

**К.В. АВРАМОВ**, канд.техн.наук, **Ю.В. МИХЛИН**, д-р физ.мат.наук

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФЕРМУ МИЗЕСА

Для дослідження нелінійної динаміки механічної системи з фермою Мізеса застосовується метод нелінійних нормальних форм коливань. Аналіз стійкості періодичних рухів приводить до рівняння Матьє. Одержана зона нестійкості нелінійної нормальної форми коливань.

The method of nonlinear normal modes is used to study nonlinear dynamics of mechanical system with snap-through truss. Mathieu's equation is derived to study the motions stability. The domain of instability of nonlinear normal mode is obtained.

**1. Введение в постановка задачи.** Много усилий сделано для исследования нелинейных колебаний систем с прощелкиванием [1], что объясняется важностью этих задач в инженерном деле. Первым статику такой системы рассматривал Мизес [2]. Дж.Стокер [3] изучал явление прощелкивания на основе динамических моделей. В [4] рассматривается ферма Мизеса, находящаяся под действием статической нагрузки, и формулируется критерий возникновения прощелкивания на основе анализа динамической системы на плоскости. Е.Б.Кузнецов, Н.А.Кулаков, В.И.Шалашилин [5] энергетическим методом определяют максимальную величину внезапно приложенной к ферме Мизеса и постоянной во времени нагрузки, которая не вызывает прощелкивания. А.С.Вольмир, В.А.Фельдштейн [6] исследуют динамику фермы Мизеса, которая находится под действием внезапно приложенной нагрузки. Получены значения нагрузок, при которых система начинает прощелкивать. В статье [7] экспериментально исследуются периодические и хаотические прощелкивания колонны Стокса. Описание процесса прощелкивания с использованием многомоновых моделей содержится в [8].

В настоящей статье рассматривается конструкция, содержащая осциллятор, колебания которого гасятся, и ферму Мизеса, которая является поглотителем колебаний. Здесь анализируются случаи, когда ферма Мизеса совершает малые колебания около положения статического равновесия. Для анализа таких движений применяется метод нормальных форм колебаний. Исследуется устойчивость этих колебаний по Ляпунову.

**2. Основные уравнения.** Уравнения движения системы (рис.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{U} + \kappa_1 U + \kappa \left[ U - L \cos \varphi + L \left\{ 1 + \frac{W^2}{(L \cos \varphi - U)^2} \right\}^{-1/2} \right] &= 0; \\
 m\ddot{W} + \kappa W \left[ 2 - L \left\{ (L \cos \varphi - U)^2 + W^2 \right\}^{1/2} - L \left\{ L^2 \cos^2 \varphi + W^2 \right\}^{1/2} \right] &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $(U, W)$  – обобщенные координаты;  $L$  – длина упругого элемента;  $\varphi$  – угол наклона фермы Мизеса;  $\kappa$  – жесткость упругого элемента фермы;  $\kappa_1$  – жесткость основной системы.

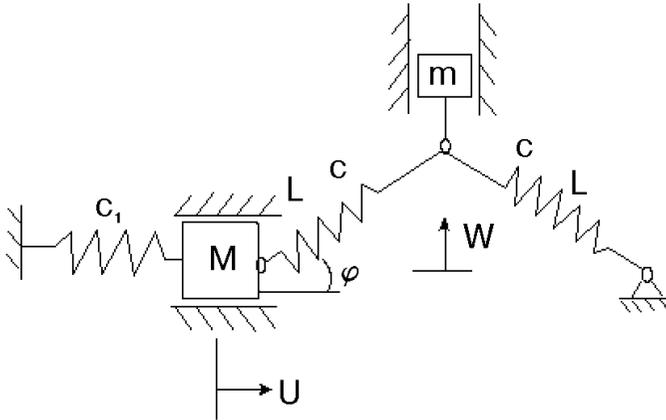


Рис.1. Механическая система.

