

темы с двумя степенями свободы, которая содержит осциллятор с относительно большой массой (аппроксимация линейной упругой системы) и осциллятор с относительно малой массой (виброгаситель колебаний основной упругой системы). Также построены АЧХ при некоторых значениях параметров, исследована устойчивость вынужденных колебаний.

**Список литературы:** 1. Сб. "вибрации в технике", том 6. М.: Машиностроение, 1981. 2. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317с. 3. *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. – М.: Машиностроение, 1968. – 282 с. 4. *Троицкий В.А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Киев: Машгиз, 1976. – 248 с. 5. *Штейнвольф А.И.* Динамические расчеты машин и механизмов. – Киев: Машгиз, 1961. – 340 с. 6. *Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 351 с. 7. *Haxton R.S., Barr A.D.S.* 1972, "The autoparametric vibration absorber". – Journal of Engineering for Industry, 94. – P. 119-225. 8. *Natsiavas S.* Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorber. – J. Sound Vibr. V.156 (2), 1992. – 227-245. 10. *Aoki S., Watanabe T.* 1994, "An investigation of an Impact Vibration Absorber with Hysteretic Damping", in Proc. of the Second International Conference on Motion and Vibration Control, Yokohama, Japan. – P. 468-474. 11. *Т.Хаяси* "Нелинейные колебания в физических системах". – М.: Мир, 1968.

*Поступила в редколлегию 07.05.2003*

УДК 539.3

**В.А.САЛО**, канд.техн.наук

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСИММЕТРИЧНОГО ДАВЛЕНИЯ**

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних циліндричних оболонок довільної товщини. Використовуваний метод заснований на варіаційному принципі Рейсснера, теорії R-функцій, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності, методу И.Н.Векуа й алгоритму двосторонньої оцінки точності наближених рішень змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на прикладах.

The approach is suggested to definition of the stress-strained state of elastic cylinders of any thickness. The used method is based on Reissner's variational principle, R-functions theory, the common equations of the three-dimensional theory of an elasticity, I.N.Vekua's method and algorithm for two-sided estimation of exactitude of approached solutions of the mixed variational problems. Efficiency of the method is shown on examples.

**Постановка проблемы.** Решения пространственных задач теории упругости сопряжены со значительными вычислительными трудностями. Прогресс в разработке методов, позволяющих получить достоверные результаты расчетов толстостенных оболочек, невозможен без привлечения современных ПЭВМ. В этой связи актуальна потребность в создании универсальных и алгоритмически простых для реализации методов расчета нетонких оболочек.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Обилие существующих вариантов уточненных теорий оболочек создает определенные затруднения в выборе и практическом применении конкретной теории. обстоятельный обзор этих вариантов дан в работе [1], в которой представлен научно обоснованный эффективный метод решения краевых задач определения напряженного состояния ортотропных оболочек произвольной толщины.

**Цель и постановка задачи.** В настоящей работе предлагается использование разработанного в монографии [1] метода для решения пространственной задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого толстостенного цилиндра под действием произвольной статической нагрузки.

Введем в срединной поверхности  $\Omega_s$  радиуса  $R$  цилиндра длины  $2a$  и толщины  $h$  систему координат  $\{s_1, s_2, z\}$ , где  $s_1$  – расстояние, измеренное вдоль образующей ( $-a \leq s_1 \leq a$ ),  $s_2$  – длина дуги направляющей, а координатная линия  $z$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ) перпендикулярна  $\Omega_s$ . Поверхность цилиндра состоит из торцевых  $\Gamma_1$  и лицевых поверхностей: внутренней  $\Gamma^-$  ( $z = -h/2$ ) и внешней  $\Gamma^+$  ( $z = h/2$ ). Рассмотрим наиболее распространенные однородные граничные условия на торцах цилиндра:

а) свободный край:  $\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{13} = 0, \quad (1)$

б) свободно опертый край:  $\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{12} = 0; \quad u_3 = 0, \quad (2)$

с) край с абсолютно жесткой диафрагмой:  $\sigma_{11} = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0, \quad (3)$

д) скользящая заделка края:  $u_1 = 0; \quad \sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{13} = 0, \quad (4)$

