

$\omega_0 = \sqrt{\omega_k^2 + \Omega^2}$, где ω_k , Ω – угловые скорости вращения колесной пары относительно собственной оси и центра кривой – соответственно.

Экспериментально установлено [2], что следы износа на рельсах располагаются под углом $30...60^\circ$ к плоскости пути, что подтверждает справедливость зависимости (1).

Величину b_A найдем из треугольника $A'A O_{ij}$:

$$b_A = A O_{ij} = \sqrt{(r_0 + h_r)^2 + x_r^2}.$$

Угол наклона к плоскости пути вектора \overline{V}_r близок по величине к углу γ_v наклона вектора \overline{V}_r' ;

$$\gamma_v = \gamma_k - \gamma_l, \quad (4)$$

где угол γ_l найдем по теореме синусов из треугольника, образованного векторами \overline{V}_r' , \overline{V}_2 и линией, соединяющей их концы

$$\gamma_l = \arcsin[(V_2/V_r') \sin(180^\circ - \gamma_r)].$$

Выводы. Предложены аналитические зависимости для скорости скольжения гребня колеса относительно боковой грани рельса и угла ее наклона к плоскости пути с учетом буксования колес. Полученные результаты применимы в математических моделях, описывающих взаимодействие колеса с рельсом.

Список литературы: 1. Андриевский С.М. Боковой износ рельсов на кривых: / Труды ВНИИЖТ. – М.: 1961. – Вып. 207. – 126 с. 2. Жаров И.А., Комаровский И.А., Захаров С.М. Моделирование изнашивания пары гребень колеса - боковая поверхность рельса в кривых малого радиуса // Вестник ВНИИЖТ. – М.: 1998. – № 2. – С. 15-18.

Поступила в редколлегию 07.04.2003

УДК 539.3

О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук, **В.Н.СОБОЛЬ**

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ ТЕЛ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

У статті сформульовані постановка задачі повзучості просторових тіл та варіаційний принцип для змішаного функціоналу, що для відомих у довільний час деформацій повзучості є заданим на незалежно варійованих функціях переміщень та напружень. Запропоновано чисельний метод для розв'язання початково-крайових задач повзучості тіл, у якому сумісно застосовані метод Рунге-Кутта-Мерсона із автоматизованим вибором кроку для продовження деформацій повзучості та пошкоджень у часі та метод теорії R-функцій для пошуку стаціонарних точок змішаного функціоналу, що відповідає сформульованому варіаційному принципу. Надані числові дані за дослідженням збіжності наближених розв'язків при варіюванні кількістю вільних компонентів в структурах розв'язків та точністю інтегрування рівнянь стану повзучості на прикладі тіл обертання.

General statement of creep problems of spatial bodies and variational principle for the mixed functional is given, which for knowing at the any time of moment creep deformations on independently varied functions of strains and stress are formulated. Numerical method for calculation of initially – edges creep problems of bodies is considered in which Runge-Kutta-Merson method and R-functions method are applied. Numerical data of research convergence of approximate solutions with using amount variation of free components in the solution structures and integration accuracy of creep condition equations on the calculation example of rotation bodies are presented.

1. Актуальность темы. Ползучесть элементов конструкций сопровождается необратимым деформированием, релаксацией и поврежденностью, приводящим к разрушению изделий. Расчеты на ползучесть высокотемпературной техники при современных требованиях к безопасности экологии производств, экономичности и надежности не возможно выполнить без привлечения научно обоснованных теорий ползучести, современных методов континуальной механики и информационных технологий. Внимание многих исследователей привлечено к поиску разных подходов к решению проблем длительной прочности высокотемпературной техники, чем объясняется актуальность темы, рассмотренной в данной статье.

2. Анализ состояния и постановка проблемы. В исследованиях по ползучести высокотемпературной техники важную роль отводят теориям ползучести и методам расчета [1–3]. Преимущественно в этих исследованиях используются инкрементальные теории ползучести со структурными параметрами и численные методы. Среди последних особое место занимают вариационные методы, хорошо зарекомендовавшие себя в расчетах упругого, упруго-пластического деформирования и при ползучести [1–6,8,9]. Недостатки существующих методов указаны в [1,3,5–7]. В данной статье, для расчетов на ползучесть предложен метод, основанный на сочетании метода пошагового продолжения решений по времени с методом поиска на шаге времени стационарных точек смешанных вариационных функционалов. Подход, принятый в работе, позволяет развить существующие методы расчета на ползучесть за счет нового метода, предложенного в статье. В рамках этого подхода получил распространение для расчетов на ползучесть, эффективный при численной реализации метод, предложенный в [8] для решения задач теории упругости.

