

четной области. Из анализа представленных в таблице 2 результатов для различных значений толщины цилиндра, когда давление p_1 действует не на всей внутренней поверхности ($b = 0,5a$), следует, что теория [6] применима для оболочек средней толщины при $h/R \leq 1/5$; для более толстых оболочек необходимо использовать более точные сдвиговые модели.

В заключение отметим, что при решении рассмотренных задач в силу программно реализованной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер.

Список литературы: 1. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера // Вестник Харьков. гос. политех. ун-та. - Харьков: ХГПУ. - 2000. - Вып. 95. - С. 70-75. 2. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. О методе двусторонней оценки решений смешанных вариационных задач теории упругости // Информ. технологии: Сб. науч. трудов ХГПУ. - Харьков: ХГПУ. - 1999. - Вып. 7, Ч.1. - С. 322-326. 3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. - К.: Наук. думка, 1982. - 566 с. 4. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир, 1979. - 309 с. 5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1983. - 448 с. 6. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. - СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-т, 1996. - 278 с.

Поступила в редколлегию 27.02.02

УДК 539.3

С.Н.СКЛЕПУС, канд.физ.-мат.наук

ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

В статті розглядається задача повзучості гнучких пластин складної форми. Наведено варіаційну постановку задачі на основі варіаційного принципу в формі Лагранжа. Метод розв'язку нелінійної задачі повзучості базується на сумісному застосуванні методів R-функцій, Рітца та Рунге-Кутта-Мерсона. Наведені результати розрахунку повзучості квадратної пластини та пластини складної геометричної форми.

В процессе ползучести стрела прогиба пластины может достигь величины, сравнимой с ее толщиной ($w \geq 0,2h$). В этом случае необходимо использовать геометрически нелинейную теорию пластин больших прогибов.

Пластинчатые элементы конструкций часто имеют неканоническую форму и сложные условия закрепления. Адекватное описание физически и геометрически нелинейного поведения таких объектов требует разработки достаточно точных и универсальных методов расчета.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2z тон-

кую изотропную пластину толщиной h произвольной формы Ω . Температура постоянная. Пластина нагружена поперечной нагрузкой $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$, контурными нормальными $P_n^{(0)}(x_1, x_2, t)$ и касательными $P_\tau^{(0)}(x_1, x_2, t)$ усилиями. Здесь \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – внешняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$.

Предполагаем, что выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява. Считаем, что деформации в пластине остаются малыми в процессе ползучести, а квадраты углов поворота элемента пластины имеют тот же порядок, что и деформации.

Тензор скоростей полных деформаций может быть представлен как

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + p_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где ε_{ij}^e – тензор скоростей упругих деформаций, p_{ij} – тензор скоростей деформаций ползучести. Точка над символом обозначает производную по времени.

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява, выражения для скоростей перемещений точек пластины и связь между скоростями полных деформаций и скоростями перемещений имеют вид

$$\dot{v}_1 = \dot{u}_1 - z\dot{w}_{,1}, \quad \dot{v}_2 = \dot{u}_2 - z\dot{w}_{,2}, \quad \dot{v}_3 = \dot{w}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + w_{,1} \dot{w}_{,1}, \quad \varepsilon_{22} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + w_{,2} \dot{w}_{,2},$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1}, \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где u_1, u_2, w – скорости перемещений точек координатной поверхности вдоль осей $0x_1, 0x_2, 0z$ соответственно.

Продифференцировав по времени закон Гука, запишем связь между скоростями напряжений и скоростями деформаций:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - p_{11} - \nu p_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - p_{22} - \nu p_{11}),$$

$$\sigma_{12} = G(\gamma_{12} - 2p_{12}). \quad (4)$$

Здесь E, G, ν – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

В общем случае, задача ползучести для произвольного тела объемом V , в момент времени $t \neq 0$, может быть сведена к вариационной задаче для функционала относительно кинематически возможных скоростей перемещений [1]:

$$I(\dot{v}_i) = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{kl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - p_{kl}) + \sigma_{ij} \dot{v}_{k,i} \dot{v}_{k,j}] dV - \int_{S_2} P_i \dot{v}_i dS, \quad (5)$$

где \dot{v}_i ($i = 1, 2, 3$) – скорости перемещений; ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – тензор скоростей полных деформаций; σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – тензор напряжений Коши; P_i – скорости поверхностных нагрузок, действующих на поверхности S_2 . Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести p_{ij} считаются заданными и не зависят от скоростей изменения деформаций.