е) абсолютно заделанный край:  $u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0, \quad (5)$

Рассмотрим нагруженный внутренним несимметричным давлением  $t_3^- = -q_0 \cos(k_2 s_2 / R)$  ортотропный цилиндр длины  $2a = 10 R_0$  ( $R = 10 R_0$ ) с упругими характеристиками материала [2]:  $E_1 = 1,9 E_0; \quad E_2 = 1,2 E_0; \quad E_3 = 0,45 E_0; \quad G_{12} = 0,3 E_0; \quad G_{13} = G_{23} = 0,23 E_0; \quad E_0 = 9,81 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,15; \quad \nu_{32} = 0,3; \quad \nu_{31} = 0,07.$

Граничные условия на лицевых поверхностях цилиндра имеют вид:

$$\Gamma^- : \sigma_{13} = 0; \sigma_{23} = 0; \sigma_{33} = \sigma_{33}^* = t_3^-, \quad \Gamma^+ : \sigma_{13} = 0; \sigma_{23} = 0; \sigma_{33} = 0. \quad (6)$$

Введем приведенные перемещения  $\tilde{u}_i$  и напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$ :

$$\tilde{u}_i^- = \frac{u_i^- E}{q_0 R_0}; \quad \tilde{u}_i^+ = \frac{u_i^+ E}{q_0 R_0}; \quad \tilde{\sigma}_{ij}^- = \frac{\sigma_{ij}^-}{q_0}; \quad \tilde{\sigma}_{ij}^+ = \frac{\sigma_{ij}^+}{q_0}, \quad (7)$$

где минус (плюс) соответствует  $\zeta = \mp 1$ ;  $R_0$  – масштабный множитель.

Воспользуемся полученными в работе [1] структурами решений, представив независимые в функционале Рейсснера  $\mathbf{I}_R$  искомые компоненты  $\mathbf{u}_i$  вектора  $\mathbf{u}$  и  $\sigma_{ij}$  тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  в виде разложений в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты  $\zeta = 2z/h$ .

Сдвиговая модель оболочки определяется числами  $l_i, l_{ij}$  аппроксимаций  $u_i$  и  $\sigma_{ij}$  по толщине оболочки. Согласно работе [1] выбранная модель соответст-

вует (при  $i = 1, 2$ ) комбинации величин ( $l_i, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33}$ ), задание которых в программе позволяет автоматически переходить к различным двумерным теориям. Варианту (2,1,2,1,0) соответствует теория оболочек типа Тимошенко; (2,2,2,2,1) – уточненная теория оболочек [3]; (4,2,4,2,1) и (4,3,4,3,2) – прикладные теории [4] и [5].

Численная реализация задач. В зависимости от выбранной сдвиговой модели цилиндрической оболочки и граничных условий на ее торцевых поверхностях  $\Gamma_1$  в таблице 1 представлены при  $h/R = 1$  значения перемещения  $\tilde{u}_3$  и напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$  в сечении  $s_1 = 0$ ; первая строка соответствует решению при  $k_2 = 0$ , вторая –  $k_2 = 1$ , третья –  $k_2 = 2$ .

На рис. 1 приведены при  $h/R = 0,4$  графики распределения перемещения  $\tilde{u}_3$  по толщине исследуемого цилиндра в сечении  $s_1 = 0$  (цифры 0, 1 и 2 равны значениям параметра  $k_2$ ). На рис. 2 цифрами 1, 2 и 3 обозначены графики  $\tilde{\sigma}_{ij}$  (при  $k_2 = 1$ ) соответственно в сечениях  $s_1 = 0$ ;  $4R_0$ ;  $5R_0$ . Функции, построенные на рис. 1 и 2 сплошными линиями соответствуют случаю, когда на торцах заданы условия (5); штриховыми линиями – заданы условия (3). Более тонкими линиями построены представленные в работе [2] графики, практически совпадающие с полученными в настоящей работе кривыми рис. 1 и 2.