3. Вариационная постановка задач ползучести. Используя обычно применяемые обозначения [1–3,5–9], полную систему уравнений теории ползучести относительно неизвестных компонент тензоров напряжений, деформаций и перемещений произвольных тел, закрепленных на части поверхности – Γ_u и нагруженных объемными и, на части поверхности – Γ_p , поверхностными силами, запишем в виде:

$$\nabla_j \sigma^{ij} + f^i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij} = d_{ijkl} \sigma^{kl} + C_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma^{ij} n_j - t^i = 0 - \Gamma_p, \quad u_i - u_i^* = 0 - \Gamma_u,$$

причем в начальный момент времени напряженно-деформированное состояние тела отвечает упругому состоянию, а деформации ползучести $C_{ij}|_{t=0} = 0$.

Рассматривая тела из изотропных при ползучести материалов, уравнения состояния ползучести с параметром повреждаемости $\omega(t)$ [1–7], конкретизируем так

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ij} &= \Lambda(\sigma_e, \omega) \cdot S_{ij}, \quad \omega(0) = 0, \\ \dot{\omega}_{ij} &= \Omega(\sigma_e^\omega, \omega), \quad \omega(t_*) = \omega_*, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$\Lambda(\sigma_e, \omega)$, $\Omega(\sigma_e^\omega, \omega)$ – функции, определяемые по кривым ползучести вплоть до разрушения образцов из материала тела;

t_* , ω_* – время разрушения и критическое значение параметра повреждаемости;

σ_e , σ_e^ω – напряжения Мизеса и эквивалентные напряжения, отвечающие теории длительной прочности.

Например, зависимости типа Нортонa [4,5] следуют из (2) при

$$\Lambda(\sigma_e, \omega) = \frac{B\sigma_e^{n-1}}{(1-\omega^r)^m}, \quad \Omega(\sigma_e^\omega, \omega) = \frac{D(\sigma_e^\omega)^k}{(1-\omega^r)^l}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = \omega_*. \quad (3)$$

Далее, рассмотрим следующий функционал

$$\begin{aligned} R_{u\sigma} &= \iiint_V \left[\frac{1}{2} \sigma^{ij} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - \sigma^{ij} C_{ij} - \Lambda(\sigma_{ij}) - f^i u_i \right] dV - \\ &\quad - \iint_{S_t} t^i u_i dS - \iint_{S_n} n_i \sigma^{ij} (u_j - u_j^*) dS, \end{aligned} \quad (4)$$

где примем

$$\Lambda(\sigma^{ij}) = \frac{1}{2} d_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}.$$

В дальнейшем предположим, что в некоторый момент времени t_k , деформации ползучести определены. По аналогии с вариационным принципом, сформулированным в работе [9], независимыми варьируемыми величинами в произвольный момент времени t_k примем перемещения и напряжения, а вариации деформаций ползучести при этом считаем нулевыми: $\delta C_{ij} = 0$. Найдем уравнения Эйлера-Остроградского для функционала (4), считая, что вариации объемных и поверхностных сил, как и деформаций ползучести равны нулю, а оператор варьирования действует лишь на варьируемые переменные: перемещения и напряжения. Тогда, с учетом симметричности тензоров напряжений и деформаций, после использования теоремы Гаусса-Остроградского и группировки членов при независимых вариациях, первую вариацию функционала (4) представим в виде:

$$\delta R_{u\sigma} = \iiint_V \left[\delta \sigma^{ij} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - d_{ijkl} \sigma^{kl} - C_{ij} \right\} - \delta u_i (\nabla_j \sigma^{ij} + f^i) \right] dV. \quad (5)$$

Заметим, что из условия стационарности функционала (4) $\delta R_{u\sigma} = 0$, уравнения Эйлера-Остроградского принимаю следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma^{ij} + f^i &= 0, \quad \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = d_{ijkl} \sigma^{kl} + C_{ij}, \\ \sigma^{ij} n_j - t^i &= 0 - \Gamma_p, \quad u_i - u_i^* = 0 - \Gamma_u. \end{aligned}$$

Полученные выше уравнения отвечают исходной системе уравнений (1), что позволяет сформулировать следующий вариационный принцип: «функции, описывающие напряженно-деформированное состояние при известных в произвольный момент времени деформациях ползучести, придают функционалу $R_{u\sigma}$ стационарное значение». Вариационный функционал (4) следует отнести к смешанным функционалам, причем в начальный момент времени при нулевых деформациях ползучести из него следует известный функционал Рейсснера [4,8].