Введем безразмерные переменные:  $u = \frac{U}{L}$ ;  $w = \frac{W}{L}$ ;  $t = \sqrt{\frac{M}{\kappa_1}} \tau$ ;  $\gamma = \frac{\kappa}{\kappa_1}$ ;

$\mu = \frac{m}{M}$  и новую координату:  $u_1 = u + \frac{\gamma(1-\kappa)}{1+\gamma}$ . Если в системе наблюдается режим виброгашения, который является предметом нашего анализа, то выполняется следующее неравенство  $u_1 \ll w$ . Предположим, что масса и жесткость гасителя значительно меньше соответствующих параметров основной системы:

Разлагая правые части системы (1) в ряды Тейлора и ограничиваясь линейными и квадратичными слагаемыми, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\mu = \varepsilon \bar{\mu}; \quad \gamma = \varepsilon \bar{\gamma}; \quad \varepsilon \ll 1.$$

$$\ddot{u}_1 + (1 + \varepsilon \bar{\gamma}) u_1 - \frac{\varepsilon \bar{\gamma}}{\rho^3} u_1 w^2 - \frac{\varepsilon \bar{\gamma}}{2 \rho^2} w^2 = 0; \quad (2)$$

$$\bar{\mu} \ddot{w} - \bar{\gamma} \alpha^2 w - \frac{\bar{\gamma}}{\rho^2} w u_1 + \frac{\bar{\gamma} \beta^2}{2} w^3 = 0, \quad (3)$$

$$\text{где} \quad \rho = \frac{\gamma + \kappa}{1 + \gamma}; \quad \alpha^2 = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\kappa} - 2; \quad \beta^2 = \frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\kappa^3}. \quad (4)$$

Так как рассматриваются малые колебания около положения статического равновесия, то введем следующую замену переменных:  $w - \sin \varphi = \varepsilon w_1$ ;  $u_1 = \varepsilon u_2$ . Тогда система (2,3) примет следующий вид:

$$\ddot{u}_2 + (1 + \varepsilon\bar{\gamma}c^2)u_2 - \varepsilon\bar{\gamma}csw_1 + \varepsilon^2\bar{\gamma}\left[\tilde{\beta}w_1u_2 + \tilde{\alpha}w_1^2 - \frac{3}{2}s^2cu_2^2\right] = 0; \quad (5)$$

$$\bar{\mu}\ddot{w}_1 + \bar{\gamma}(2s^2w_1 - scu_2) + \varepsilon\bar{\gamma}\left\{3sc^2w_1^2 + \frac{\tilde{\beta}}{2}u_2^2 + 2\tilde{\alpha}w_1u_2\right\} = 0;$$

$$\text{где } \tilde{\beta} = s - 3sc^2; \quad \tilde{\alpha} = \frac{3}{2}s^2c - \frac{c}{2}; \quad s = \sin \varphi; \quad c = \cos \varphi.$$

**3. Анализ периодических движений.** Для анализа нормальных форм колебаний [8] запишем уравнения движения в следующем виде:

$$\ddot{u}_2 + \tilde{\Pi}'_{u_2} = 0; \quad \varepsilon\bar{\mu}\ddot{w}_1 + \tilde{\Pi}'_{w_1} = 0; \quad (6)$$

$$\tilde{\Pi} = (1 + \varepsilon\bar{\gamma}c^2)\frac{u_2^2}{2} + \varepsilon\bar{\gamma}s^2w_1^2 - \varepsilon\bar{\gamma}csw_1u_2 + \varepsilon^2\bar{\gamma}\left\{\frac{\tilde{\beta}}{2}w_1u_2^2 + \tilde{\alpha}w_1^2u_2 + sc^2w_1^3 - \frac{s^2c}{2}u_2^3\right\},$$

где  $\tilde{\Pi}$  – потенциальная энергия системы. Из уравнений движения исключаем время. Для этого воспользуемся интегралом энергии:

$$\frac{\dot{u}_2^2}{2} + \varepsilon\bar{\mu}\frac{\dot{w}_1^2}{2} + \tilde{\Pi} = h. \text{ В результате получаем уравнения}$$

$$\frac{2(h - \tilde{\Pi})}{u_2^2 + \varepsilon\bar{\mu}}u_2'' - \frac{\tilde{\Pi}'_{w_1}}{\varepsilon\bar{\mu}}u_2' = -\tilde{\Pi}'_{u_2}, \quad (7)$$