Предполагая, что $v_{i,j} \sim w_i^2 \ll 1$ ($i, j = 1, 2$), и пренебрегая членами высшего порядка малости в (5), получим функционал в форме Лагранжа для тонкой гибкой пластины:

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega(h)} \left[\sigma_{kl} (\varepsilon_{kl} - p_{kl}) + \sigma_{11} w_1^2 + \sigma_{22} w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 \right] dx_1 dx_2 dz - \\ & - \int_{\Omega} q_z w dx_1 dx_2 - h \int_{\partial\Omega} \left[P_n^{(0)} (u_1 n_1 + u_2 n_2) + P_\tau^{(0)} (u_2 n_1 - u_1 n_2) \right] d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $k, l = 1, 2$; n_1, n_2 – направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к контуру $\partial\Omega$.

Подставив формулы (3), (4) в (6) и проинтегрировав по толщине, окончательно получим:

$$\Pi = \Pi_L + \Pi_N, \quad (7)$$

где Π_L, Π_N – части функционала, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} \Pi_L = & 0,5 \iint_{\Omega} \left\{ A_1 (u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + 2A_2 u_{1,1} u_{2,2} + A_3 (u_{1,2} + u_{2,1})^2 - \right. \\ & - 2B_1 (u_{1,1} w_{,11} + u_{2,2} w_{,22}) - 2B_2 (u_{1,1} w_{,22} + u_{2,2} w_{,11}) - \\ & - 2B_3 w_{,12} (u_{1,2} + u_{2,1}) + D_1 (w_{,11}^2 + w_{,22}^2) + 2D_2 w_{,11} w_{,22} + D_3 w_{,12}^2 \left. \right\} dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) - \dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} - \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} - 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12} + \dot{q}_z \dot{w} \right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Pi_N = & 0,5 \iint_{\Omega} \left\{ A_1 (w_{,1}^2 w_{,1}^2 + w_{,2}^2 w_{,2}^2 + 2w_{,1} u_{1,1} w_{,1} + 2w_{,2} u_{2,2} w_{,2}) + \right. \\ & + 2A_2 (w_{,1} u_{2,2} w_{,1} + w_{,2} u_{1,1} w_{,2} + w_{,1} w_{,2} w_{,1} w_{,2}) + \\ & + A_3 [w_{,1}^2 w_{,2}^2 + w_{,2}^2 w_{,1}^2 + 2(u_{1,2} + u_{2,1})(w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) + 2w_{,1} w_{,2} w_{,1} w_{,2}] - \\ & - 2B_1 (w_{,1} w_{,1} w_{,11} + w_{,2} w_{,2} w_{,22}) - 2B_2 (w_{,1} w_{,1} w_{,22} + w_{,2} w_{,2} w_{,11}) - \\ & - 2B_3 w_{,12} (w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) + a_{11} w_{,1}^2 + a_{22} w_{,2}^2 + 2a_{12} w_{,1} w_{,2} \left. \right\} dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{N}_{11}^c w_{,1} w_{,1} + \dot{N}_{22}^c w_{,2} w_{,2} + \dot{N}_{12}^c (w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) \right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad A_2 = \nu A_1, \quad A_3 = \int_{(h)} G dz, \quad B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, \quad B_2 = \nu B_1,$$

$$B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz, \quad D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz;$$

$$\dot{N}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (p_{11} + \nu p_{22}) dz, \quad \dot{N}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (p_{22} + \nu p_{11}) dz, \quad \dot{N}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G p_{12} dz,$$

$$M_{11}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (p_{11} + \nu p_{22}) dz, \quad M_{22}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (p_{22} + \nu p_{11}) dz,$$

$$M_{12}^c = 2 \int_{(h)} G p_{12} z dz, \quad a_{11} = \int_{(h)} \sigma_{11} dz, \quad a_{22} = \int_{(h)} \sigma_{22} dz, \quad a_{12} = \int_{(h)} \sigma_{12} dz.$$

Условиями стационарности для функционала (7) являются уравнения равновесия и статические граничные условия, записанные для скоростей. Для скоростей перемещений должны быть заданы кинематические граничные условия.

Физические соотношения для скоростей деформаций ползучести примем в виде [4]:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{m-1} s_{kl} \frac{1}{(1-d^n)^m}, \quad (k, l = 1, 2), \quad (10)$$

где d – скалярный параметр повреждаемости, определяемый следующим уравнением:

$$\dot{d} = B \sigma_i^m \frac{1}{(1-d^n)^m}, \quad (11)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{kl} s_{kl}} \quad - \text{интенсивность напряжений}; \quad s_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} I_1,$$

$I_1 = \delta_{ij} \sigma_{ij}$; δ_{ij} – символ Кронекера; A, B, m, n – постоянные материала. В начальный момент времени $d = 0$, а критическое значение параметра повреждаемости $d = d_*$ соответствует времени разрушения $t = t_*$.

