уравнений небольшого порядка, равного числу двойных узлов. Эффективность методики может быть существенной при решении последовательности контактных задач, характерных для динамических расчетов.

Применение методики показано при решении задачи о деформировании вала с трещиной под действием веса при его медленном вращении.

Список литератури: **1.** *Грабовски Б.* Вибрационные свойства ротора турбины с поперечной трещиной // Конструирование и технология машиностроения. – 1980. – № 1. – С. 98-104. **2.** *Шульженко Н.Г.* Влияние излома упругой оси ротора с поперечной трещиной на его вибрационные характеристики / *Н.Г.Шульженко, Г.Б.Овчарова* // Проблемы прочности. – 1997. – № 4. – С. 82-89. **3.** *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). **4.** *Матвеев В.В.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях / *В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский* // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23. **5.** Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. *С.Атлури.* – М.: Мир, 1990. – 392 с. **6.** *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения / *М.Сиратори, Т.Миеси, Х.Мацусита.* – М.: Мир, 1986. – 334 с. **7.** Асаенок А.В. Трехмерное моделирование деформаций и вопросы прочности объемных элементов поворотнолопастных гидротурбин / *А.В. Асаенок, Б.Ф. Зайцев* // Вестник науки и техники. – Харьков: Харьк. дом науки и техники, 1997. – Вып. 1. – С. 10-18. **8.** *Асаенок А.В.* Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций / *А.В.Асаенок, Б.Ф.Зайцев, Н.Г.Шульженко* // Проблемы машиностроения. – 2003. – **6**, № 3. – С. 58-63.

Поступила в редколлегию 19.07.2007

УДК 539.3

Р.Е.КОЧУРОВ; ***К.В.АВРАМОВ***, докт.техн.наук; ***И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ***; НТУ «ХПИ»

К ПРОЩЕЛКИВАНИЮ ПОЛОГИХ АРОК

У роботі проведено чисельне моделювання динамічної поведінки положистої арки в процесі прощиглення. Для моделювання використовувався метод сіток та процедура чисельного інтегрування.

The snap-through motions of shallow arch are simulated in this paper. Net method and direct numerical integrations are used to study snap-through motions.

1. Состояние и актуальность темы. Пологие арки используются в строительстве, машиностроении, аэрокосмической технике как составные части более сложных конструкций. Арки часто используются в электромеханических системах. Пологие арки могут использоваться как элемент, изолирующий от вибраций, и как гаситель колебаний [1, 2, 3].

Много усилий было предпринято для исследования статики и динамики пологих арок. Тимошенко рассматривал шарнирно-опертую синусоидальную арку под действием распределенной поперечной нагрузки [4]. Он определил величину критической загрузки, которая приводит к прощелкиванию. Динник и Григолюк [5, 6] прощелкивание пологих арок представляли в виде суперпозиции симметричной и асимметричной моды. Фанг и Каплан [7] обобщили результаты статического анализа пологих арок на случай произвольных поперечных сил, включая сосредоточенные нагрузки. Одни из первых исследований по анализу динамики прощелкивания пологой арки представлены в работах [8, 9]. В частности, достаточные условия устойчивости и неустойчивости пологих арок под действием статических нагрузок выведены в [8]. Ханг [10] рассматривал асимметричные движения прощелкивания пологих арок под действием высокочастотных нагрузок. Он высокочастотные движения прощелкивания разделял на быстрые и медленные движения. В монографии [11] представлена асимптотическая процедура для анализа движений прощелкивания.

В этой статье используется прямое численное моделирование с помощью конечных разностей нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Такой анализ позволяет исследовать явление прощелкивания пологой арки между несколькими положениями статического равновесия. Цель такого расчета является выявление форм колебаний, которые принимают участие в динамическом прощелкивании пологой арки.

В основном, при исследовании явления прощелкивания пологой арки динамической модели принудительно навязываются колебания по одной, или двум балочным формам. Однако, прощелкивание описывается существенно нелинейным уравнением в частных производных и, конечно, не всегда может быть представлено в виде конечной суммы балочных функций.