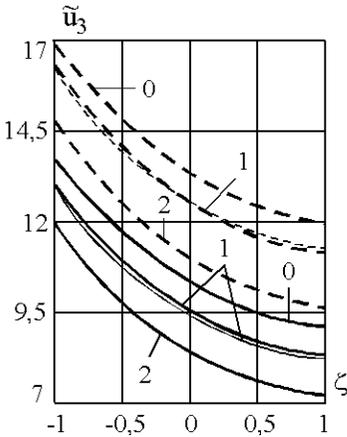


Рис. 1

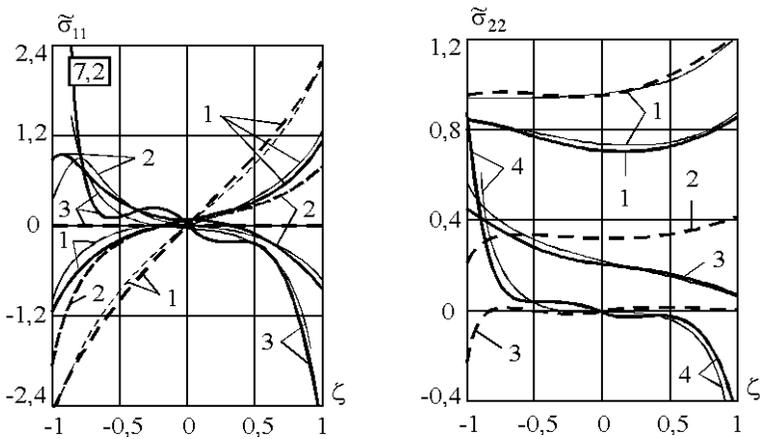


Рис. 2. Распределение напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$  и  $\tilde{\sigma}_{22}$  по толщине цилиндра

Приведенные графики дают наглядное представление о характере распределений радиального перемещения  $\tilde{u}_3$  и нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$  по толщине и длине цилиндра в зависимости от граничных условий на торцах цилиндра и вида нагружения (при изменении параметра  $k_2$ ). В частности, изменение  $\tilde{u}_3$  по толщине достигает 35 %, 31 %, 29 % (при  $k_2 = 0; 1; 2$  соответственно) для условий (3) и 40 %, 36 %, 34 % – для условий (5).

Таблица 1. Значения искомых величин

| Условия на торцах | Искомая величина        | Сдвиговая модель ( $l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33}$ ) |             |             |             |             |
|-------------------|-------------------------|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                   |                         | (2,2,2,2,1)   | (4,2,4,2,1) | (4,3,4,3,2) | (5,5,5,5,5) | (7,7,7,7,7) |
| (3)               | $\tilde{u}_3^-$         | 4,912   | 5,058       | 6,619       | 7,219       | 7,261       |
|                   |                         | 5,478   | 5,741       | 7,547       | 8,039       | 8,071       |
|                   |                         | 5,525   | 5,908       | 7,922       | 8,284       | 8,296       |
|                   | $\tilde{\sigma}_{11}^-$ | -0,397  | -0,719      | -0,728      | -0,783      | -0,802      |
|                   |                         | -0,366  | -0,683      | -0,770      | -0,856      | -0,896      |
|                   |                         | -0,257  | -0,592      | -0,876      | -0,896      | -0,910      |
|                   | $\tilde{\sigma}_{22}^-$ | 0,630   | 0,790       | 1,111       | 1,281       | 1,320       |
|                   |                         | 0,393   | 0,407       | 0,637       | 0,742       | 0,763       |
|                   |                         | 0,014   | -0,020      | -0,208      | -0,365      | -0,401      |
| (5)               | $\tilde{u}_3^-$         | 4,713   | 4,728       | 6,115       | 6,723       | 6,784       |
|                   |                         | 5,334   | 5,470       | 7,089       | 7,567       | 7,609       |
|                   |                         | 5,458   | 5,744       | 7,615       | 7,957       | 7,967       |
|                   | $\tilde{\sigma}_{11}^-$ | -0,055  | -0,178      | -0,239      | -0,282      | -0,294      |
|                   |                         | -0,101  | -0,240      | -0,358      | -0,374      | -0,460      |
|                   |                         | -0,145  | -0,284      | -0,476      | -0,538      | -0,654      |
|                   | $\tilde{\sigma}_{22}^-$ | 0,626   | 0,786       | 1,088       | 1,255       | 1,282       |
|                   |                         | 0,389   | 0,376       | 0,626       | 0,739       | 0,751       |
|                   |                         | 0,014   | -0,053      | -0,200      | -0,274      | -0,367      |

Рассмотрим задачу о напряженно–деформированном состоянии цилиндрической оболочке, подверженной на внутренней поверхности несимметричному давлению  $t_3^- = -q_0 \cos(k_2 s_2 / R) \sin[\pi(s_1 + a) / 2a]$ . Граничные условия на лицевых поверхностях цилиндра имеют вид (6).

