

В исследованиях упруго-пластического деформирования под внешним давлением цилиндрических панелей с технологическими надрезами эллиптической формы, при разных соотношениях между размерами полуосей краевых надрезов и общих размеров панели в плане, найдены диаграммы «прогиб-давление» и установлена их несущая способность в зависимости от кривизны панели. Установлены зоны пластичности по сечениям, в которых панель ослаблена вследствие надрезов.

**5. Выводы.** Предпринятое развитие вариационно-структурного метода (RFM) в виде структур решения [3-4], использование программирующей системы «Поле» и созданное программное обеспечение, данные численных исследований, позволяют считать, что созданы новые возможности для поиска эффективных решений нелинейных краевых задач теории упругопластического изгиба гибких тонких пологих оболочек, которые имеют сложный контур в плане.

**Список литературы:** 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с. 2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М., Машиностроение, 1975. – 400 с. 3. Morachkovska I.O., Kurpa L.V. The Variational-Structural Method for the Elasto-Plastic Analysis of thin shallow shells // The 6-th Conference "Shell Structures, Theory and Applications", Gdansk (Poland) 1998. – P. 209-210. 4. Морачковская И.О. Метод R-функций для решения задач упруго-пластического изгиба пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник Харьковского ун-ту. Серия: Актуальные проблемы современной науки в исследованиях молодых ученых г.Харькова. – 2000. – № 456. – Ч. 2. – С. 276-279. 5. Андрієвська Л.С., Морачковська І.О. Методика розв'язання нелінійних задач згину пологих оболонок із складним планом // Комунальне господарство міст / Науково-техн. зб., серія: Архітектура і технічні науки. – Київ: Техніка, вып.38, 2002. – С. 52-57.

*Поступила в редколлегию 1.07.2003*

УДК 539.3

**С.М.ВЕРЕЩАКА**, канд.техн.наук

### **ЗАДАЧА О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АНИЗОТРОПНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК**

Пропонується варіант розрахунку двох анізотропних оболонок обертання у формі тору при дії внутрішнього тиску. Розглянуті оболонки мають загальну вісь, а їх відповідні поверхні розташовані на певній відстані одна від одної. Проводиться аналіз розподілу контактної тиску, який виникає на локальних ділянках між оболонками при статичному навантаженні. Розрахунок задачі здійснюється на основі геометрично нелінійної теорії оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву.

The variant of account two of anisotropic of shells of rotation in the form of the tor is offered at action of internal pressure. The considered shells have a general axis and their appropriate surfaces are placed on certain distance one from another. The analysis of distribution of contact pressure will be carried out which arises on a local sites between shells at action of static loading. The account of a task is carried out on a basis of the vectorially nonlinear theory of shells in view of deformations of cross shift.

Постановка контактной задачи механики многослойных пластинок и оболочек даны в [1-5], где на основе дискретного подхода построены функционалы и системы уравнений решения задачи при условии неидеального контакта слоев. Новый метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями, а также обзор по этой проблеме, изложены в книге [6].

В данной работе предлагается вариант расчета двух соосных анизотропных оболочек вращения в форме тора, соответствующие поверхности которых расположены друг от друга на заданном расстоянии. При действии внутреннего давления на локальных участках между оболочками возникает односторонний контакт. Распределение контактного давления по длине участков контакта находится с учетом трансверсального обжатия рассматриваемых оболочек по толщине. Задача решается на основе геометрически нелинейной теории оболочек и обобщенной гипотезы Тимошенко.