2. Постановка задачи и метод ее решения. Рассмотрим пологую арку, представленную на рис. 1. Ее свободные колебания описываются следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных:

$$Hy_{xx} - EI\left(y - y_0\right)_{xxxx} = 0\,; \tag{1}$$

$$H = -\frac{EA}{2L}\int_0^L \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2\right)dx\,,$$

где EI – жесткость балки на изгиб; $y(x,t)$ – прогиб балки; H – продольная сила (распор); A – площадь поперечного сечения; $y_0(x)$ – начальная погибь арки.

В этой работе будет исследоваться прощелкивание арки между тремя положениями статического равновесия. Поэтому амплитуды колебаний арки соизмеримы с радиусом инерции поперечного сечения.

Для дальнейшего анализа введем безразмерные переменные и параметры:

$$u_0 = \frac{y_0}{\lambda_1};\quad u = \frac{y}{\lambda_1};\quad \xi = \frac{\pi}{L}x;\quad \tau = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{E}{\rho}}\lambda_1 t\,. \tag{2}$$

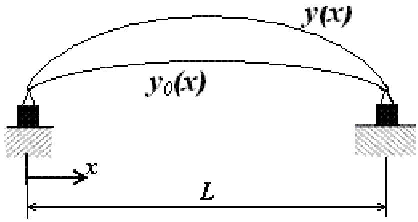


Рисунок 1 – Пологая арка

Тогда динамическая система (1) примет следующий вид:

$$\frac{u_{\xi\xi}}{2\pi}\int_0^{\pi}(u_{0,\xi}^2 - u_{\xi}^2)d\xi + \varepsilon(u - u_0)_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\tau\tau} = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon = {r^2}\!\big/\!{\lambda_1^2}$, r – радиус инерции поперечного сечения.

В этой статье рассматривается шарнирно опертая арка и защемленная с обоих концов арка. При исследовании шарнирно опертой балки начальная погибь берется в виде:

$$u_0(\xi) = \sin(\xi)\ . \tag{4}$$

В анализе динамики защемленной арки начальная погибь принимается в виде:

$$u_0 = K_4(\lambda_1)K_3\left(\lambda_1\frac{\xi}{\pi}\right) - K_3(\lambda_1)K_4\left(\lambda_1\frac{\xi}{\pi}\right), \tag{5}$$

где $\lambda_1 = 4{,}730$; K_3, K_4 – функции Крылова [12].

Для решения краевой задачи используем метод конечных разностей. Введем сетку по пространственной координате ξ с постоянным шагом h.

$$\xi_i = ih\ ; \qquad u_i = u(\xi_i)\ . \tag{6}$$

Для каждого внутреннего узла ($i = 1\ldots n$) составим разностное уравнение, заменив в точке с координатой ξ_i производные, входящие в уравнение движения разностными соотношениями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_i \approx \frac{(u_{i-1} - u_i)}{h};$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right|_i \approx \frac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2};$$

$$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}\right|_i \approx \frac{(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})}{h^4}.$$

Для приближенного вычисления интеграла, входящего в уравнение (3), воспользуемся формулой трапеций. Подставив выражения для производных и начальной погиби в уравнение (3) получим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2\overline{u}}{d\tau^2}+f(\overline{u},u_{-1},u_0,u_{n+1},u_{n+2})=0\ , \tag{7}$$

$$\overline{u}=[u_1,u_2,...,u_n]\,.$$

Полученная система уравнений дополняется граничными условиями. Для шарнирно опертой арки граничные условия таковы:

$$u(0)=u(\pi)=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=\pi}=0\,. \tag{8}$$

Для защемленной с обоих концов арки граничные условия принимают следующий вид:

$$u(0)=u(\pi)=\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi=\pi}=0.$$

Дискретная динамическая система, описывающая прощелкивание пологой арки с начальной погибью (4), имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_i}{\partial\tau^2}+\frac{1}{h^4}\left(u_{i-2}-4u_{i-1}+6u_i-4u_{i+1}+u_{i+2}\right)-\sin\left(\xi_i\right)-\\ -\frac{1}{4\pi h}\left(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}\right)\times\\ \times\sum_{j=1}^{n+1}\left[\frac{1}{h^2}\left((u_{j-2}-u_{j-1})^2+(u_{j-1}-u_j)^2\right)-\cos^2(\xi_{j-1})-\cos^2(\xi_j)\right]=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Динамическая система (7) с $\varepsilon = 0{,}02$ численно интегрировалась методом Рунге-Кутта. При анализе колебаний шарнирно опертой арки начальные условия для численного интегрирования выбирались в следующем виде:

