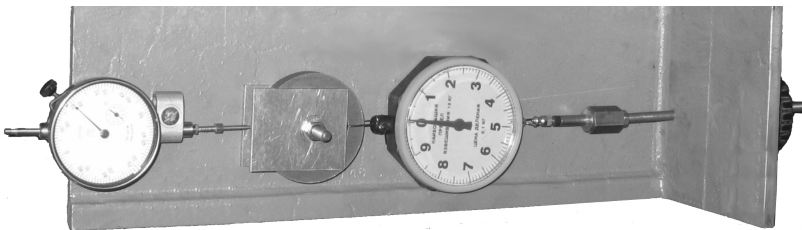


Рисунок 2 – Экспериментальная установка для определения жесткостных характеристик радиальных МП на двух кольцевых постоянных магнитах

При проведении эксперимента внутренний кольцевой магнит был неподвижно закреплен, а к внешнему прикладывалась радиально направленное усилие, измеряемое динамометром. На каждой единице силовой нагрузки с помощью индикатора ИЧ10 измерялось смещение внешнего кольцевого магнита, которое соответствует взаимному смещению центров масс колец в радиальном направлении или смещению внутреннего роторного кольца магнитного подшипника относительно внешнего статорного кольца. Далее измерения повторялись после разворота кольцевых магнитов на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ .

Для достижения точности экспериментальных данных систематические погрешности измерений устранялись введением поправок в результаты измерений, а случайные погрешности были существенно уменьшены путем снижения трения между внешним кольцом и крепежными элементами. В итоге, значение суммарной относительной погрешности измерений, включая инструментальную и методическую погрешность, не превышало 1-2 % [13].

Результаты эксперимента (набор точек в координатах «магнитная сила – смещение») представлены графически в следующем пункте для удобства сравнительного анализа с расчетными данными.

### **5. Численное определение жесткостных характеристик МППКМ.**

Расчетные эксперименты проводились для магнитного подшипника описанного в п. 4 с помощью метода конечных элементов (см. п. 3). Полная геометрическая модель (магниты-воздух) и конечно-элементная модель (КЭМ) магнитов данного МППКМ представлены на рис. 3. Численные эксперименты проводились следующим образом – полный номинальный зазор ( $D_2 - D_3$ ) равномерно разбивался на  $2n + 1$  уровень, так чтобы  $n + 1$  уровень совпадал с центральным положением подвижного кольца, то есть когда оба кольцевых магнита расположены concentрично и местоположение их центров масс совпадает. Другими словами, когда система координат неподвижно связана со статорным магнитом и ее центр расположен в центре масс этого магнита (см. рис. 3), а координаты центра масс подвижного роторного магнита  $x_{rc} = y_{rc} = z_{rc} = 0$ .

Далее подвижный магнит смещался по оси  $y$  так, что его центр масс совпадал с одним из уровней и при этом взаимном положении проводился электромагнитный статический расчет методом конечных элементов, в результате которого определялись распределение магнитной индукции (рис. 4, а), напряженности магнитного поля (рис. 4, б) и вычислялись суммарные магнитные силы в направлениях осей системы координат. При этом расчетная погрешность не превышала 2 %. Она достигалась качеством КЭМ, а определялась сопоставлением усредненных узловых результатов со значениями магнитной индукции и напряженности в точках интегрирования [14].

Для построения силовых характеристик была проведена серия из  $2n + 1$  расчетов для каждого положения подвижного магнита на одном из уровней. В

результате определено, что при всех положениях роторного магнита суммарные магнитные силы в направлениях  $x$ ,  $z$  равны нулю, а зависимость силы от координаты  $y$  центра масс роторного магнита представлена на рис. 5.