**Постановка задачи.** Пусть многослойная оболочка состоит из  $n$  жестких слоев, объем которых равен:  $V = \sum_{i=1}^n V_i$ . Тогда объем промежуточных клеевых

слоев будет определяться формулой:  $\Omega = \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i$ . Для обозначения площади нижней и верхней лицевой поверхности применяются символы –  $S^0$  и  $S^n$ ; боковой поверхности –  $\Gamma$ . Считается, что каждый слой недеформированной оболочки отнесен к нормальной криволинейной системе координат  $\alpha^i$  ( $i = 1, 2$ ),  $z^{(k)}$ . Координата  $z^{(k)}$  направлена по общей нормали  $\vec{m}^{(k)}$  к срединной поверхности  $S^{(k)}$  и эквидистантой поверхности  $S_z^{(k)}$   $k$ -ого слоя. Индекс “ $z$ ” при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  эквидистантой поверхности  $S_z^{(k)}$ . Положение точки недеформированной поверхности  $S_z^{(k)}$  будет определяться радиус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}; \quad -h^{(k)}/2 \leq z^{(k)} \leq h^{(k)} \quad (1)$$

базисные векторы в точке  $(\alpha^i, z^{(k)})$  поверхности  $S_z^{(k)}$  равны

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)} (\delta_i^j - z^{(k)} b_i^{j(k)}); \quad \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{r}^{(k)}$  – радиус-вектор точки срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{m}^{(k)}$  – нормаль единичной длины к поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\delta_i^j$  – тензорная запись символа Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}; \quad b_{ij}^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)}; \quad (3)$$

$$b_i^{j(k)} \vec{r}_j^{(k)} = -m_i^{(k)}; \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2)$$

– коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности  $S^{(k)}$ ;

$$\vec{m}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial \alpha^i} \text{ – производная нормали } \vec{m}^{(k)}.$$

Вектор полного перемещения  $\vec{u}_z^{(k)}$  точки  $k$ -ого жесткого слоя согласно

уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + g(z)\vec{\psi}^{(k)}, \quad (4)$$

где  $\vec{u}_z^{(k)}$  – вектор перемещения точек срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{\gamma}^{(k)}$  – вектор углов поворота нормали к точкам поверхности  $S^{(k)}$  в процессе деформации;  $g(z)$  – заданная функция, характеризующая нелинейный закон распределения тангенциальных перемещений по толщине жесткого слоя;  $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2)$  – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов  $\vec{u}^{(k)}, \vec{\gamma}^{(k)}, \vec{\psi}^{(k)}$  записываются при помощи символов  $u_i^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \psi_i^{(k)}$ :

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (5)$$

Тогда радиус-вектор точки  $k$ -ого слоя оболочки после деформации запишется

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \quad (6)$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}; \quad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \quad (7)$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до и после деформации

$$2\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (8)$$

$$\text{где } g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_j^{(k)}; \quad g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_j^{(k)*}; \quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)};$$

$$g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)} \vec{m}^{(k)} = 1;$$

$$g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2). \quad (9)$$

Подставляя в (8),(9) значения базисных векторов (2),(7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями в векторной форме

$$\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j} + \vec{\rho}_j^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j} \right];$$

$$\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \vec{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z} \right];$$

$$\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = \vec{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2. \quad (10)$$

Для вывода уравнений равновесия и граничных условий многослойной оболочки широко применяются вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера. Значение функционала энергии такого класса задач, следуя Рейсснеру, можно представить в виде

$$R = \sum_{k=1}^n (\mathbf{\Pi}_{(k)} + \mathbf{A}_{(k)}), \quad (11)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{\Pi}_{(k)} = - \iiint_{V_k} [\sigma_{(k)}^{ij} \varepsilon_{ij}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{i3} \varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^3 \varepsilon_{33}^{(k)z} - W_{(k)}] \quad (12)$$

– потенциальная энергия деформации  $k$ -ого жесткого слоя;

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(k)} = & \iiint_{V_k} \bar{u}_z^{(k)} \bar{F}^{(k)} dV + \iint_{S^0} \bar{u}_z^{(0)} \bar{P}^{(0)} dS + \iint_{S^n} \bar{u}_z^{(n)} \bar{P}^{(n)} dS + \\ & + \iint_{\Gamma_1^{(k)}} \bar{u}_z^{(k)} \bar{P}_s^{(k)} dS + \iint_{\Gamma_2^{(k)}} (\bar{u}_z^{(k)} - \bar{u}_z^{(k)s}) \bar{X}^{(k)} dS \end{aligned} \quad (13)$$