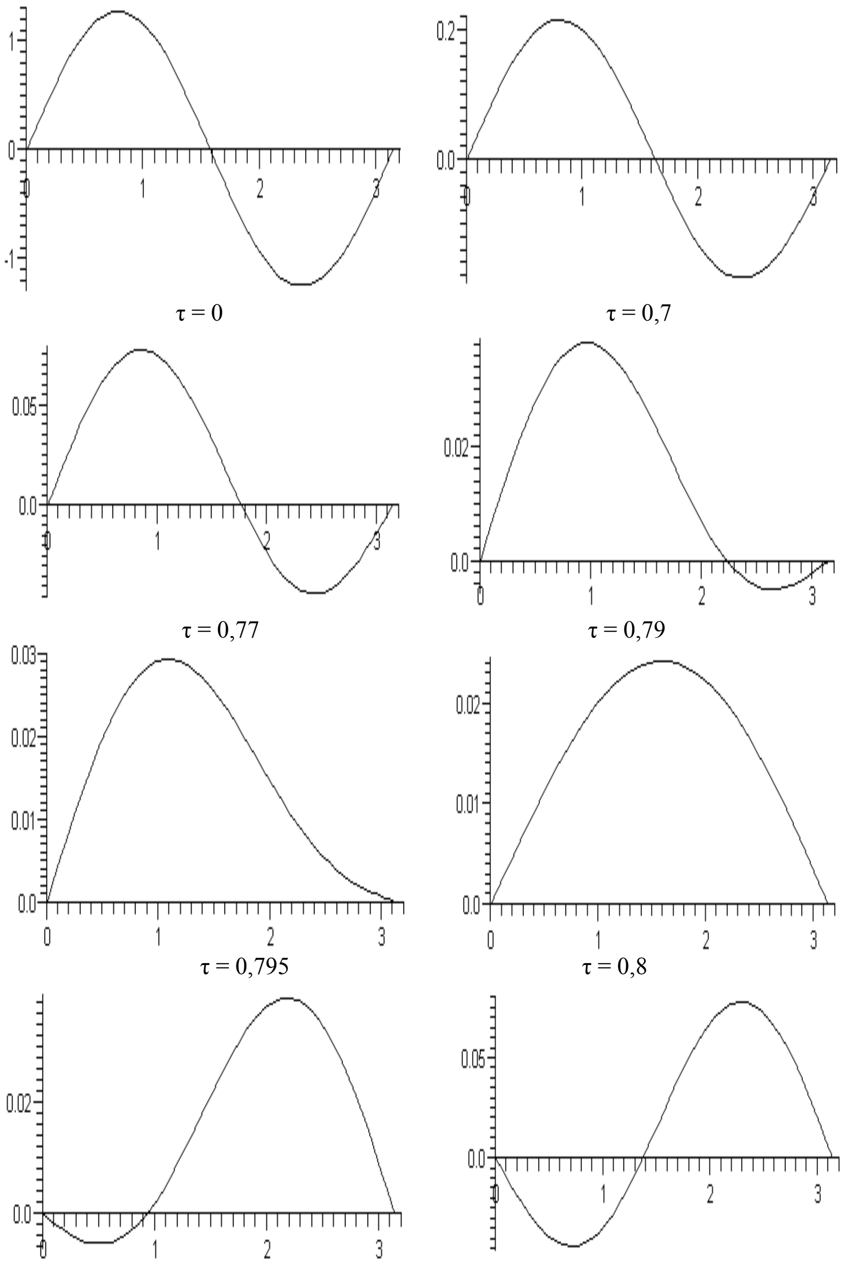
1) $u_i(0)=\theta_1\sin(\xi_i)+\theta_2\sin(2\xi_i)$, $\quad\dot{u}_i(0)=0$, $\quad\theta_1=2$, $\quad\theta_2=0$;

2) $u_i(0)=\theta_1\sin(\xi_i)+\theta_2\sin(2\xi_i)$, $\quad\dot{u}_i(0)=0$, $\quad\theta_1=0{,}024$, $\quad\theta_2=1{,}263$;

3) $u_i(0)=0$, $\quad\dot{u}_i(0)=\theta_1$, $\quad\theta_1=2$.