Основные неизвестные задачи в произвольной точке пластины могут быть найдены из решения начальной задачи Коши по времени:

$$\frac{dG_k}{dt} = F_k(t, G_l), \quad (k = 1, 2, \dots, 15), \quad (12)$$

где $\mathbf{G} = \{G_k\} = \{u_i, w, w_{,i}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, p_{ij}, d\}$ ($i, j = 1, 2$) – вектор неизвестных функций. Правые части уравнений (12) имеют вид: $F_1 = \dot{u}_1, F_2 = \dot{u}_2, F_3 = \dot{w}$; $F_4 = \dot{w}_{,1}, F_5 = \dot{w}_{,2}$; F_k ($k = 6, 7, 8$) определяются с помощью формул (4); F_k ($k = 9, 10, 11$) – с помощью формул (3); F_k ($k = 12, 13, 14, 15$) – формулами (10), (11).

Начальные условия для искомым функций в момент времени $t = 0$ находятся из решения линейной задачи упругого деформирования пластины. Для решения упругой задачи можно использовать функционал в форме (8), заменив скорости входящих в него функций самими функциями и отбросив добавки, связанные с ползучестью.

Таким образом, решение начально-краевой задачи ползучести пластин сводится к решению вариационной задачи для функционала (7) в сочетании с

процедурой интегрирования начальной задачи Коши (12) по времени при заданных начальных условиях.

Интегрирование начальной задачи Коши по времени будем выполнять методом Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага [4], который выбирается исходя из условия непревышения погрешностью метода некоторой заданной величины δ_0 .

Краевые задачи, в начальный момент времени и на каждом временном шаге, будем решать вариационно-структурным методом, который позволяет представить приближенное решение в виде формулы – структуры решения, точно удовлетворяющей заданным граничным условиям [2].

Рассмотрим основные типы кинематических граничных условий и соответствующие им структуры решения.

Жесткая заделка:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0, \quad u_n = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (13)$$

$$w = \omega^2 \Phi_1, \quad u_1 = \omega \Phi_2, \quad u_2 = \omega \Phi_3. \quad (14)$$

Жесткая заделка, подвижная в плоскости пластины:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0. \quad (15)$$

$$w = \omega^2 \Phi_1, \quad u_1 = \Phi_2, \quad u_2 = \Phi_3. \quad (16)$$

Шарнир, неподвижный в тангенциальном направлении:

$$w = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (17)$$

$$w = \omega \Phi_1, \quad u_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3, \quad u_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4. \quad (18)$$

Неподвижный шарнир:

$$w = 0, \quad u_n = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (19)$$

$$w = \omega \Phi_1, \quad u_1 = \omega \Phi_2, \quad u_2 = \omega \Phi_3. \quad (20)$$

Свободное опирание:

$$w = 0. \quad (21)$$

$$w = \omega \Phi_1. \quad (22)$$

Здесь $u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2$, $u_\tau = u_2 n_1 - u_1 n_2$, $w_{,n} = w_{,1} n_1 + w_{,2} n_2$; $\Phi_i(x)$ ($i=1,2,3$) – неопределенные компоненты, которые представляются в виде

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^N C_k^{(i)} \varphi_k(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

$C_k^{(i)}$ неопределенные коэффициенты; $\{\varphi_k\}$ полная система функций [2]. Функция $\omega(x)$ строится с помощью теории R-функций и удовлетворяет условиям [2]: $\omega(x) = 0$, $|\omega_{,n}| = 1$, $x \in \partial\Omega$; $\omega(x) > 0$, $x \in \Omega$.

Имея приведенные выше структуры, можно строить структурные формулы для комбинированных условий опирания. Например, если часть контура

$\partial\Omega_1$ жестко зашлемена (условия (13)), а часть $\partial\Omega_2$ – шарнирно опелта (условия (17)), то соответствующая структура решения будет иметь вид:

$$w = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1, \quad u_1 = \omega_1 \omega_{2,1} \Phi_2 + \omega_0 \Phi_3, \quad u_2 = \omega_1 \omega_{2,2} \Phi_2 + \omega_0 \Phi_4, \quad (23)$$

где $\omega_1(x) = 0, (x \in \partial\Omega_1); \omega_2(x) = 0, (x \in \partial\Omega_2); \omega_0(x) = 0, (x \in \partial\Omega_1 \vee \partial\Omega_2)$.