– работа внешних сил, приложенных к  $k$ -ому жесткому слою оболочки. Индекс “ $s$ ” указывает на заданные величины. В формулах (11)–(13) введены величины:  $\sigma_{(k)}^{ij}, \sigma_{(k)}^{i3}, \sigma_{(k)}^3$  – компоненты тензора напряжений в деформированной косоугольной системе координат  $\alpha^i$  и  $z$ , определенные для каждого заданного ранее слоя оболочки;  $\bar{P}^{(n)}, \bar{u}_z^{(n)}, \bar{P}^{(0)}, \bar{u}_z^{(0)}$  – векторы заданных внешних напряжений и перемещений, которые действуют на ограничивающие лицевые поверхности  $S^n, S^0$  соответственно;  $\bar{F}^{(k)}$  – вектор заданных объемных сил;  $\bar{P}_s^{(k)}$  – вектор внешней нагрузки на части боковой поверхности  $k$ -ого жесткого слоя  $\Gamma_1^{(k)}$ ;  $\bar{X}^{(k)}$  – вектор внутренних напряжений на части боковой поверхности  $\Gamma_2^{(k)}$  с заданным вектором смещений  $\bar{u}_z^{(k)}$ ;  $W_{(k)}$  – удельная дополнительная работа деформации рассматриваемых слоев, выраженная через напряжения.

Если между  $k$  и  $k+1$  слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев  $S_z^{(k,k+1)}$  могут возникать неизвестные векторы усилий  $\bar{q}_{(k)}, \bar{q}_{(k+1)}$  контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость:  $\bar{q}_{(k)} = -\bar{q}_{(k+1)}$ . Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в функционал энергии  $R$  необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$\mathbf{A}_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \bar{q}_{(m)} \bar{U}_z^{(m)} dS. \quad (14)$$

Условие стационарности функционала энергии (11)

$$\delta R = 0, \quad (15)$$

в котором варьируются независимые между собой перемещения и напряжения, позволяет получить систему уравнений равновесия многослойных оболочек, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Использование обобщенного закона Гука, нелинейного варианта деформационных соотношений в квадратичном приближении с учетом поперечного сдвига по уточненной теории Тимошенко значительно упрощает вы-

вод уравнений равновесия и граничных условий.

Принимая обозначения [7,8], для случая одностороннего контакта по области  $S_2^{(k,k+1)}$ , когда между слоями отсутствуют кинематические связи, можно получить уравнения равновесия в скалярной форме относительно осей, отнесенных к недеформированному состоянию:

$$\begin{aligned} \nabla_i T_{(k)}^{ij} - b_i^{j(k)} Q_{(k)}^i + q_{(k)}^i + X_{(k)}^i &= 0, \quad (i=1,2); \\ \nabla_i Q_{(k)}^i + b_{ij}^{(k)} T_{(k)}^{ij} + q_{(k)}^3 + X_{(k)}^3 &= 0; \\ \nabla_i M_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^i - T_{(k)}^{ij} \gamma_j^{(k)} + M_{(k)}^i &= 0, \quad (i=1,2); \\ \nabla_i L_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^{0i} &= 0, \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, как дополнение к уравнениям равновесия из (15) следуют статические

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k)s} &= T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}; \quad \Phi_\tau^{(k)s} = T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}; \quad \Phi_m^{(k)} = Q_{(k)}^i n_i^{(k)} + Q_{(k)}^{0i} n_i^{(k)} + \frac{M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\partial s}; \\ G_n^{(k)s} &= M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}; \quad H_\tau^{(k)s} = -M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}; \quad L_n^{(k)s} = L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}; \quad \Lambda_\tau^{(k)s} = L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)} \end{aligned} \quad (17)$$