Как показали результаты численного интегрирования, в случае 1 в прощелкивании принимает участие только первая форма колебаний шарнирно опертой балки. Динамическое поведение системы для случаев 2, 3 представлено на рисунках 2, 3 соответственно. Как видно из рисунков в случае 2 в колебания арки принимают участие только первая и вторая формы колебаний. В случае 3 в колебаниях арки участвуют большое число форм свободных колебаний.

Для защемленной с двух сторон арки начальные условия для интегрирования выбирались в следующем виде:



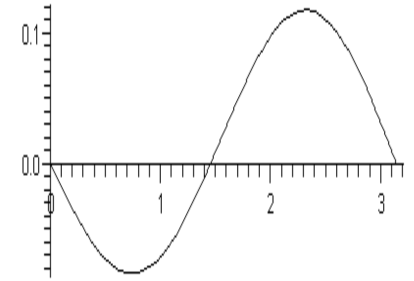
$\tau = 0$ $\tau = 0{,}7$

$\tau = 0{,}77$ $\tau = 0{,}79$

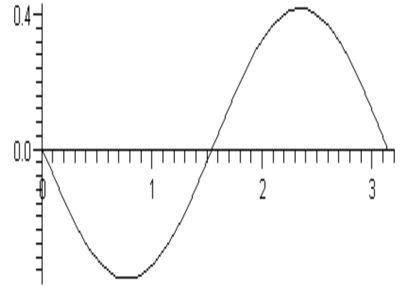
$\tau = 0{,}795$ $\tau = 0{,}8$

$\tau = 0{,}81$ $\tau = 0{,}83$

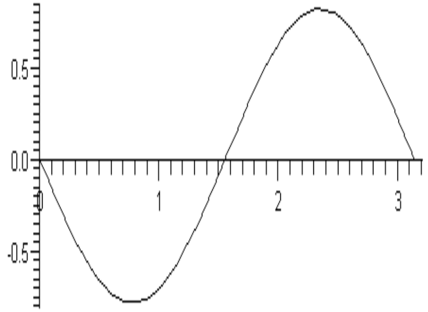
Рисунок 2 – Формы свободных колебаний шарнирно опертой арки