В качестве примеров расчета рассмотрим ползучесть прямоугольной пластины [4] и пластины неканонической формы (см. рис. 1) находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки $q_z = 0,3$ МПа. Геометрические параметры пластины: $2a = 2b = 0,08$ м, $r = 0,01$ м толщина $h = 0,003$ м. Материал – алюминиевый сплав AlCuMg2 при температуре $T = 573$ К. Условия закрепления краев – жесткая заделка, подвижная в плоскости пластины. Упругие константы: $E = 65$ ГПа, $\nu = 0,3$. Постоянные материала при ползучести [4]: $A = 3,35 \cdot 10^{-8}$ МПа $^{-m}$ ч $^{-1}$; $B = 1,9 \cdot 10^{-7}$ МПа $^{-m}$ ч $^{-1}$; $m = 3$; $n = 1,4$; $d_* = 1$. Уравнения границ области Ω приведено в [3].

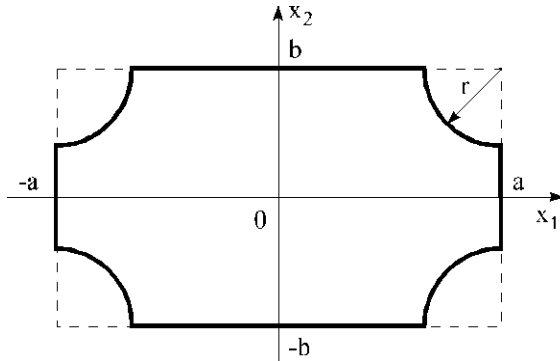


Рис. 1

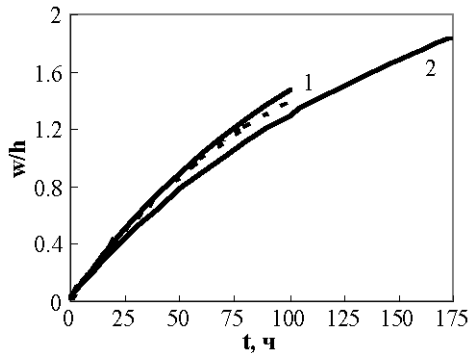


Рис. 2

Для решения использовалась структура (16). В качестве $\{\varphi_k\}$ были выбраны степенные полиномы. Для нахождения неопределенных коэффициентов использовался метод Рунге. Максимальная степень полинома для Φ_1 равнялась 12, для Φ_2, Φ_3 – 9. При численной реализации учитывалась симметрия задачи. Интегрирование по области Ω и толщине h проводилось с помощью квадратур Гаусса. Общее число узлов при интегрировании по четверти области равнялось 144, для квадратной пластины и 196, для пластины сложной формы. Число узлов по толщине равнялось 10. Погрешность интегрирования по времени $\delta_0 = 0,01$.

Результаты расчетов приведены на рис. 2-6. На рис. 2-4 сплошными линиями показаны результаты, полученные с помощью метода R-функций, пунктирными – полученные в работе [4] для квадратной пластины.

На рис.2 показано изменение во времени безразмерных прогибов в центре пластин. Здесь цифрой 1 обозначены прогибы квадратной пластины, цифрой 2 – прогибы пластины неканонической формы.

На рис.3 представлены изгибающие моменты M_{11} для квадратной пластины в центре (кривые 1) и в заделке в точке $(a;0)$ (кривые 2).

На рис.4 приведен параметр повреждаемости d при $z = h/2$ в центре квадратной пластины (кривые

1), в точке $(a; 0)$ квадратной пластины, при $z = h/2$ (кривые 2) и в точке $(a;0)$ пластины сложной формы, при $z = h/2$ (кривые 3). Было найдено время скрытого разрушения t_* в заделке, которое для квадратной пластины составило 106 часов, а для пластины с круговыми вырезами – 174 часа.

На рис. 5, 6 показано изменение напряжений во времени, при $z = h/2$, в точке $(0;0)$ и в точке $(a;0)$ соответственно. Сплошными линиями представлены напряжения в пластине сложной формы, пунктирными – в квадратной пластине.