4. Метод решения задач ползучести. Отметим, что величины C_{ij} входят в функционал (4) как параметры и их необходимо определить из уравнений (2) независимо от решения сформулированной выше задачи. Для интегрирования уравнений (2) по времени применим численный метод Рунге-Кутты-Мерсона [6,7]. Для дальнейшего рассмотрения введем вектор $\bar{y} = \bar{y}(C_{ij}, \omega)$, составленный из значений деформаций ползучести и повреждаемости в точках дискретизации тела, и преобразуем уравнения (2) в векторную форму:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}), \quad \bar{y}(t_0) = \bar{y}^{(0)}. \quad (6)$$

Решение на каждом последующем шаге времени вычисляется так:

$$\bar{y}(t + \Delta t) = \bar{y}(t) + \frac{1}{2} (\bar{k}_1 + 4\bar{k}_4 + \bar{k}_5) + O(\Delta t)^5, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{1}{3} \Delta t \bar{f}[t, \bar{y}(t)], \quad \bar{k}_2 = \frac{1}{3} \Delta t \bar{f}[t + \frac{1}{3} \Delta t, \bar{y}(t) + \bar{k}_1], \\ \bar{k}_3 &= \frac{1}{3} \Delta t \bar{f}[t + \frac{1}{3} \Delta t, \bar{y}(t) + \frac{1}{2} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)], \quad \bar{k}_4 = \frac{1}{3} \Delta t \bar{f}[t + \frac{1}{2} \Delta t, \bar{y}(t) + \frac{3}{8} (\bar{k}_1 + 3\bar{k}_3)], \\ \bar{k}_5 &= \frac{1}{3} \Delta t \bar{f}[t + \Delta t, \bar{y}(t) + \frac{3}{2} (\bar{k}_1 - 3\bar{k}_3 + 4\bar{k}_4)]. \end{aligned}$$

Метод позволяет автоматизировать выбор шага по заданной величине методической погрешности для одной из переменных интегрирования, например, параметра повреждаемости. При этом критерий выбора величины шага времени состоит в следующем: если погрешность ε_i :

$$\varepsilon_i = k_{1i} - \frac{9}{2}k_{3i} + 4k_{4i} - \frac{1}{2}k_{5i} \quad (8)$$

превышает заданную величину ε , то предыдущее значение шага Δt уменьшают в два раза и вычисления выполняют заново. Если ε_i оказывается меньше, чем $\varepsilon/32$, то шаг удваивается и вычисления продолжают. Значение шага в начальный момент времени принимают достаточно малым, что устанавливается численными экспериментами.

По найденным в некоторый момент времени деформациям ползучести методом Ритца отыскиваются искомые функции перемещений и напряжений из вариационного равенства для смешанного вариационного функционала (4). Рассмотрим класс функций перемещений и напряжений, точно удовлетворяющих граничным условиям. Для этого, как и в [8], воспользуемся вариационно-структурным методом теории R-функций [5]. Структуры решений для искомых параметров напряженно-деформированного состояния, например для тел вращения [8], можно записать в виде:

$$u_i = u_{i*} + \sum_{r=1}^n a_i^{(r)} \varphi_i^{(r)}, \sigma^{ij} = \sigma_*^{ij} + \sum_{r=1}^n b_{(r)}^{ij} \psi_{(r)}^{ij}, \quad (9)$$

где u_{i*}, σ_*^{ij} – заданные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, $q_u \{a_i^{(r)}\}, q_\sigma \{b_{(r)}^{ij}\}$ – векторы, составленные из коэффициентов структур решений, подлежащих определению, $\varphi_i^{(r)}, \psi_{(r)}^{ij}$ – координатные функции, обладающие свойством полноты. Величины $u_{i*}, \sigma_*^{ij}, \varphi_i^{(r)}, \psi_{(r)}^{ij}$ выбираются таким образом, чтобы аппроксимации (9) тождественно удовлетворяли всем граничным условиям. Количество базисных функций в каждой из структур (9) можно выбрать разным, однако для упрощения арифметических преобразований примем их равными n .