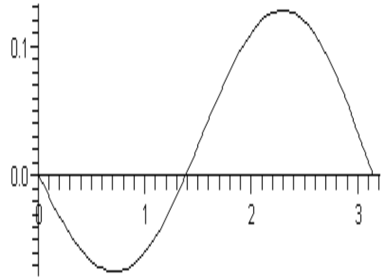
τ = 0,85



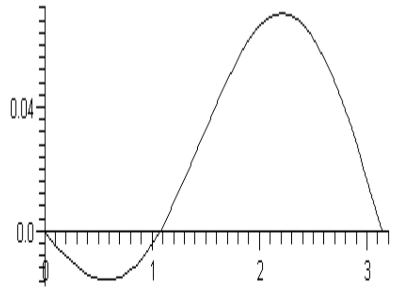
τ = 1



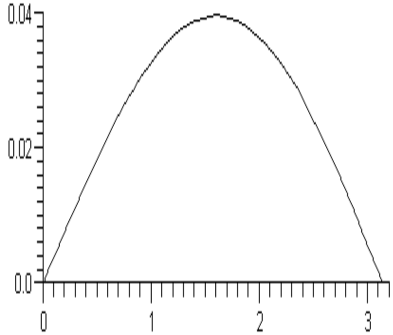
τ = 2



τ = 2,35

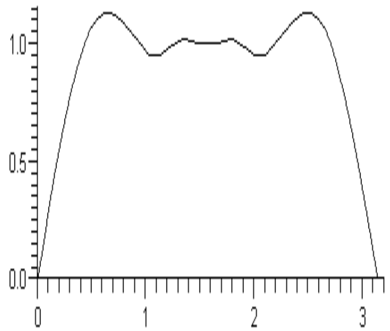


τ = 2,38

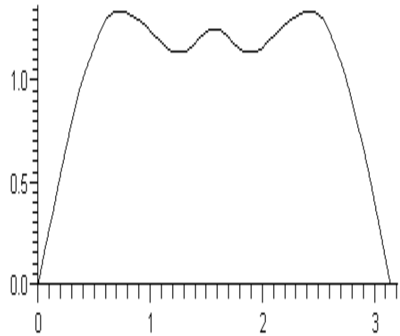


τ = 2,4

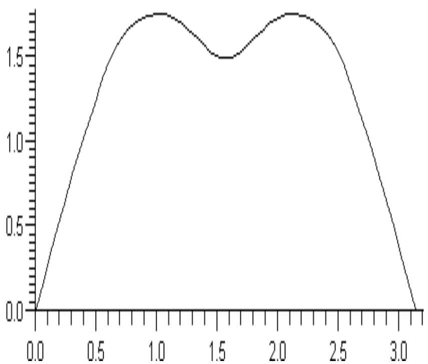
Продолжение рис. 2



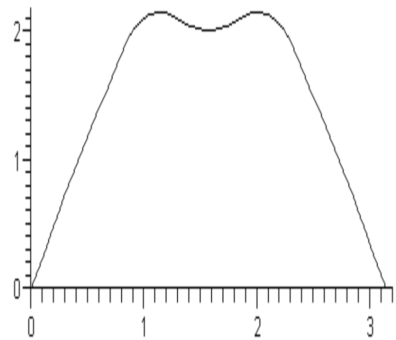
τ = 0,5



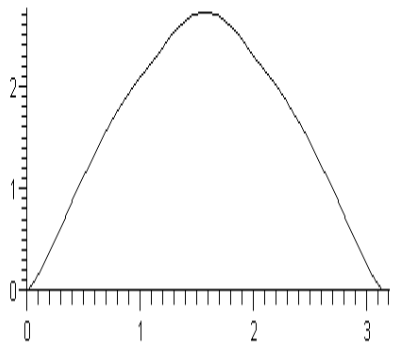
τ = 0,6



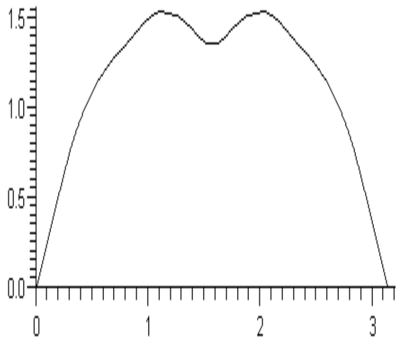
τ = 0,8



τ = 1

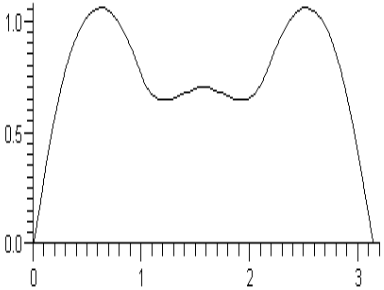


τ = 1,2

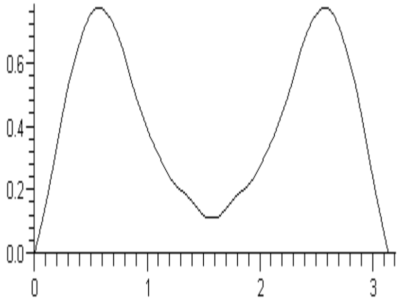


τ = 2,1

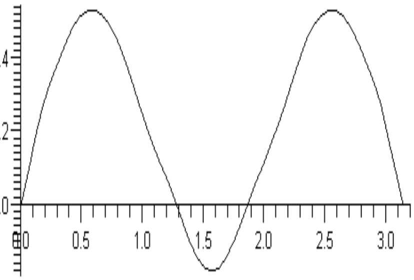
Рисунок 3 – Формы свободных колебаний шарнирной арки