которые описывают зависимость переменных конфигурационного пространства  $u_2 = u_2(w_1)$ . Здесь штрих означает дифференцирование по  $w_1$ ,  $h$  – общая энергия системы. К уравнению (7) добавим два граничных условия, которые обеспечивают аналитическое продолжение траекторий в конфигурационном пространстве на максимальную эквипотенциальную поверхность:

$$\left. \left( \frac{\tilde{\Pi}'_{w_1}}{\varepsilon\bar{\mu}}u_2' - \tilde{\Pi}'_{u_2} \right) \right|_{\tilde{\Pi}=h} = 0.$$

**3.1. Локализованные периодические движения**  $u_2 = \varepsilon\bar{u}_2(w_1)$ . Колебания системы (5) представим в виде:  $u_2 = \varepsilon\bar{u}_2(w_1)$ . Тогда первое асимптотическое приближение по  $\varepsilon$  уравнений (7) примет следующий вид:

$$(\bar{h} - \bar{\gamma}s^2w_1^2)\bar{u}_2'' - \bar{\gamma}s^2w_1\bar{u}_2' - (\bar{\gamma}csw_1 - \bar{u}_2)\frac{\bar{u}_2}{2} = 0; \quad h = \varepsilon\bar{h}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представим в виде степенного ряда:

$$\bar{u}_2 = b_0 + b_1w_1 + b_2w_1^2 + \dots \quad (9)$$

Из интеграла энергии определим амплитуду колебаний  $W_*^{(\max)}$ :

$W_*^{(\max)} = \sqrt{\frac{\bar{h}}{\bar{\gamma} s^2}}$ . Тогда первое приближение для граничных условий будет следующим:

$$\left\{ \bar{\gamma} s^2 w_1 \bar{u}'_2 + (\bar{\gamma} c s w_1 - \bar{u}_2) \frac{\bar{\mu}}{2} \right\} \Big|_{w_1 = \pm W_*^{(\max)}} = 0. \quad (10)$$

Ряд (9) вводится в уравнение (8) и производится уравнивание коэффициентов по степеням  $w_1$ . Ограничиваясь членами порядка  $w_1^0, w_1, w_1^2$ , получаем в результате три линейных алгебраических уравнения относительно пяти неизвестных  $b_0, \dots, b_4$ . К этим уравнениям добавляются два линейных алгебраических уравнения, которые выводятся из граничных условий. Решение полученной системы уравнений можно записать в виде:

$$b_1 = \frac{\bar{\gamma} c s}{1 - 2p^2 s^2}; \quad b_0 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad (11)$$

где  $p^2 = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\mu}}$ .

**3.2. Нелокализованные движения**  $u_2 = g w_1 + \varepsilon u_3(w_1)$ . Вторую нелокализованную нормальную форму представим в виде:

$$u_2 = g w_1 + \varepsilon u_3(w_1). \quad (12)$$

Тогда уравнения (7) с учетом (12) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 u_3'' \left( \frac{h}{g^2} - \frac{w_1^2}{2} \right) - \\ & - p^2 \left[ g(2s^2 - csg) w_1 + \varepsilon \left\{ g(Bw_1^2 - csu_3) + u_3' w_1(2s^2 - csg) \right\} \right] + \tilde{\Pi}'_{u_3} = 0; \\ & B = \frac{1}{2} \tilde{\beta} g^2 + 2\tilde{\alpha} g + 3sc^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Два приближения решения по степеням  $\varepsilon$  получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Из нулевого приближения получаем:

$$g = \frac{1}{sc} (2s^2 - p^{-2}). \quad (14)$$

Из первого приближения получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & 2u_3'' \left( \frac{h}{g^2} - \frac{w_1^2}{2} \right) - p^2 \left\{ g(Bw_1^2 - csu_3) + u_3' w_1(2s^2 - csg) \right\} + u_3 + \\ & + \bar{\gamma} c^2 g w_1 - \bar{\gamma} c s w_1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (15) представим в следующем виде:

$$u_3 = c_0 + c_1 w_1 + c_2 w_1^2 + \dots \quad (16)$$

Амплитуда колебаний  $W_1^{(\max)}$  определяется из интеграла энергии:  $\tilde{\Pi}(W_1^{(\max)}) = h$ . Тогда  $W_1^{(\max)} = \sqrt{2h/g^2}$ . Граничные условия записываются так:

$$\left\{ -p^2 [g(Bw_1^2 - csu_3) + u_3' w_1 (2s^2 - cs g)] + u_3 + \tilde{\gamma} c^2 g w_1 - \tilde{\gamma} c s w_1 \right\}_{w_1 = \pm W_1^{(\max)}} = 0. \quad (17)$$