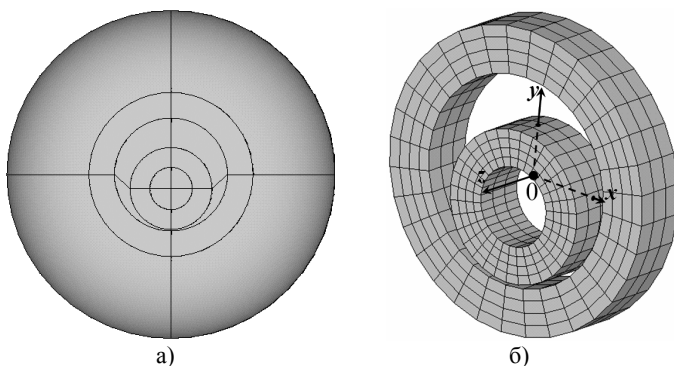


Рисунок 3. Модель МППКМ: а) полная геометрическая модель, б) конечно-элементная модель магнитов

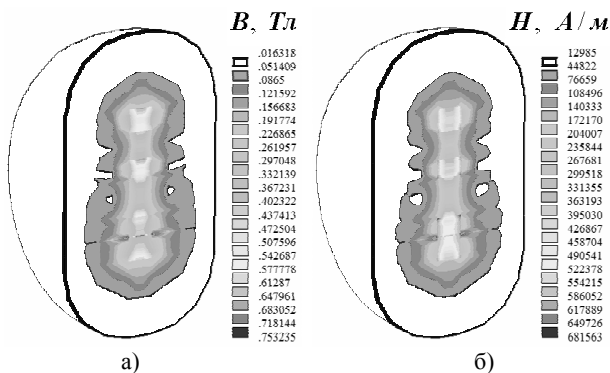


Рисунок 4 – Результаты статического магнитного расчета МППКМ – распределение модуля вектора: а) магнитной индукции, б) напряженности магнитного поля

Здесь круглыми маркерами обозначены экспериментальные данные зависимости силы от смещения ( $F_M^{Exp}$ ), квадратными – силы, рассчитанные по тензору напряжений Максвелла ( $F_M^{Max}$ ), ромбовидными – с использованием принципа виртуальной работы ( $F_M^{W}$ ). Кроме того, все расчеты выполнялись двумя методами – магнитного векторного потенциала и магнитного скалярного потенциала. Силы, полученные с использованием первого метода, приведены на рис. 5, а, а с использованием второго – на рис. 5, б.

Сплошные линии на рис. 5 – есть аппроксимация экспериментальных и



расчетных данных выполненная методом наименьших квадратов кубическими полиномами вида [15].

$$F_M(y) = f_0 + k_0 y + k_1 y^2 + k_2 y^3. \quad (16)$$

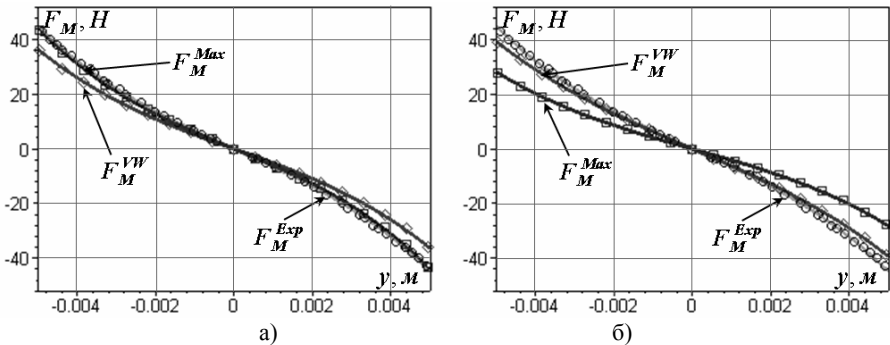


Рисунок 5. Зависимость магнитной силы от радиального смещения подвижного магнита МППКМ: экспериментальные данные (○) и силы, рассчитанные с использованием метода а) скалярного потенциала, б) векторного потенциала

Квазиупругие коэффициенты или коэффициенты жесткости (если принять, что исследуемый тип МППКМ является аналогом нелинейно-упругого элемента) могут быть найдены по формуле [16]:

$$K_M(y) = -\frac{\partial F_M(y)}{\partial y} = -k_0 - 2k_1 y - 3k_2 y^2. \quad (17)$$

Сравнительный анализ силовых характеристик, полученных экспериментальным и расчетным путем (см. рис. 5), показал, что наиболее точное совпадение с экспериментальными данными дает метод векторного потенциала (расхождение не превышает 1 %). При этом оценка квазиупругих коэффициентов, полученных по аппроксимациям экспериментальной силовой характеристики и характеристик, рассчитанных с помощью данного метода и представленных на рис. 6, позволяет сделать вывод, что наиболее достоверным является расчет магнитных сил по тензору напряжений Максвелла (расхождение не превышает 5 %). Поэтому для дальнейших исследований подобного типа может быть выбран именно этот подход.

