

Список литературы: 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. –Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Курпа Л.В., Морачковская И.О., Склепус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, №1-2. – 2001. – С. 58-77. 5. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 6. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М., 1963. – 880 с. 7. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с.

Поступила в редколлегию 1.06.2006.

УДК 539.3

Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук; **А.Н.ТКАЧУК**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

О ВЛИЯНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ НА ХАРАКТЕР КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ

Стаття присвячена дослідженню типів взаємодії тонкої циліндричної оболонки з жорстким бандажем, посадженням без попереднього натягу. Відшукані можливі конфігурації зон контакту та отримані розміри контактних зон при різних параметрах оболонки з урахуванням різних гіпотез деформування. Отримані результати відображені у вигляді діаграм на площині варіюваних параметрів.

The article is devoted to research of contact interaction between thin cylindrical shell and rigid bandage. All possible types of contact interaction and lengths of contact zones are obtained for different shell parameters and shell formulations. The obtained results are given by means of diagrams on parameter plane.

Введение. Как известно, в контактных задачах гипотезы деформирования оболочек существенно влияют на результат моделирования, а их применение приводит к различным качественным особенностям [1-8]. Так, решения, полученные с помощью гипотез Кирхгофа-Лява (далее – классическая теория оболочек), имеют сосредоточенные силы на границах зон контакта, а также возможно касание в точке или по линии с ненулевой контактной реакцией. Учет поперечного сдвига устраняет скачок в перерезывающей силе, а касание в точке или по линии реализуется с нулевой контактной силой. Однако на границах зон контакта контактное давление не обращается в ноль. Одной из причин этого является, например, то, что кинематические условия контакта записывается относительно перемещения срединной поверхности, а не лицевой, по которой и происходит контакт. Теории с учетом поперечного обжатия позволяют в первом приближении учесть этот фактор, и при их применении характерно обращение в ноль контактного давления на границах зон контакта и в точках касания. Отдельно следует отметить особенности решения при контакте в угловых точках, где классическая теория и теория с уче-

том сдвига дают сосредоточенную реакцию, теория с учетом обжатия – конечное контактное давление. Данные особенности приводят также к тому, что конфигурации зон контакта для одной и той же задачи, решенной с применением разных моделей, могут отличаться.

Вопросы, связанные с возможными конфигурациями зон контакта, рассмотрены в работах [1, 2, 8]. Так, было показано [8], что для бандаж контакт по всей ширине для классической теории оболочек и типа Тимошенко не реализуется.

При изменении исходных параметров задачи конфигурации зон контакта существенно изменяются, что усложняет решение, так как для идентификации конфигурации зон контакта необходимо перебрать все возможные их варианты. С учетом этого актуальной является задача исследования изменения конфигурации зон контакта при варьировании параметров и типа используемой модели оболочки. Ниже рассмотрены модели оболочек на основе классической теории, теории типа Тимошенко и теории Рейсснера-Власова, учитывающей обжатие оболочки.

Постановка задачи. В качестве объекта исследования была выбрана задача о контакте жесткого бандаж и бесконечной цилиндрической оболочки. Рассматривается тонкостенная изотропная цилиндрическая оболочка радиусом R и толщиной h , нагруженная постоянным внутренним давлением p (рис. 1). В недеформированном состоянии на оболочку посажен без зазора и натяга массивный бандаж шириной $2a$, односторонний

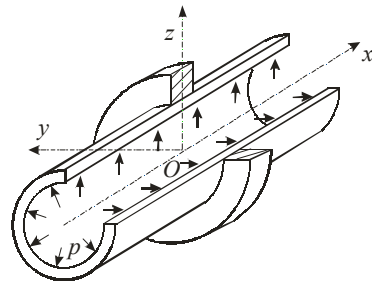


Рисунок 1 – Цилиндрическая оболочка с посаженным бандажом

контакт с которым стесняет деформирование оболочки. Наличием трения в контакте и продольным усилием в оболочке пренебрегается. Задача решается в осесимметричной постановке с учетом симметрии относительно плоскости yoz .

Ставится задача обнаружения возможных конфигураций зон контакта, а также определения соотношения параметров, при которых они реализуются.

Теории оболочек. Для решения контактных задач предложено множество теорий оболочек, в основу которых положены различные гипотезы деформирования. Кратко отметим основные соотношения данных теорий оболочек: дифференциальные уравнения изгиба в области контакта и свободной от контакта; физические соотношения; граничные условия и условия сопряжения решений на соседних участках.