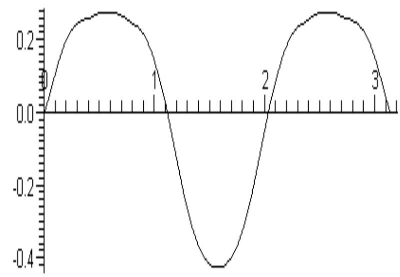
τ = 2,4



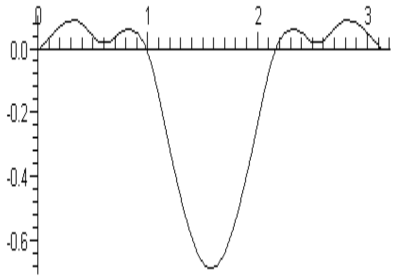
τ = 2,6



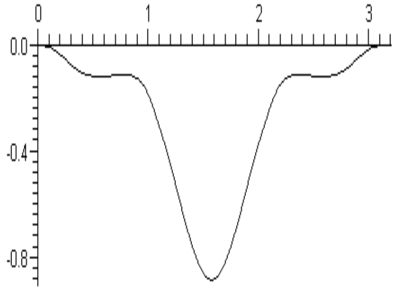
τ = 2,7



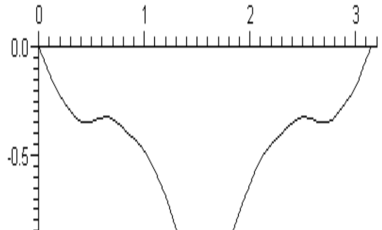
τ = 2,8



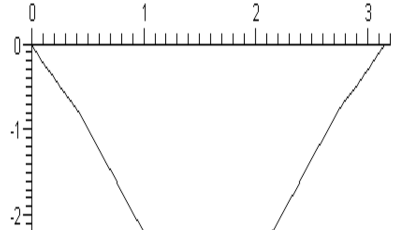
τ = 2,9



τ = 2,98



τ = 3,1



τ = 4,4

Продолжение рис. 3

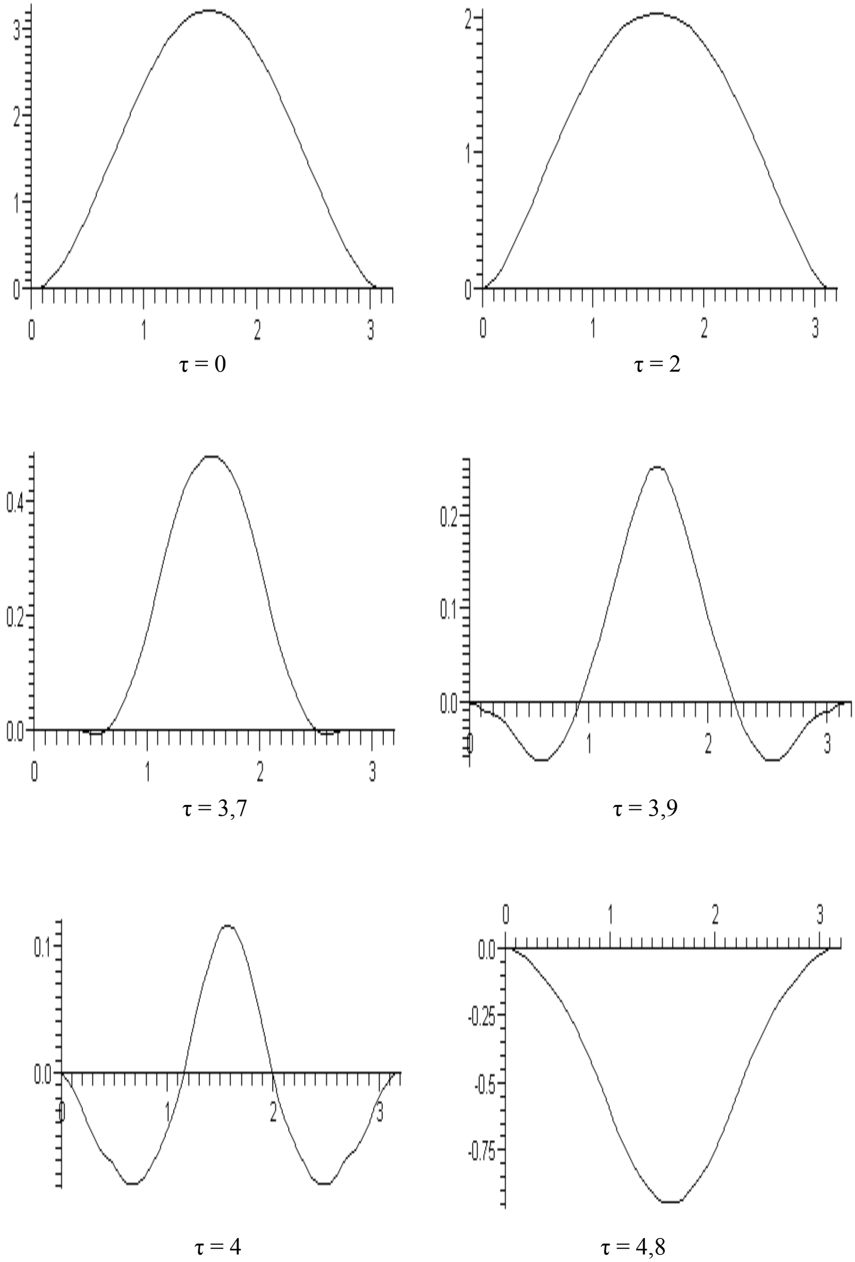


Рисунок 4 – Формы свободных колебаний жестко защемленной арки

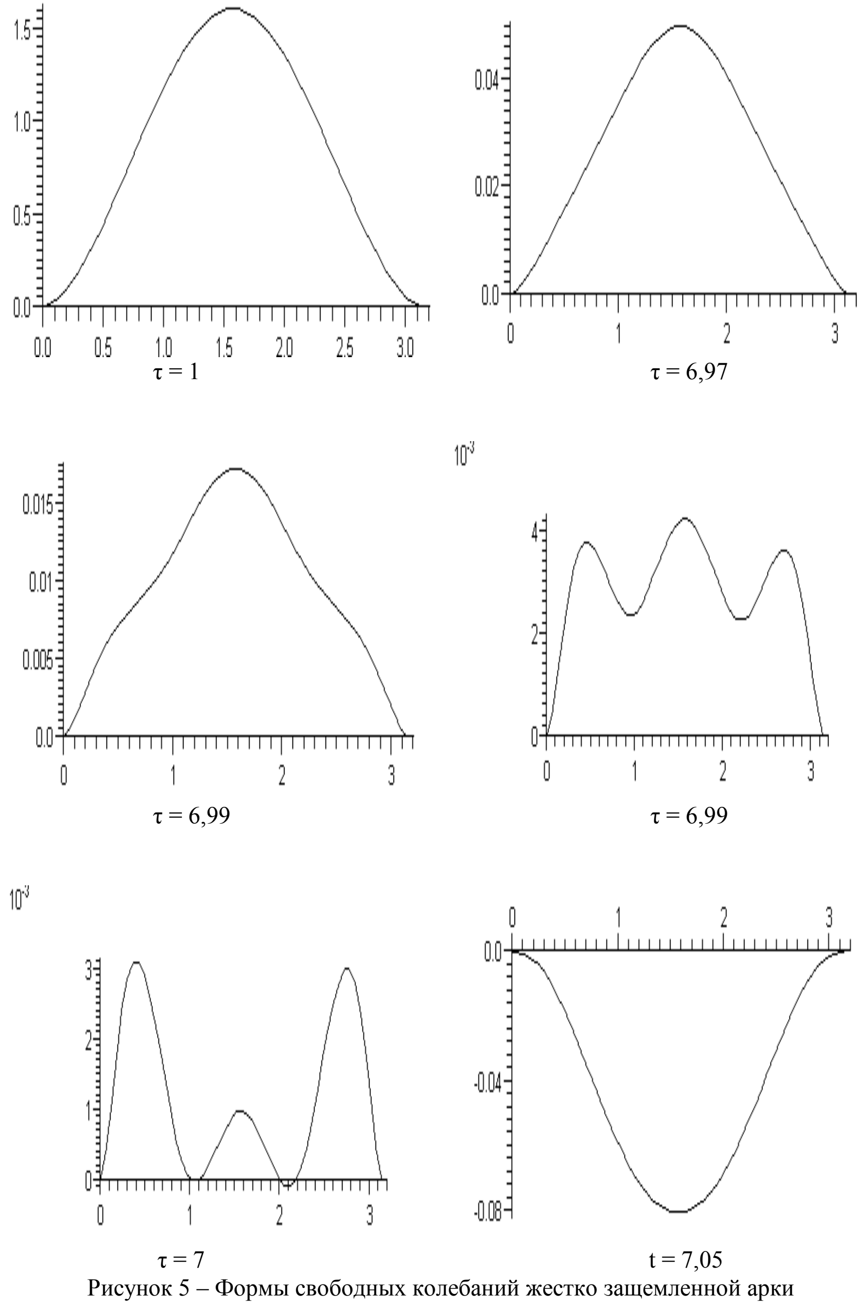


Рисунок 5 – Формы свободных колебаний жестко защемленной арки

4) $u_i(0) = 2\sin\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + 2A_1\cos\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + 2B_1 sh\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + 2C_1 ch\frac{\lambda_1}{l}\xi_i, \quad \dot{u}_i(0) = 0$;

5) $u_i(0) = 0, \quad \dot{u}_i(0) = \sin\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + A_1\cos\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + B_1 sh\frac{\lambda_1}{l}\xi_i + C_1 ch\frac{\lambda_1}{l}\xi_i$.

На рисунках 4, 5 представлено динамическое поведение системы для случав 4 и 5 соответственно. Как видно из этих рисунков в колебаниях системы принимает участие большое число форм свободных колебаний защемленного с двух сторон стержня.