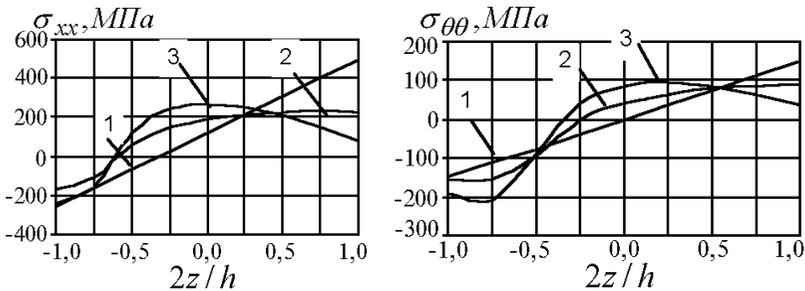
После подстановки структур решения (9) в вариационное равенство $\delta R_{u\sigma} = 0$, с учетом независимости варьируемых функций, как и в [8], для вычисления коэффициентов аппроксимации неопределенных компонент структур решений получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \\ [R_{21}] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ q_u \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_\sigma + p_c \\ p_u \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где $[R_{ij}]$ – блочные матрицы; p_σ, p_u – векторы, соответствующие заданным значениям искомых функций на границах тела, компоненты которых совпадают с представленными в [8], p_c – вектор «фиктивных» сил, отвечающий деформациям ползучести, компоненты которого в виду громоздкости здесь не приводятся. Коэффициенты матриц и векторов алгебраической системы (10) подсчитываются численно по квадратурным формулам Гаусса. Линейная алгебраическая система (10) разрешается на каждом шаге времени численно методом Гаусса.

Результаты исследований. Рассмотрим результаты исследования сходимости приближенных решений на примере ползучести под внутренним давлением, растянутого в осевом направлении короткого цилиндра из материала Д16 АТ ($T = 300^{\circ}\text{C}$), края которого закреплены в жестких фланцах.

В расчетах принято, что длина, толщина и средний радиус цилиндра, соответственно равны: $L = 0,12\text{ м}$, $h = 0,01\text{ м}$, $R = 0,25\text{ м}$, давление $q = 10^4\text{ кН/м}^2$, осевая сила $T_x = qR/2\text{ кН/м}$. В численных исследованиях варьировались количество свободных компонент в структурах решений и значением погрешности при интегрировании уравнений состояния. На рисунке показаны эпюры напряжений в закрепленном сечении цилиндра в начальный момент времени – 1, в процессе ползучести – 2, к моменту окончания скрытого разрушения ($\omega_* = 0,9$) – 3.



Эпюры напряжений в сечении цилиндра

Координатная сетка, в которой сохранялись значения компонент необратимых деформаций ползучести и параметра повреждаемости выбиралась так: 41 точка по длине цилиндра и 9 точек по толщине. Установлено, что при $n > 10$ и $\varepsilon = 0,0001$ результаты расчетов практически не отличаются между собой.

Выводы. Предложен вариационный принцип и эффективный метод решения нелинейных начально-краевых задач ползучести тел. В примерах расчетов цилиндров установлены свойства внутренней сходимости приближенных решений, отыскиваемых по методике, представленной в статье.

Список литературы: 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 752 с. 2. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М., Машиностроение, 1975. – 400 с. 3. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1986. – 360 с. 4. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 222 с. 5. *Рвачев В.Л.* Теории R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. *Tech. Mech.*, 20, (2000). P. 215-226. 7. *H.Altenbach, O.Morachkovsky, K.Naumenko, A.Sychov.* Geometrically nonlinear bending of thin – walled shells and plates under creep – damage conditions. *Arch. Appl. Mech.*, 67, (1997). P. 339-352. 8. *Ромашов Ю.В.* Разработка метода расчета контактных напряжений на уплотнительных поверхностях затворов высокого давления. Дис. канд.техн.наук: 05.02.09. – Харьков, 2001. – 202 с. 9. *Абдулла-Заде Ф.Г.* Об одном вариационном принципе теории ползучести для расчета предварительно напряженных тел // МТТ, № 4, 1993. – С. 118-122.

Поступила в редколлегию 4.04.2003