## 6. Сопоставление жесткостных характеристик МППКМ двух типов.

Анализировались характеристики МПКМП с различными направлениями намагниченности, схемы которых приведены на рис. 1, а и 1, г, при прочих равных геометрических и физических параметрах. Для МППКМ с радиальной намагниченностью постоянных кольцевых магнитов (рис. 1г) экспериментальные данные представлены в [5, с. 121], где также описана модель и методика выполнения самого эксперимента. Геометрические размеры составных

частей МППКМ – диаметры внешнего кольца  $D_1 = 53,35$  мм и  $D_2 = 20,32$  мм, а внутреннего –  $D_3 = 12,57$  мм, толщина внешнего и внутреннего кольца –  $h = 6,99$  и  $6,35$  мм соответственно. Внутренне кольцо изготовлено из сплава Ceramic 8 с остаточной индукцией  $B_r = 0,385$  Тл и коэрцитивной силой  $H_c = 263000$  А/м, внешнее – из сплава Ceramic 5 с  $B_r = 0,38$  Тл и  $H_c = 192000$  А/м.

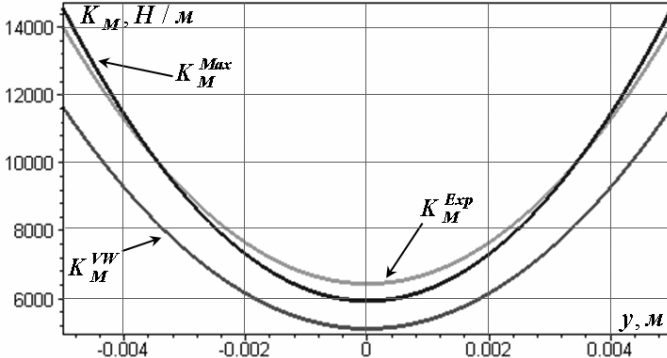


Рисунок 6 – Зависимость квазиупругих коэффициентов МППКМ от радиального смещения подвижного магнита

Зависимость магнитной силы и квазиупругого коэффициента от радиального смещения центра масс роторного магнита (координата  $y$ ) представлена на рис. 7. Здесь круглыми маркерами обозначены экспериментальные данные для МППКМ с радиальной намагненностью ( $F_M^{Exp}$ ,  $K_M^{Exp}$ ), а квадратными – расчетные для МППКМ с осевой намагненностью ( $F_M^{Max}$ ,  $K_M^{Max}$ ).

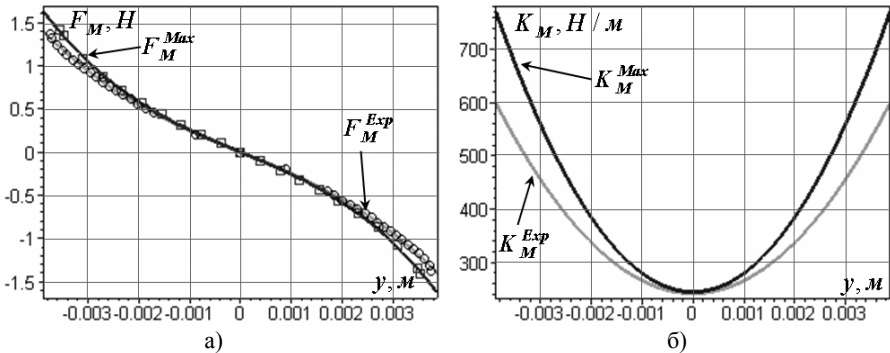


Рисунок 7 – Графики характеристик двух типов МППКМ с различным направлением намагненности при прочих равных параметрах:  
а) магнитная сила, б) квазиупругий коэффициент

Анализ характеристик позволяет сделать вывод, что разница между магнитными силами для этих двух типов МППКМ не превышает 1 % при одинаковых отклонениях роторного магнита, лежащих в пределах половины номинального зазора с одной стороны, то есть  $-(D_2 - D_3)/4 < y < (D_2 - D_3)/4$ . Однако, различие между квазиупругими коэффициентами в том же диапазоне отклонений подвижного кольца достигает 12 %, причем жесткость МППКМ с радиальной намагниченностью постоянных кольцевых магнитов меньше. Но вблизи нулевого отклонения, то есть при центральном положении внутренне-го магнита, квазиупругие коэффициенты практически совпадают.