и геометрические

$$\begin{aligned} u_n^{(k)s} &= u_{(k)}^i n_i^{(k)}; \quad u_\tau^{(k)s} = u_{(k)}^i \tau_i^{(k)}; \quad w_{(k)}^s = w_{(k)}; \quad \gamma_n^{(k)s} = \gamma_{(k)}^i n_i^{(k)}; \\ \gamma_\tau^{(k)s} &= \gamma_{(k)}^i \tau_i^{(k)}; \quad \psi_n^{(k)s} = \psi_{(k)}^i n_i^{(k)}; \quad \psi_\tau^{(k)s} = \psi_{(k)}^i \tau_i^{(k)} \end{aligned} \quad (18)$$

граничные условия на части контуров  $\Gamma_1^{(k)}$  и  $\Gamma_2^{(k)}$  соответственно. В выражениях (16)-(18) приняты обозначения:  $X_{(k)}^i, X_{(k)}^3$  – тензор внутренних и внешних сил, приложенных к срединной поверхности  $S_{(k)}$ ;  $T_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^i$  – тензоры внутренних усилий и моментов, а также тензор внешних моментов соответственно, приведенные к срединной поверхности  $S_{(k)}$ ;  $Q_{(k)}^i$  – тензор поперечных сил;  $Q_{(k)}^{0i}, L_{(k)}^{ij}$  – тензоры дополнительных обобщенных внутренних удельных усилий сдвига и моментов соответственно, которые появляются при выводе уравнений равновесия с учетом деформаций поперечного сдвига;  $\nabla_i$  – символ ковариантного дифференцирования по метрике  $a_{ij}^{(k)}$ ;  $u_n^{(k)s}, u_\tau^{(k)s}, w_{(k)}^s, \gamma_n^{(k)s}, \gamma_\tau^{(k)s}, \psi_n^{(k)s}, \psi_\tau^{(k)s}$  – заданные ковариантные компоненты векторов обобщенных перемещений;  $\Phi_n^{(k)s}, \Phi_\tau^{(k)s}, \Phi_m^{(k)s}, G_n^{(k)s}, H_\tau^{(k)s}, L_n^{(k)s}, \Lambda_\tau^{(k)s}$  – ковариантные компоненты заданных векторов внешних усилий  $\bar{\Phi}_{(k)}^s$ , моментов  $\bar{G}_{(k)}^s$  и дополнительных моментов  $\bar{L}_{(k)}^s$ , приложенных к части граничного контура  $\Gamma_1^{(k)}$ ;  $n_i^{(k)}, \tau_i^{(k)}$  – ковариантные компоненты векторов единичной нормали  $\bar{n}$  и касательной  $\bar{\tau}$  к контурной линии.

Усилия контактного взаимодействия  $\bar{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \bar{m}^{(k)}$  возникают при выполнении условия

$$(\bar{u}_z^{(k)} - \bar{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (19)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (19) не выполняется при перемещении точек области  $S_2^{(k,k+1)}$  в процессе деформации, усилие

$\bar{q}_{(k)}$  в формулах (16) принимает значение  $\bar{q}_{(k)} = 0$ . Статические и кинематические граничные условия на контуре области  $S_2^{(k,k+1)}$  имеют вид зависимостей (17), (18).

Таким образом, имея уравнения равновесия (16) несложно с заданной точностью найти значение контактного усилия на основе итерационного метода, предложенного в [6].

Основная система разрешающих уравнений. Введение допущения о том, что рассматриваемое напряженно-деформированное состояние оболочки будет симметричным относительно оси вращения, существенно упрощает алгоритм решения. Учитывая геометрическую нелинейность в квадратичном приближении, исходную задачу (16)-(18) можно свести к решению системы  $12 \times k$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A_1} \frac{d\bar{Y}_{(k)}}{d\alpha_1} = f(\alpha_1, \bar{Y}_{(k)}, \bar{q}_{(k)}) \quad (20)$$