Численные расчеты проведены для изотропного ( $\nu = 0,3$ ) цилиндра длины  $2a = 120 R_0$  ( $R = 60 R_0$ ). В табл. 2 в зависимости от величины параметра  $k_2$  и условий на  $\Gamma_1$  при  $h/R = 0,2$ ;  $m_i = m_{ij} = 10$  представлены значения нормального перемещения  $\tilde{u}_3$  в сечении  $s_1 = 0$  ( $-1 \leq \zeta \leq 1$ ). В первой строке – значения прогиба  $\tilde{u}_3$  для граничных условий (3); во второй строке – для условий (5). В знаменателях – результаты работы [2]. Согласно табл. 2 максимального значения прогиб достигает на поверхности приложения нагрузки, а изменение

способа закрепления торцов на жесткое закрепление приводит к уменьшению значения  $\tilde{u}_3^-$  на 6 % ( $k_2 = 0$ ); 9,6 % ( $k_2 = 1$ ) и 31,8 % ( $k_2 = 2$ ).

Таблица 2. Значения перемещения  $\tilde{u}_3$  вдоль толщины цилиндра

| $k_2$ | $\zeta$      |              |              |              |              |              |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|       | -1           | -0,6         | -0,2         | 0,2          | 0,6          | 1            |
| 0     | <u>282,9</u> | <u>278,2</u> | <u>273,8</u> | <u>269,6</u> | <u>265,6</u> | <u>261,6</u> |
|       | 283          | 278          | 274          | 270          | 266          | 262          |
|       | <u>265,8</u> | <u>261,4</u> | <u>256,7</u> | <u>252,1</u> | <u>247,5</u> | <u>242,6</u> |
|       | 266          | 261          | 257          | 252          | 247          | 243          |
| 1     | <u>526,6</u> | <u>522,0</u> | <u>516,9</u> | <u>511,5</u> | <u>505,8</u> | <u>499,6</u> |
|       | 527          | 522          | 517          | 512          | 506          | 500          |
|       | <u>475,8</u> | <u>472,5</u> | <u>468,1</u> | <u>463,3</u> | <u>458,0</u> | <u>451,6</u> |
|       | 483          | 479          | 475          | 470          | 465          | 459          |
| 2     | <u>1119</u>  | <u>1120</u>  | <u>1116</u>  | <u>1110</u>  | <u>1100</u>  | <u>1087</u>  |
|       | 1120         | 1120         | 1120         | 1110         | 1100         | 1090         |
|       | <u>762,7</u> | <u>764,6</u> | <u>762,6</u> | <u>757,9</u> | <u>751,0</u> | <u>740,4</u> |
|       | 760          | 760          | 760          | 750          | 750          | 740          |

Таблица 3. Значения искоемых величин в сечении  $s_1 = 0$

| Искомая величина        | $k_2$ | Сдвиговая модель ( $l_i, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33}$ ) |                  |                  |                  |                  |
|-------------------------|-------|---|------------------|------------------|------------------|------------------|
|                         |       | (2,2,2,2,1)   | (4,2,4,2,1)      | (4,3,4,3,2)      | (5,5,5,5,5)      | (7,7,7,7,7)      |
| $\tilde{u}_3^-$         | 0     | 34,58<br>30,41  | 35,64<br>30,58   | 37,99<br>34,26   | 39,41<br>35,59   | 39,49<br>35,62   |
|                         | 1     | 47,37<br>39,92  | 47,47<br>40,21   | 50,75<br>43,76   | 51,59<br>44,50   | 51,61<br>44,51   |
| $\tilde{\sigma}_{11}^-$ | 0     | -0,603<br>-0,392  | -0,545<br>-0,388 | -0,544<br>-0,385 | -0,501<br>-0,378 | -0,511<br>-0,376 |
|                         | 1     | -0,704<br>-0,452  | -0,565<br>-0,495 | -0,602<br>-0,519 | -0,610<br>-0,545 | -0,612<br>-0,546 |
| $\tilde{\sigma}_{22}^-$ | 0     | 0,569<br>0,496  | 0,675<br>0,586   | 0,783<br>0,701   | 0,859<br>0,772   | 0,862<br>0,775   |
|                         | 1     | 0,212<br>0,180  | 0,226<br>0,182   | 0,229<br>0,207   | 0,246<br>0,227   | 0,248<br>0,228   |

