

В.А. САЛО, канд.техн.наук

О СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА НЕТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Пропонується варіаційно-структурний метод рішення крайових задач лінійної теорії пружності. Сформульована достатня ознака збіжності прямого методу Ритца для змішаного варіаційного принципу Рейсснера. Для оцінки чисельних рішень пропонується алгоритм, який ґрунтується на використанні двоїстого метода теорії випуклого аналізу. Обговорюється збіжність результатів.

Среди применяемых в расчетной практике вариационных методов решения краевых задач теории упругости все большее внимание уделяется смешанным вариационным подходам (СВП), построенным на основе функционала Рейсснера $I_R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$. Имеющиеся в научной литературе результаты свидетельствуют об эффективности СВП, однако вопросы сходимости полученных решений привлекают особое внимание.

В этом плане представляют интерес обоснование практического применения метода Ритца для неэкстремального функционала I_R , а также алгоритм двусторонней оценки точности численных решений [1,2]. Так, доказанная в работе [1] теорема о достаточном признаке сходимости метода Ритца для функционала Рейсснера утверждает: *последовательности метода Ритца сходятся к точному решению краевой задачи, сформулированной на основе смешанного вариационного принципа Рейсснера, если структуры приближенных решений точно удовлетворяют всем краевым условиям.*

Таким образом, поиск точки стационарности неэкстремального функционала Рейсснера целесообразно осуществлять на классе напряжений и перемещений, удовлетворяющих всем граничным условиям. В этом случае уместно отметить характерную особенность вариационного принципа Рейсснера, которая заключается в том, что практически все краевые задачи (в частности, Неймана и смешанные для функционалов Лагранжа и Кастильяно) становятся для функционала Рейсснера I_R в силу независимости \mathbf{u} и $\boldsymbol{\sigma}$ задачами Дирихле. Отмеченное обстоятельство, а также использование теории R-функций [3] существенно упрощают построение структур решения исследуемых краевых задач, точно удовлетворяющих различным вариантам граничных условий.

Что касается предложенного метода интегральной оценки численных решений [2], то в его основе лежит идея применения метода двойственности теории выпуклого анализа к вариационным задачам [4]. Как известно, в двойственном отношении друг с другом находятся основные принципы теории упругости Лагранжа и Кастильяно. Решением вариационной задачи для первого функционала является поле перемещений $\bar{\mathbf{u}}$, а решением двойственной – поле

напряжений $\bar{\sigma}$. Согласно [4] существует и единственна для лагранжиана $L(\mathbf{u}, \bar{\sigma})$, представляющего собой смешанный функционал Рейсснера, седловая точка $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\sigma})$, компоненты которой являются решениями основной задачи $\inf_{\mathbf{u}} I_L(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \bar{\sigma})$ и двойственной $\sup_{\sigma} I_K(\sigma) = \sup_{\sigma} L(\bar{\mathbf{u}}, \sigma)$. Тогда имеет место равенство:

$$\sup_{\sigma} I_K(\sigma) = I_R(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\sigma}) = \inf_{\mathbf{u}} I_L(\mathbf{u}). \quad (1)$$

Из (1) следует, что для функционалов Лагранжа и Кастильяно их соответственно нижняя и верхняя границы совпадают и равны значению функционала Рейсснера в его седловой точке (точке стационарности). Это обстоятельство положено в основу оценки полученных с помощью функционала I_R приближенных решений \mathbf{u}_n и σ_n , аппроксимируемых в общем случае разным числом n_u и n_σ координатных функций. Вычисление функционалов I_L , I_K и I_R позволяет автоматизировать в программе поиск таких чисел аппроксимаций n_u и n_σ , когда равенство (1) будет выполнено с наперед заданной интегральной погрешностью. Процедура приближения к седловой точке I_R производится по итерационной схеме: фиксируя n_σ , ищем значение n_u^* , при котором I_L достигает минимума; полагая затем $n_u = n_u^*$, ищем n_σ^* , при котором I_K достигает максимума. В случае выполнения равенства (1) искомые решения являются точными.

В качестве тестовых примеров, подтверждающих справедливость (1), рассмотрим вначале задачу о растяжении вдоль оси z стержня длиной $2a$. Выражения функционалов Лагранжа I_L , Кастильяно I_K и Рейсснера I_R для этой задачи имеют вид [5]:

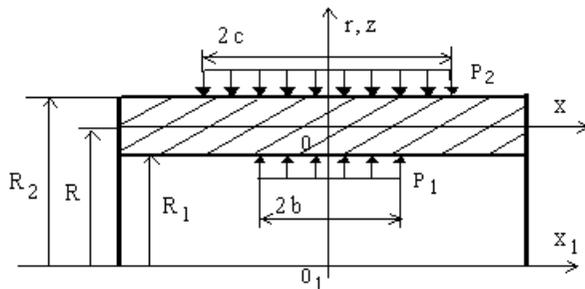
$$\left. \begin{aligned} I_L &= \frac{FE}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz - pF(w|_{z=a} - w|_{z=-a}); \quad I_K = -\frac{F}{2E} \int_{-a}^a \sigma_z^2 dz; \\ I_R &= F \int_{-a}^a \left(\frac{dw}{dz} - \frac{1}{2E} \sigma_z \right) \sigma_z dz - pF(w|_{z=a} - w|_{z=-a}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где E и F – модуль упругости и площадь сечения стержня. Тогда, подставив в (2) известное решение задачи $\sigma_z = p$ и $w = pz/E$, получаем:

$$I_L(w) = I_K(\sigma_z) = I_R(w, \sigma_z) = -ap^2F/E. \quad (3)$$

Рассмотрим осесимметричную задачу для нетонкого цилиндра длины $2a$ (см. рисунок), на участке $-b \leq x \leq b$ внутренней поверхности ($r = R_1$) которого действует равномерное давление p_1 , а на участке $-c \leq x \leq c$ ($r = R_2$) – p_2 .