относительно вектор-функции

$$\bar{Y}_{(k)} = [T_{11}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, I_{11}^{(k)}, S^{(k)} + 2k_2^{(k)}H^{(k)}, I_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \psi_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \psi_2^{(k)}]^T. \quad (21)$$

Правая часть системы (20) запишется

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho^{(k)}(T_{22}^{(k)} - Y_1^{(k)}) - k_1^{(k)}Y_2^{(k)} - X_1^{(k)}; \\ f_2 &= k_1^{(k)}Y_1^{(k)} - \rho^{(k)}Y_2^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} \pm q_{(k)}\mathcal{X}_{(k)} - X_3^{(k)}; \\ f_3 &= \rho^{(k)}(M_{22}^{(k)} - Y_3^{(k)}) + Y_2^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_9^{(k)} + S^{(k)}\gamma_2^{(k)}; \\ f_4 &= \rho^{(k)}(L_2^{(k)} - Y_4^{(k)}) + Q_{01}^{(k)}; \\ f_5 &= -2\rho^{(k)}Y_5^{(k)} + k_2^{(k)}(T_{22}^{(k)}\gamma_2^{(k)} + S^{(k)}Y_9^{(k)}); \\ f_6 &= -2\rho^{(k)}Y_6^{(k)} + Q_{02}^{(k)}; \quad f_7 = e_{11}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_8^{(k)} - \frac{1}{2}Y_9^{(k)}Y_9^{(k)}; \\ f_8 &= k_1^{(k)}Y_7^{(k)} - Y_9^{(k)}; \quad f_9 = K_{11}^{(k)}; \quad f_{10} = R_{11}^{(k)}; \\ f_{11} &= e_{12}^{(k)} + \rho^{(k)}Y_{11}^{(k)} - Y_9^{(k)}\gamma_2^{(k)}; \quad f_{12} = R_{12}^{(k)} + \rho^{(k)}Y_{12}^{(k)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Когда между жесткими слоями отсутствуют кинематические связи, в правой части (20)  $-f_2$ , дополнительно вводится функция [6] –

$$\pm q_{(k)}\mathcal{X}_{(k)}, \quad (23)$$

которая учитывает нормальную составляющую контактного давления  $q_{(k)}$ . Кроме того, считается, что на слой с индексом  $k$  контактное давление действует со знаком плюс, а на слой с индексом  $k+1$  со знаком минус. При этом контактное давление пропорционально трансверсальному обжатия в зоне контакта жестких слоев оболочки:

$$q_{(k)} = k_{(k)} \frac{E_{(k)}^z}{h_{(k)}} (w_{(k)} - h_{[k]} - w_{(k+1)}), \quad (24)$$

где  $E_{(k)}^z$  – модуль упругости  $k$ -ого слоя оболочки в направлении нормали,  $k_{(k)}$  – коэффициент понижения жесткости обжатия  $k$ -ого слоя оболочки. Конструктивная нелинейность, связанная с появлением зоны контакта между слоями оболочки

при действии внешней нагрузки, учитывается при помощи множителя

$$\chi = [1 + \text{sign}(w_{(k)} - h_{[k]} - w_{(k+1)})] / 2. \quad (25)$$

Здесь  $h_{[k]}$  – величина зазора между жесткими слоями.

Систему дифференциальных уравнений (20) следует дополнить граничными условиями – по шесть на каждом торце жесткого слоя оболочки вращения. С учетом введенных обозначений они имеют вид:

$$\begin{aligned} Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(1-l_j) &= 0; \\ Y_j^{(k)}(\alpha_1^r)l_{j+6} + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^r)(1-l_{j+6}) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Параметры  $l_j, l_{j+6}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) принимают значения 0, 1 и определяют однородные как статические, так и кинематические граничные условия на торцах жестких слоев оболочки  $\alpha_1 = \alpha_1^0, \alpha_1 = \alpha_1^r$ .