При использовании различных сдвиговых моделей ( $l_i, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33}$ ) в табл. 3 для граничных условий (3) и (5) на торцах (в первой и второй строчках соответственно) представлены в сечении  $s_1 = 0$  при  $h/R = 1$  и  $k_2 = 0$ ; 1 значения перемещения  $\tilde{u}_3^-$  и напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}^-$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}^-$  на нагруженной внутренней поверхности. По результатам табл. 3 можно судить о степени сходимости получае-

мых приближенных решений исследуемых задач в зависимости от выбранного варианта уточненной теории оболочек.

На рис. 3 показаны распределения напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$  и  $\tilde{\sigma}_{22}$  по толщине цилиндра ( $|\zeta| \leq 1$ ) при  $h/R = 1$  и  $k_2 = 1$  в случае использования сдвиговой модели (7,7,7,7,7). Цифрами 1, 2, 3 и 4 обозначены графики, построенные соответственно в сечениях  $s_1 = 0; 6R_0; 8R_0; 10R_0$  при разных граничных условиях на торцах: в случае (5) – сплошными и (3) – штриховыми линиями. Как видно, при приближении к торцевой поверхности распределение напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$  и  $\tilde{\sigma}_{22}$  существенно зависит от способа закрепления торцов цилиндра.

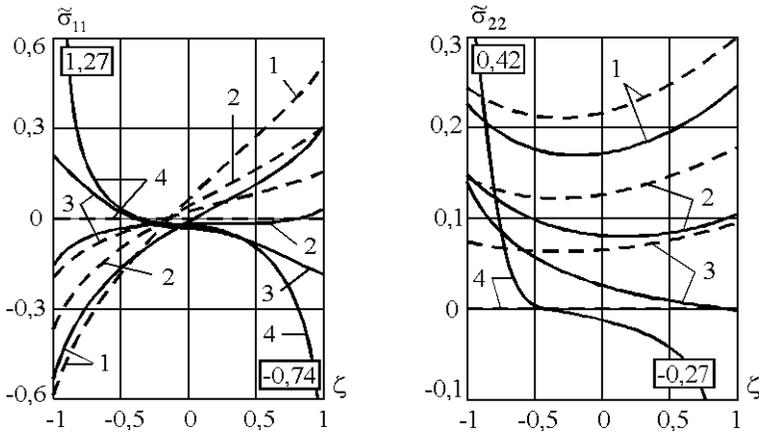


Рис. 3. Распределение напряжений  $\tilde{\sigma}_{11}$  и  $\tilde{\sigma}_{22}$  по толщине цилиндра

**Выводы.** Полученные результаты подтверждают возможность эффективно использования предложенного в монографии [1] метода при исследовании упругих оболочек произвольной толщины. Средством проверки достоверности результатов может стать используемый автором программно реализованный алгоритм интегральной двойственной оценки численных решений, позволяющий автоматизировать поиск такого количества аппроксимаций, при котором процесс сходимости приближенных решений приобретает устойчивый характер.

**Список литературы:** 1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 2. Крюков Н.Н. Решение задач о напряженном состоянии толсто-стенных цилиндров с применением сплайн-функций // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 44-50. 3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1987. – 216 с. 4. Ликкуль В.В. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1989. – 221 с. 5. Родионова В.А., Тутаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. – СПб, 1996. – 278 с.

Поступила в редколлегию 21.06.2003