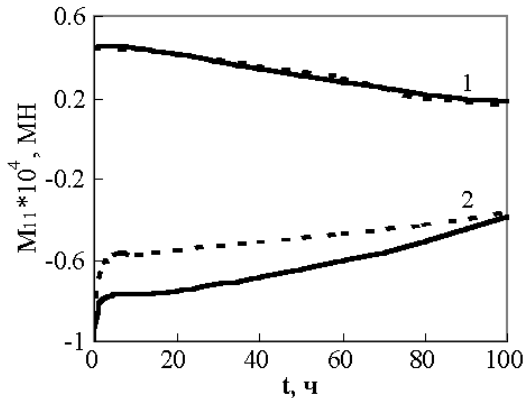


Рис. 3

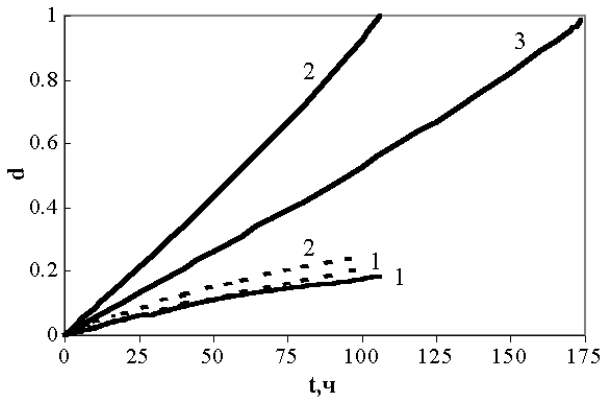


Рис. 4

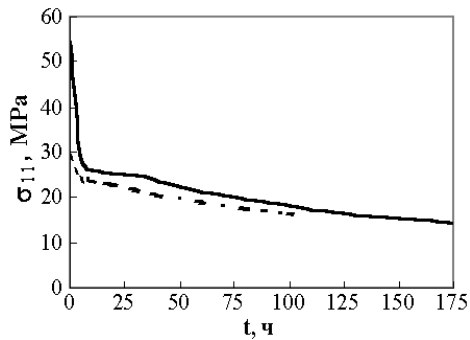


Рис. 5

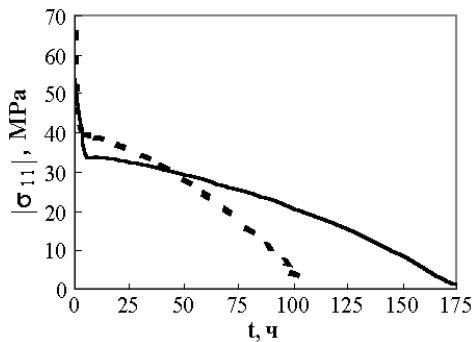


Рис. 6

Как видно из приведенных результатов, геометрическая форма пластины оказывает влияние на интенсивность процессов ползучести и повреждаемости.

Предложенный метод расчета реализован в виде комплекса программ на

языке C++ и обладает возможностями для автоматизации расчетов и проведения численного эксперимента при расчетах ползучести и длительной прочности пластинчатых элементов конструкций.

Список литературы: 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 3. *Склепус С.Н.* Вариационно-структурный метод в задачах ползучести пологих оболочек сложной формы // Доповіді НАН України. 2001. № 9. С. 73-78. 4. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions // Archive of Applied Mechanics. 1997. 67. p. 339–352.

Поступила в редакцию 04.04.02

УДК 539.3

Н.А. ТКАЧУК, канд. техн. наук

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано основи розрахунково-експериментального методу для розрахунку напружено-деформованого стану елементів складних механічних систем. Описано структурну та функціональну схеми досліджень із застосуванням методу скінчених елементів та спекл-голографічної інтерферометрії.

Рассмотрим механический объект в пространстве с декартовыми координатами, занимающий область Ω с границей $S = S_u \cup S_F \cup S_c$, где S_u – часть границы с заданными перемещениями, S_F – часть границы с заданными нагрузками, S_c – часть границы с заданными условиями контакта. Пусть задано также некоторое механическое пространственное, температурное или иное воздействие на тело. Напряженно-деформированное состояние описывается в операторном виде

$$L(u, p) = 0, \quad (1)$$

где L и u – оператор краевой задачи и переменная состояния;

p – массив параметров, включающий в зависимости от типа задачи геометрические параметры, характеристики материала, параметры силовой, термической нагрузки и т.д.

Для решения данной задачи используется расчетный метод конечных элементов и экспериментальный метод спекл-голографической интерферометрии [1,2]. Пусть в операторном виде численная модель принимает вид:

$$L_N(u_N, p_N) = 0, \quad (2)$$

где индекс N соответствует численным параметрам теоретической модели (1).