При увеличении отклонения вплоть до половины полного номинального зазора разница между магнитными силами при одинаковых смещениях возрастает до 12 %, а между квазиупругими коэффициентами – до 20 %.

Таким образом, данные результаты свидетельствуют о предпочтительности использования в МППКМ постоянных магнитов с осевой намагниченностью для обеспечения большей жесткости опор при прочих равных геометрических и физических параметрах.

**7. Способ изменения жесткости МППКМ.** На рис. 8 приведены эквипотенциальные линии магнитного поля для векторного магнитного потенциала для МППКМ с осевым (рис. 8, а) и радиальным (рис. 8, б) направлением намагниченности, схемы которых представлены на рис. 1, а и рис. 1, г соответственно.

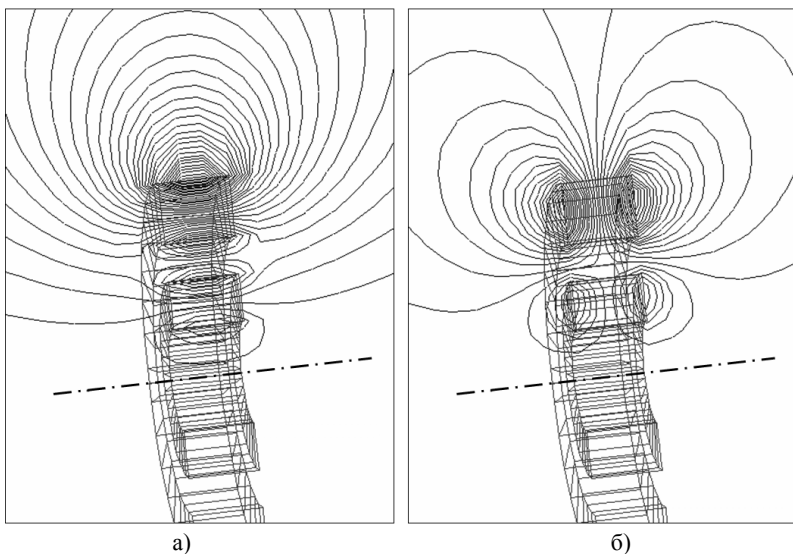


Рисунок 8. Эквипотенциальные линии магнитного поля для векторного потенциала а) МППКМ с осевой намагниченностью, б) МППКМ с радиальной намагниченностью

Изменение жесткостных характеристик этих МППКМ может быть достигнуто созданием дополнительного постоянного электромагнитного поля той же конфигурации что и конфигурация поля создаваемого внешним (статорным) кольцевым постоянным магнитом. Причем при совпадении направленных силовых линий этих магнитных полей жесткость МППКМ будет увеличиваться, а при обратном направлении – уменьшаться.

Так, например, для МППКМ с осевой намагниченностью (рис. 8, а) такое поле может быть создано с помощью электромагнита, обмотка которого навита на внешней цилиндрической поверхности кольцевого магнитопровода в окружном направлении, а оси и центры масс обмотки, магнитопровода и неподвижного кольцевого постоянного магнита совпадают.

**Заключение.** Предложенная методика расчета, основанная на применении МКЭ, может использоваться для определения силовых характеристик и квазиупругих коэффициентов (коэффициентов жесткости) МППКМ с достаточной точностью, что подтверждено экспериментально. При этом, качество построение расчетной модели позволяет обеспечить общую вычислительную погрешность, состоящую из погрешности расчета магнитных сил с помощью МКЭ и погрешности связанной с аппроксимацией, не превышающую 3%.

Основным достоинством данной методики является возможность ее применения вообще для любого типа МППМ, а не только для радиальных МППКМ, так как используемый метод практически не накладывает ограничений на геометрию расчетных моделей.

Применение описанной методики определения жесткостных параметров МППМ позволяет повысить адекватность математических моделей роторов на комбинированных магнитно-электромагнитных подшипниках.