Обозначим прогиб оболочки через w , а для теории типа Тимошенко поворот сечения – через γ . На промежутке, свободном от контакта, прогиб удовлетворяет уравнению осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки вида [3]

$$Lw = p + Y \frac{d^2 p}{dx^2}, \quad (1)$$

где p – величина внутреннего давления, L – оператор задачи, общий вид которого:

$$L = D \frac{d^4}{dx^4} + P \frac{d^2}{dx^2} + K, \quad (2)$$

где D, P, K, Y – параметры оболочки, сведенные в таблице. Здесь же приведены физические соотношения, выражающие связь между моментами M , перерезывающими силами Q и перемещениями.

Общее решение в случае постоянной нагрузки на i -м участке оболочки представляется в виде:

$$w_i = e^{-sx} \left(c_1^{(i)} \cos rx + c_2^{(i)} \sin rx \right) + e^{sx} \left(c_3^{(i)} \cos rx + c_4^{(i)} \sin rx \right) + \frac{P}{K}. \quad (5)$$

Параметры оболочек и физические соотношения

| Тип теории | D | P | K | Y | M | Q |
|------------------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------|------------------------|------------------------|---|
| Классическая/ Рейсснера-Власова | $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ | 0 | $\frac{Eh}{R^2}$ | 0 | $D \frac{d^2 w}{dx^2}$ | $D \frac{d^3 w}{dx^3}$ |
| Типа Тимошенко | $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ | $\frac{Eh^3}{5R^2(1-\nu^2)}$ | $\frac{Eh}{R^2}$ | $\frac{h^2}{5(1-\nu)}$ | $D \frac{d\gamma}{dx}$ | $\Lambda \left(\gamma + \frac{dw}{dx} \right)$ |

Примечание: $\Lambda = 5hG/6$ – жесткость на сдвиг; ν – коэффициент Пуассона, а E – модуль упругости материала оболочки.

В области контакта с бандажом модель для классической теории дает прогиб $w = 0$, давление на внутреннюю поверхность передается на бандаж через оболочку, контактное давление равно внутреннему. Для теории типа Тимошенко прогиб также равен нулю, однако дифференциальное уравнение (1) и физическое соотношение, содержащее Q , в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} Y \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \gamma = 0; \\ \Lambda \frac{d\gamma}{dx} = p + p_k, \end{cases} \quad (6)$$

где p_k – величина контактного давления. Из системы дифференциальных уравнений (6) определяется контактное давление и деформация сдвига. Система уравнений (6) имеет второй порядок, и общее решение для γ имеет вид:

$$\gamma = c_1 ch \frac{x}{\sqrt{Y}} + c_2 sh \frac{x}{\sqrt{Y}}. \quad (7)$$

Для теории с учетом обжатия учитываются деформации ε_z . Проинтегрировав ε_z от срединной поверхности до внешней, получаем дифференциальное уравнение в области контакта:

$$Lw = p - cw - b \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (8)$$

где для теории Рейсснера-Власова $c = \frac{32E}{13h}$, $b = \frac{\nu h^2 E}{8R}$ [3]. Уравнение имеет четвертый порядок, и его решением служит функция, определенная выражением (5).

При $x = 0$ имеется 2 граничных условия, выражающие симметрию решения:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \text{ и } Q = 0. \quad (9)$$

При $x = \infty$ реализуется безмоментное состояние:

$$M = 0 \text{ и } Q = 0. \quad (10)$$

Для оболочек условия совместности деформаций зависят от выбора модели деформирования:

- для классической теории и теории Рейсснера-Власова прогиб и производная от прогиба непрерывны;
- для теории типа Тимошенко прогиб и угол поворота непрерывны.

Условия сопряжения в точках выхода из контакта для классической теории требуют непрерывности момента, теории Рейсснера-Власова и теории типа Тимошенко – момента и перерезывающей силы.

Области контакта соответствуют точкам или отрезкам на оси $0x$. Если конфигурация зон контакта известна, то всю область задачи можно разбить на m промежутков (a_i, a_{i+1}) , внутри которых оболочка по всей длине свободно от контакта или находится в контакте, кроме того, в некоторых точках a_i оболочка может касаться бандажа. Для каждого промежутка решение можно представить в аналитическом виде, а на всем промежутке – в виде кусочно заданной функции $w = w_i$, $x \in (a_i, a_{i+1})$, при этом $a_0 = 0$, $a_{m-1} = a$, $a_m = \infty$.

Таким образом, задача сводится к отысканию границ контакта зон a_i и постоянных интегрирования, которые определяются из граничных условий ($x = 0$, $x = \infty$) и условий сопряжений ($x = a_i$, $i = 1, m - 1$).

Возможные типы решений. В случае классической теории и теории типа Тимошенко безотрывный контакт для рассматриваемой задачи невозможен [8]. Наличие трех и более зон отрыва энергетически невыгодно и для обеих теорий не реализуется. Таким образом, для классической теории и теории типа Тимошенко возможны 3 конфигурации зон контакта, для которых прогибы оболочек схематически изображены на рис. 2.