Подставляя ряд (16) в (15) и (17), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда (16). Решения этой системы имеют следующий вид:

$$c_0 = -\frac{hB}{gs^2(s^2 p^2 - 2)}; \quad c_1 = \tilde{\mu} \left( \frac{1}{g} - \frac{c}{s} \right); \quad c_2 = \frac{p^2 g B}{2(s^2 p^2 - 2)}; \quad c_3 = c_4 = 0. \quad (18)$$

**4. Устойчивость периодических движений.** При анализе устойчивости периодических движений используем малую кривизну нормальных форм колебаний в конфигурационном пространстве. В этой статье мы ограничимся прямолинейной аппроксимацией нормальной формы. Введем новые переменные  $(\xi, \eta)$  таким образом. Ось  $\xi$  располагается вдоль прямолинейной аппроксимации нормальной формы, а ось  $\eta$  направим в ортогональном направлении. Тогда ортогональная вариация  $\eta(t)$  определяет орбитальную устойчивость нормальной формы. Задача сводится к анализу одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим устойчивость нелокальной формы колебаний, которая была рассмотрена в разделе 3.2. Введем замену переменных

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{u_2}{g}; -\frac{u_2}{g} + w_1 \right). \quad \text{В конфигурационном пространстве } (u_1, w_1) \text{ эти пе-}$$

ременные совпадают с нормальными координатами линеаризованной системы (6). Теперь систему (6) представим в следующем виде:

$$\ddot{\xi} + \xi + \varepsilon f_1(\xi, \eta) = 0; \quad (19)$$

$$\ddot{\eta} + 2s^2 p^2 \eta + \varepsilon f_2(\xi, \eta) = 0, \quad (20)$$

где 
$$f_1(\xi, \eta) = \tilde{\gamma} c^2 \frac{p^2 s^2 - 1}{2p^2 s^2 - 1} \xi - \frac{\tilde{\gamma} c s}{g} \eta;$$

$$f_2(\xi, \eta) = -\tilde{\gamma} c^2 \frac{p^2 s^2 - 1}{2p^2 s^2 - 1} \xi + \frac{\tilde{\gamma} c s}{g} \eta + p^2 (A \xi^2 + B \xi \eta + 3s c^2 \eta^2);$$

$$A = 3s c^2 + \frac{1}{2} \tilde{\beta} g^2 + 2\tilde{\alpha} g; \quad B = 6s c^2 + 2\tilde{\alpha} g.$$

Представим решение уравнения (19) в виде:

$$\xi = \xi_{\max} \text{Cos}(t) + O(\varepsilon), \quad (21)$$

где  $\xi_{\max}$  – амплитуда колебаний. Соотношение (21) подставляем в (20). Малое возмущение  $\Delta\eta(t)$  периодического решения  $\eta(t)$  определит устойчивость решения. Уравнение в вариациях с учетом слагаемых порядка  $O(\varepsilon)$  имеет вид:

$$\Delta\dot{\eta} + \left( 2s^2 p^2 + \varepsilon \frac{\bar{\gamma}cs}{g} + \varepsilon p^2 B \xi_{\max} \text{Cos}(t) \right) \Delta\eta = 0. \quad (22)$$

Асимптотический анализ решений уравнения Матье (22) представлен в монографии [9]. Из этого анализа следует, что граница области неустойчивости (22) описывается уравнением:

$$2\sqrt{2}ps^2 - 8p^2s^3 = \mp\varepsilon\xi_{\max}. \quad (23)$$

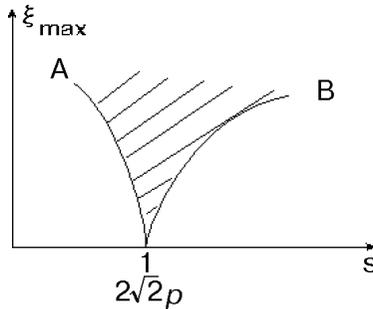


Рис.2. Граница области неустойчивости.