В свою очередь, использование предложенного способа изменения жесткости МППКМ позволит при приближении к критическим оборотам в процессе разгона гибкого ротора до номинальных оборотов вращения включением электромагнитов (подачей на них постоянного напряжения) увеличить или уменьшить жесткость опор и тем самым избежать резонансных режимов, на которых происходят колебания ротора как твердого тела.

**Список литературы:** 1. *Журавлев Ю.Н.* Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 2. *Мартыненко Г.Ю.* Исследование устойчивых движений роторов на электромагнитных подшипниках при различных вариантах управления с помощью имитационной вычислительной модели / Интегрированные технологии и энергосбережение. – Харьков: ХГПУ. – 2000. – № 2. – С. 88-96. 3. *S.Earnshaw*, On the nature of molecular forces which regulate the constitution of luminiferous ether / Transactions of Cambridge Philosophie Society. – 1842. – V–VII, Part I. – P. 97–112. 4. *R.Bassani*, Earnshaw (1805–1888) and Passive Magnetic Levitation / Meccanica. – Springer, 2006. – № 41. – P. 375–389. 5. *R.Jansen and E.DiRusso* Passive Magnetic Beating With Ferrofluid Stabilization. – NASA Technical Memorandum 107154, 1996. – 154 p. 6. *W.Brounbeck* Freischwebende Körper in elektrischen und magnetischen Feld. – Z. Phys., 1939. – 112. – P. 753–763. 7. *W.Brounbeck*, Frein schweben diamagnetischen Körper in Magnetfeld. – Z. Phys., 1939. – 112. – P. 764–769. 8. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники:

Учебник для студентов энергетических и электротехнических ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. **9.** *К. Шимони* Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с. **10.** *Jn. Volakis, A. Chatterjee, L. Kempel*, Finite element method for electromagnetics. – IEEE Press, 1996. – 344 p. **11.** *П. Сильвестер, Р. Феррари* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с. **12.** *J. Coulomb and G. Meunier*, Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic for Electric Force and Torque Calculation / IEEE Transactions on Magnetics, 1984. – Vol. Mag-2D, № 5. – P. 1894-1896. **13.** *Кузнецов В.А., Ялунина Г.В.* Метрология (теоретические, прикладные и законодательные основы): Учеб. Пособие. – М.: ИПК Издательство стандартов, 1998. – 336 с. **14.** *Jn. Crawford*, Interpreting Your Analysis Results: Spend time reviewing the answers to understand what they really mean / ANSYS Solutions. – Spring 2004. – P. 36-38. **15.** *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 831 с. **16.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. *В.Н. Челомей* (пред). – М.: Машиностроение, 1979. – Т.2: Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. *И.И. Блехмана*. – 351 с.

*Поступила в редколлегию 14.09.2007*

УДК 534-16: 534.015

**Ю.В. МИХЛИН**, докт. физ.-мат. наук; **Г.В. РУДНЕВА**, канд. физ.-мат. наук;  
**Т.В. БУНАКОВА**; НТУ «ХПИ»

## **ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, СОДЕРЖАЩИХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЙ ГАСИТЕЛЬ**

Розглядається перехідний процес у системі, що містить лінійний осцилятор і приєднаний істотно нелінійний елемент із відносно невеликою масою. Враховано тертя. Метод багатьох масштабів використаний для опису перехідного процесу в розглянутій системі. Спостерігається перекачування енергії зі початково-збудженої лінійної системи в нелінійний гаситель. Подібне дослідження проведено й для системи, що містить лінійний осцилятор і вібро-ударний гаситель з відносно малою масою. Розглянутий також перехідний процес у такій системі під дією зовнішнього періодичного збудження. Чисельне моделювання підтверджує ефективність аналітичних побудов в обох системах.

Transient in a system containing a linear oscillator, linearly coupled to an essentially nonlinear attachment with a comparatively small mass, is considered. A damping is taken into account. The multiple scales method is used to construct a process of transient in the system under consideration. A transfer of energy from the initially perturbed linear subsystem to the nonlinear absorber can be observed. A similar construction is made to describe the transient in a system which contains a linear oscillator and a vibro-impact attachment with a comparatively small mass. A transient in such system under the external periodical excitation was considered too. Numerical simulation confirms an efficiency of the analytical construction in both systems.

**1. Введение.** Исследование переходного процесса играет важную роль в инженерии, в частности, в проблемах гашения. За последние несколько лет различные новые устройства применялись для гашения механических коле-