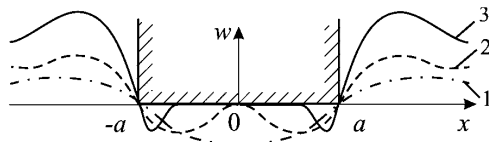


Рисунок 2 – Возможные конфигурации зон контакта: 1 – контакт в угловой точке бандажа; 2 – контакт в угловой точке бандажа и в центральной точке; 3 – контакт в угловой точке бандажа и на промежутке в центральной части

Для теории Рейсснера-Власова реализуется три качественных типа взаимодействия. Два из них аналогичны решениям 1, 3 (см. рис. 2) с тем отличием, что контактное взаимодействие в угловой точке происходит на отрезке конечной длины. Обозначим их как тип решения **а**, **в** соответственно. Третий тип реализуется при безотрывном контакте по всей ширине бандажа (тип **б**).

Диаграммы типов решений. Рассмотрим влияние параметров задачи на тип решения для классической теории. Для этого изучим первый тип решения.

Прогибы w_0 и w_1 определяются по формуле (5) при $s = r = \beta = \sqrt[3]{3(1-v^2)}/R^2 h^2$. Для определения 8 постоянных интегрирования используется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Решение этой системы уравнений для постоянных $c_{1,2,3,4}^{(i)}$ линейно зависит от величины давления и непрерывно от величины $\alpha\beta$. Как следствие, качественная картина взаимодействия не зависит от величины давления p , и прогиб в каждой точке непрерывно зависит от $\alpha\beta$.

Такой тип решения остается справедливым, если $w_0 < 0$ на промежутке $[0, a)$. С ростом безразмерной ширины бандажа $\alpha\beta$ прогиб в средней части уменьшается до тех пор, пока не достигает нуля и не появляется точка касания в центре бандажа. А это означает переход ко второму типу решения. Таким образом, переход от первого типа решения ко второму осуществляется через промежуточный тип решения, сочетающий свойства обоих типов решения, когда происходит касание с нулевой силой. Предельному состоянию соответствует условие касания при $x = 0$ $w_0 = 0$, из которого определяем предельное значение $\alpha\beta$, равное 0,9293.

Система уравнений для второго типа решения также обладает непрерывностью от параметра $\alpha\beta$. Переход от второго типа решения к третьему происходит через очередной промежуточный тип решения, когда кривизна в осевом направлении в точке касания достигает нуля, и соответствует значению параметра $\alpha\beta = 1,1872$. При дальнейшем увеличении $\alpha\beta$ область контакта расширяется, однако при этом форма решения на втором и третьем участке не меняется.

Таким образом, определена качественная картина для зон контакта:

- при $\alpha\beta < 0,9293$ реализуется первый тип решения;
- при $0,9293 < \alpha\beta < 1,1872$ – второй;
- при $\alpha\beta > 1,1872$ – третий.

Анализ качественной картины показал, что *сочетания параметров, обеспечивающих определенный тип решения, образуют сплошные области в пространстве параметров, а границы этих областей задаются множеством точек, соответствующих промежуточным решениям.*

Применим высказанную выше идею к модели типа Тимошенко. Рассмотрим решение для первого типа. Общее решение уравнения для прогибов w_0 и w_1 определяется по формуле (5) при $s^2 = \beta^2(1 + kh/R)$; $r^2 = \beta^2(1 - kh/R)$; где

$$k = \frac{3}{5\sqrt{3(1-v^2)}}.$$

Для определения 8-ми постоянных интегрирования имеется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Анализ этой системы уравнений показал,

что постоянные интегрирования $c_{1,2,3,4}^{(i)}$ и значение прогиба в каждой точке изменяется линейно по p и зависят непрерывно от $a\beta$ и $k h/R$.

Рассмотрим влияние на тип решения параметра $a\beta$ при фиксированном значении $k h/R$. Для узких бандажей реализуется первый тип решения. С увеличением $a\beta$ происходит касание при $x = 0$ и переход в промежуточный тип решения. Однако для модели типа Тимошенко контакт с гладким телом по линии дает нулевую реакцию, и с ростом ширины $a\beta$ сразу появляется зона контакта, то есть второй тип решения является промежуточным при переходе от первого к третьему. Такому состоянию соответствует условие касания при $x = 0$, исходя из которого определяется граница областей параметров, соответствующих решению первого и третьего типа.

Графически области можно представить в виде диаграммы (рис. 3). Для определенности здесь принято значение $\nu = 0,3$.