3. Заключение. Из проделанного численного анализа можно сделать следующие выводы. При колебаниях защемленной с двух сторон арки в движение чаще всего вовлекается большое число форм свободных колебаний защемленного с двух сторон прямого стержня, если начальные перемещения и начальные скорости задаются по первой форме колебаний защемленного с двух сторон стержня. Если арка с двух сторон шарнирно оперта, то вовлечение мод шарнирно опертого стержня выше второй при задании начальных скоростей и начальных перемещений по первым двум формам колебаний прямого шарнирно опертого стержня является редкостью. Поэтому при исследовании движений прощелкивания представление колебаний в виде конечного разложения по формам собственных линейных колебаний соответствующего прямого стержня возможно только для шарнирно опертого с двух сторон стержня. Если при исследовании прощелкивания пологой арки применяется разложение по собственным формам, необходимо дополнительное прямое численное интегрирование для подтверждения результатов.

Список литературы: **1.** *L.N.Virgin, R.B.Davis* Vibration isolation using buckled struts // 2003 Journal of Sound and Vibration, **260**. – P. 965-973. **2.** *K.V.Avramov, Yu.V.Mikhlin* Snap-through truss as a vibration absorber // 2004 Journal of Vibration and Control **10**. – P. 291-308. **3.** *K.V.Avramov, Yu.V.Mikhlin* Snap-through truss as an absorber of forced oscillations // 2006 Journal of Sound and Vibration **29**. – P. 705-722. **4.** *S.P.Timoshenko* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // 1935 ASME J. Appl. Mech. **2**. – P. 17-20. **5.** *Динник А.Н.* Устойчивость арок. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 156 с. **6.** *Григолюк Э.И.* К расчету устойчивости пологих арок // Инженерный сборник. – 1951. –Т. 9. – С.177-200. **7.** *Y.C.Fung, A.Kaplan* Buckling of Low Arches or Curved Beams of Small Curvature // NACA Technical Note 2840. – 1952. **8.** C.S.Hsu Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads // 1968 ASME Journal of Appl. Mech. **33**. – P. 31-39. **9.** *C.S.Hsu, C.T.Kuo, R.H.Plant* Dynamic stability criteria for clamped shallow arches under timewise step loads // 1969 AIAA Journ. **7**, 1925 – 1931. **10.** *N.C.Hung* Dynamic buckling of some elastic shallow structures subjected to periodic loading with high frequency // 1972 Int. J. Solids and Structures **8**, 315-326. **11.** *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 280 с. **12.** Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972.

Поступила в редколлегию 19.03.2007