При построении системы уравнений (20) применялись следующие геометрические соотношения для  $k$ -ого жесткого слоя:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(k)} &= e_1^{(k)} + \frac{1}{2}\gamma_1^{(k)}\gamma_1^{(k)}; & e_{22}^{(k)} &= e_2^{(k)} + \frac{1}{2}\gamma_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}; & e_{12}^{(k)} &= \omega^{(k)} + \gamma_1^{(k)}\gamma_2^{(k)}; \\ K_{11}^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{d\gamma_1^{(k)}}{d\alpha_1}; & K_{22}^{(k)} &= \rho^{(k)}\gamma_1^{(k)}; & K_{12}^{(k)} &= \frac{k_2^{(k)}}{A_1^{(k)}} \frac{du_2^{(k)}}{d\alpha_1} - k_2^{(k)}\rho^{(k)}u_2^{(k)}; \\ R_{11}^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{d\psi_1^{(k)}}{d\alpha_1}; & R_{22}^{(k)} &= \rho^{(k)}\psi_1^{(k)}; & R_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{d\psi_2^{(k)}}{d\alpha_1} - \rho^{(k)}\psi_2^{(k)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} e_1^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{du_1^{(k)}}{d\alpha_1} + k_1^{(k)}w^{(k)}; & e_2^{(k)} &= k_2^{(k)}w^{(k)} + \rho^{(k)}u_1^{(k)}; \\ \omega^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{du_2^{(k)}}{d\alpha_1} - \rho^{(k)}u_2^{(k)}; & \gamma_1^{(k)} &= k_1^{(k)}u_1^{(k)} - \frac{1}{A_1^{(k)}} \frac{dw^{(k)}}{d\alpha_1}; \\ \gamma_2^{(k)} &= k_2^{(k)}u_2^{(k)}; & \rho^{(k)} &= \frac{1}{A_1^{(k)}A_2^{(k)}} \frac{dA_2^{(k)}}{d\alpha_1}; \end{aligned} \quad (28)$$

$A_1^{(k)}, A_2^{(k)}$  – параметры Ламе;  $k_1^{(k)}, k_2^{(k)}$  – кривизны в направлении координатных линий.

**Пример расчета.** В качестве тороидальной оболочки сложной формы рассматривалась верхняя половина тора, исходная поверхность которого образована вращением окружности радиуса  $r$  относительно оси вращения ОХ (рис. 1). Расстояние от оси вращения до оси полутора составляет  $R = 0,3$  м, радиусы первой и второй оболочки соответственно равны  $r_1 = 9,8625 \cdot 10^{-2}$  м,  $r_2 = 10,1375 \cdot 10^{-2}$  м. Рассматриваемые две соосные оболочки нагружены равномерным внутренним давлением  $q = 4$  МПа и выполнены из двух перекрестно армированных слоев толщиной  $h = 2,25 \cdot 10^{-3}$  м каждая и углами армирования на экваторе  $\varphi^{(1)} = -60^0, \varphi^{(2)} = -60^0$ . Считается, что на экваторе выполняют

ся условия симметрии (рис. 1), а сечение оболочки с координатой  $t_k = \pi r/2$  жестко защемлено. Оболочка изготовлена из борэпоксидного композиционного материала и состоит из двух перекрестно армированных слоев. Физические характеристики борных волокон –  $E_v = 4,2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_v = 0,21$ , а эпоксидного связующего –  $E_m = E_{(k)}^z = 3,5 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_m = 0,33$ . Остальные упругие постоянные армированного слоя определяются на основе зависимостей [9], полученных путем осреднения модулей упругости и модулей сдвига композита. Объемный коэффициент армирования для каждого слоя принимается –  $\psi = 0,5$ . Материал оболочки считается упругим в процессе деформации. При этом физические соотношения между напряжениями и деформациями каждого жесткого слоя подчиняются обобщенному закону Гука. Для случая плоского напряженного состояния анизотропного тела, которое рассматривается в данной работе, эти соотношения можно найти в [7,9].