Эта граница качественно показана на рис.2, где по оси  $x$  откладываются  $s = \sin \varphi$ . Периодические колебания являются неустойчивыми в заштрихованной области и устойчивыми вне этой области. Ключом этой области является точка  $O(\text{Sin}\varphi_*, 0)$ . Значение  $\varphi_*$  определяется следующим образом:

$$\varphi_* = \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p}\right) \quad (24)$$

Рассмотрим устойчивость локализованного периодического движения, которое рассматривалось в разделе 3.1. Воспользуемся следующей оценкой для обобщенных координат:  $w_1 = O(1)$ ;  $u_1 = O(\varepsilon)$ . Представим второе уравнение системы (5) в виде:

$$\bar{\mu}\ddot{w}_1 + 2\bar{\gamma}s^2 w_1 + O(\varepsilon) = 0. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) запишем так:

$$w_1 = W_*^{(\max)} \text{Cos}(ps\sqrt{2}t) + O(\varepsilon).$$

Тогда второе уравнение системы (5) имеет вид:

$$\ddot{u} + \left( 1 + \varepsilon \bar{\gamma} c^2 - \frac{\bar{\gamma} c s}{b_1} \right) u + \varepsilon^2 \bar{\gamma} (\tilde{\beta} w_1 u + \tilde{\alpha} w_1^2) = 0. \quad (26)$$

Введем малые ортогональные отклонения от периодического движения  $\Delta\eta(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение относительно  $\Delta\eta$ ,

$$\Delta\ddot{\eta} + \left[ 2p^2 s^2 + \varepsilon \bar{\gamma} c^2 + \varepsilon^2 \bar{\gamma} \beta W_*^{(\max)} \text{Cos}(ps\sqrt{2}t) \right] \Delta\eta = 0. \quad (27)$$

вновь представляет собой хорошо изученное уравнение Матье [9]. Используя результаты, изложенные в [9], можно сделать следующий вывод. В слагаемых порядка  $O(\varepsilon^2)$  резонансов не наблюдается. Резонансы имеют место лишь в членах порядка  $O(\varepsilon^4)$ . Этими слагаемыми можно пренебречь. Поэтому с точностью до членов высшего порядка малости локализованная форма колебаний всегда устойчива.

**5. Выводы.** В статье исследуется конструкция, содержащая ферму Мизеса. Полученные результаты можно использовать для анализа возможности гашения свободных колебаний с помощью фермы Мизеса. Основная система, колебания которой предполагается погасить, является линейной, а гаситель является существенно нелинейным элементом, который поглощает большую часть энергии колебаний основной системы. В статье исследованы две нормальные формы колебаний системы около положения статического равновесия. Одна из форм является нелокальной, когда основная масса и абсорбер совершают значительные колебания. Как следует из анализа устойчивости, такая форма колебаний становится неустойчивой по Ляпунову. Вторая форма колебаний является локальной, то есть основная масса совершает малые колебания, а абсорбер большие. Эти движения отвечают как раз режиму виброгашения в системе. Такая форма колебаний оказалась устойчивой.

**Список литературы:** 1. *Бондарь Н.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике. – Киев: Вища школа, 1987. – 210 с. 2. *Mises* Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie // *Z. Angew. Math. Mech.* 3, 406, 1923. 3. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 261 с. 4. *Nachbar W., Huang N.C.* Dynamic snap – through of a simple viscoelastic truss // *Q. Appl. Math.*, 25, 65-82, 1967. 5. *Кузнецов Е.Б., Кулаков Н.А., Шалашин В.И.* О действии динамических нагрузок на некоторые упругие системы с прощелкиванием // *Избранные проблемы прикладной механики, посвященный 60-летию академика В.Н.Челомея.* Академия наук, Москва. – 1974. 6. *Вольмир А.С., Фельдштейн В.А.* Динамические катастрофы в системах с прощелкиванием // *Механика композиционных материалов* № 6, 1984. – С. 1109-1112. 7. *Cook G.R., Simiu E.* Periodic and chaotic oscillations of Modified Stoker Column // *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, № 9, September, 1991. – P. 2049-2064. 8. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных форм для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 350 с. 9. *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Гос. физ. мат. лит., 1958. – 406 с.

*Поступила в редакцию 2.06.2003*