Для данной диаграммы характерно:

- при $h/r \rightarrow 0$ граница областей типов решения стремится к предельной точке для классической теории ($a\beta \approx 0,9293$);
- учет фактора сдвига приводит к уменьшению относительной ширины бандаж, при котором происходит переходное состояние между типами решения.

Более сложная картина наблюдается для теории Рейсснера-Власова. Рассмотрение начнем со случая безотрывного контакта.

Общее решение уравнения для прогиба w_0 определяется по формуле (5) при $s = r = \beta(1 + 32R^2/13h^2)^{0,25}$ и для w_0 при $s = r = \beta$. Для определения 8-ми постоянных интегрирования имеется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Решение этой системы непрерывно зависит от параметров h/R и $a\beta$.

Такой тип решения остается справедливым, если $w_0 > 0$ на промежутке $[0, a]$. При одновременном варьировании a и $a\beta$ возможен переход этого в тип решения с отрывом от бандаж в средней части или на периферии. Отрыв в средней части соответствует предельному решению с условием касания при $x = 0$, исходя из которого определяется граница типов решений (а) и (б).

Свободная от контакта зона начинает возникать в точке a_1 , в которой выполняются условия:

$$x = a_1 : w_0 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (11)$$

Исходя из этих условий определяется граница типов решений (б) и (в). Также рассматривается предельное решение при переходе (а) – (в). При этом необходимо определить 12 постоянных интегрирования и неизвестную ширину контакта a_1 . Для этого используется 4 граничных условия и 9 условий сопряжения.

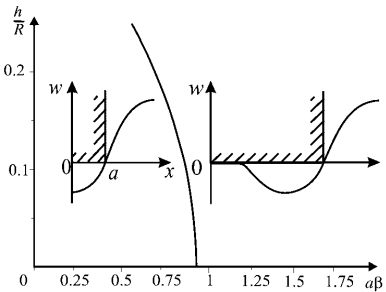


Рисунок 3 – Диаграмма решений для теории типа Тимошенко

В ходе численного исследования данной системы были получены границы областей типов решения (рис. 4). Сами области обозначены соответствующими типам решения буквами.

Для полученной диаграммы можно отметить следующие свойства:

- при $h/r \rightarrow 0$ граница областей (а) и (в) типов решения стремится к предельной точке для классической теории ($a\beta \approx 0,9293$);
- на диаграмме присутствует «тройная точка», в которой решение сочетает свойства всех трех типов, и при варьировании параметров в окрестности этой точки типы решений последовательно чередуются.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- качественная картина взаимодействия не зависит от величины давления p ;
- учет обжатия качественно изменяет конфигурацию зон контакта;
- зоны контакта при учете сдвига для тонких оболочек слабо зависят от h/r ;
- учет сдвига или обжатия регулирует модель Кирхгофа-Лява с параметром h/r , и при $h/r \rightarrow 0$ решения по уточненным моделям стремятся к решению по гипотезам Кирхгофа-Лява, а на диаграммах соответствующие границы имеют свои аналоги;
- найденные в широком диапазоне параметров точные решения могут служить эталоном при верификации численных моделей оболочек при решении контактных задач;
- полученные диаграммы дают возможность заранее определять конфигурацию решения при заданных геометрических параметрах.

Предложенный подход представляется целесообразным для качественного анализа поведения решений контактных задач тонкостенных элементов при наличии нескольких возможных типов распределения контактных зон и давлений.

Список литературы: 1. *Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 2. *Григолок Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с. 3. *Блох М.Б.* К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – том XIII. – Вып. 5. – С. 34-42. 4. *Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М.* Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с. 5. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. 6. *Василенко А.Т., Беспалова Е.И., Урусова Г.П.* О контактном взаимодействии между слоистой оболочкой вращения и жестким или упругим основанием // Прикладная механика. – 2005. – Том 41, № 5. – С. 68-75. 7. *Львов Г.И.* Взаимодействие упругопластической оболочки с жестким штампом // Прикладная механика. – 1980. – Том 16. – № 11. 8. *Детинко Ф.М., Фастовский В.М.* О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. – 1975. – Том II, вып. 2. – С.124-126.

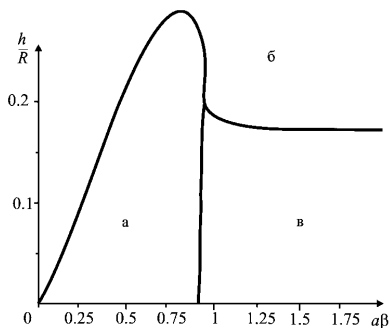


Рисунок 4 – Диаграмма решений для теории Рейсснера-Власова

Поступила в редколлегию 26.06.2006