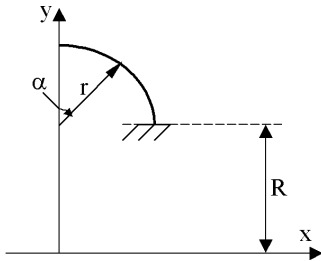


Рис. 1.

Математическая модель представляет собой двухслойную оболочку с толщиной жестких слоев  $h_{(1)} = h_{(2)} = 2,25 \cdot 10^{-3}$  м. Считается, что между слоями отсутствует кинематическая связь и зазор между ними –  $h_{[1]} = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м. Коэффициент понижения жесткости обжатия принимался равным  $k_1 = 0,05$  и  $k_2 = 0,005$ .

Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки определялось методом конечных разностей. Нелинейная краевая задача сводилась к решению последовательности

линейных краевых задач при помощи обобщенного метода Ньютона.

На рис. 2 приведены графики изменения величины контактного давления  $q$  в направлении продольной координаты  $t$  (“1”, “2”- соответствует коэффициентам понижения жесткости обжатия принимался равным  $k_1 = 0,05$  и  $k_2 = 0,005$ ).

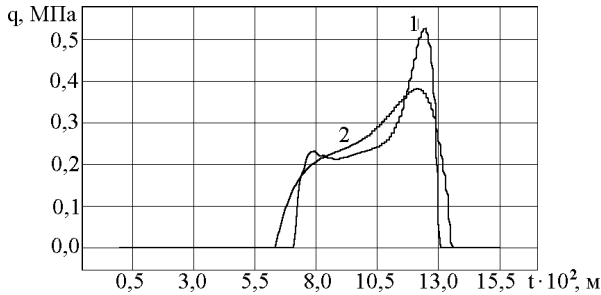


Рис. 2.

Проведенный численный эксперимент показывает, что при увеличении значения коэффициента  $k$  зона контакта между слоями уменьшается, а максимальное значение контактного давления увеличивается. При этом наблюдает-



ся рост контактного давления у края зоны контакта, что соответствует результатам [6], полученным при решении контактной задачи для двух соосных изотропных цилиндрических оболочек.

На рис. 3 приводятся кривые изменения нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  рассматриваемого пакета оболочек в направлении продольной координаты  $t$  для разных значений коэффициента  $k$ . Кривые “1”, “2” показывают изменение напряжений  $\sigma_{11}$  на внутренней поверхности первой оболочки при соответствующих значениях коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ . Аналогично кривые “3”, “4” показывают изменение напряжений  $\sigma_{11}$  на наружной поверхности второй оболочки при соответствующих значениях коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

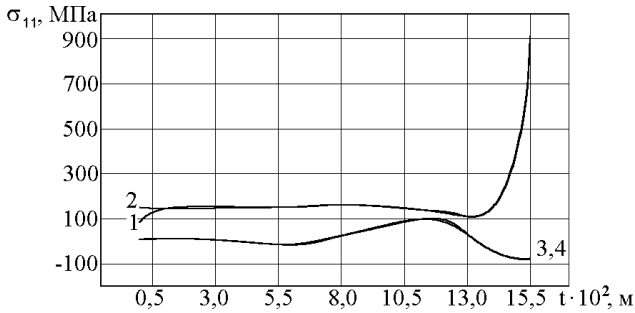


Рис. 3.

Анализ кривых “1”–“4” свидетельствуют о незначительном влиянии величины коэффициента понижения жесткости обжатия на напряженное состояние рассматриваемых оболочек.

**Список литературы:** 1. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. № 5. – С. 832-836. 2. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. № 1. – С.77-84. 3. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 4. Паймушин В.И. Обобщенный вариационный принцип Рейснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. № 2. – С. 171-180. 5. Паймушин В.И. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочлея // Прикладная механика. – 1987. Т. 23. № 11. – С.32-38. 6. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. 7. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 8. Галимов К.З. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З.Галимова. – Издательство Казанского университета, 1977. – С. 36-95. 9. Григोलук Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

Поступила в редколлегию 26.06.2003