Введем в срединной поверхности цилиндра ортогональную систему координат (x, y, z) и рассмотрим следующие краевые условия:



$$\begin{aligned} \sigma_z|_{|x| \leq b} = p_1; \sigma_z|_{|x| > b} = 0; \tau_{xz} = 0 \text{ при } z = -h/2; \\ \sigma_z|_{|x| \leq c} = p_2; \sigma_z|_{|x| > c} = 0; \tau_{xz} = 0 \text{ при } z = h/2; \quad \sigma_x = 0; \tau_{xz} = 0 \text{ при } |x| = a. \end{aligned} \quad (4)$$

Если воспользоваться известным для бесконечного цилиндра точным решением задачи Ляме и подставить его в функционалы I_L , I_K и I_R , то их аналитические выражения (опустим громоздкие выкладки) примут для цилиндра конечной длины одинаковый, что подтверждает справедливость равенства (1), вид:

$$I = \frac{2a\pi(1+\nu)}{E(R_2^2 - R_1^2)} \left[(1-2\nu)(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)^2 + R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)^2 \right]. \quad (5)$$

Структура решений, точно удовлетворяющих сформулированным условиям (4), может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{k=1}^{l_1} u_x^{ik} S_i(x) P_{k-1}(z); \quad u_z = \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{k=1}^{l_1} u_z^{ik} C_i(x) P_{k-1}(z); \\ \sigma_x &= \lambda^{-1} \omega_1 \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{k=1}^{l_1} \sigma_x^{ik} C_i(x) P_{k-1}(z); \quad \tau_{xz} = \lambda^{-1} \omega_1 \omega_2 \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{k=1}^{l_1} \tau_{xz}^{ik} S_i(x) P_{k-1}(z); \\ \sigma_y &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{k=1}^{l_1} \sigma_y^{ik} C_i(x) P_{k-1}(z); \quad \sigma_z = \lambda^{-1} \left[\sigma_z^* + \omega_2 \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{k=1}^{l_1} \sigma_z^{ik} C_i(x) P_{k-1}(z) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_x^{ik}, u_z^{ik}, \sigma_x^{ik}, \sigma_y^{ik}, \sigma_z^{ik}, \tau_{xz}^{ik}$ – искомые постоянные; $C_i(x)$ и $S_i(x)$ – четные и нечетные функции координаты x ; $P_{k-1}(z)$ – полиномы Лежандра. При этом

$$\begin{aligned} \sigma_z^* &= \frac{\omega_3}{2} \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \left(1 + \frac{\omega_b}{|\omega_b|} \right) p_1 + \frac{\omega_4}{2} \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \left(1 + \frac{\omega_c}{|\omega_c|} \right) p_2; \quad \omega_b = 1 - \frac{x^2}{b^2}; \quad \omega_c = 1 - \frac{x^2}{c^2}; \\ \lambda &= \left(1 + \frac{h}{2R} z \right); \quad \omega_1 = 1 - \frac{z^2}{a^2}; \quad \omega_2 = 1 - \frac{4z^2}{h^2}; \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{h} z \right); \quad \omega_4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{h} z \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Множитель λ^{-1} присутствует в структурах (6) ввиду рассмотрения нетонкой оболочки (при сохранении слагаемых порядка h/R по сравнению с единицей), а числа l_i, l_{ij} аппроксимаций компонент вектора перемещений \mathbf{u} и тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ по толщине оболочки определяют ее сдвиговую модель, выбор которой соответствует заданию комбинации величин

$(l_{1,1}, l_{3,1}, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$ при $i = 1, 2$. Так, вариант $(2, 1, 2, 1, 0)$ соответствует теории оболочек типа Тимошенко-Рейсснера, а вариант $(4, 3, 4, 1, 2)$ – прикладной теории [6], основанной на следующем законе изменения перемещений:

$$U_i = u_i + z\gamma_i + z^2\theta_i + z^3\varphi_i \quad (i=1, 2); \quad U_3 = w + z\gamma_3 + z^2\theta_3. \quad (9)$$

Кинематическая модель (9) позволяет учесть повороты волокон, до деформации нормальных к срединной поверхности оболочки, их искривление и геодезическое кручение в процессе деформации, а также обжатие оболочки в направлении z .

Отметим, что в разложениях по координате z компонент тензора σ (6) первый член σ_{xz} или первые два члена σ_{ii} ($i = 1, 2$) соответствуют их интегральным характеристикам – перерезывающему усилию или нормальному усилию и изгибающему моменту, все остальные члены представляют собой самоуравновешенную по толщине оболочки часть напряжений. Условие стационарности I_R на классе напряжений и перемещений, удовлетворяющих краевым условиям (4), имеет для расчетной области Ω вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[-\delta u_x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\tau_{xz}}{\lambda R} \right) - \delta u_z \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\lambda R} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) + \right. \\ & + \delta \sigma_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\nu \sigma_z}{E} \right) + \delta \sigma_y \left(\frac{u_z}{\lambda R} - \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\nu \sigma_z}{E} \right) + \\ & \left. + \delta \sigma_z \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\nu \sigma_y}{E} \right) + \delta \tau_{xz} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \right) \right] \lambda R dx dz = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона. После подстановки структуры (6) в вариационное уравнение (8) краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно искомым постоянных. Численная реализация задачи выполнена при исходных данных: $E = 210$ ГПа; $\nu = 0,3$; $a = 0,5$ м; $R = 0,6$ м; $p_1 = 1$ МПа; $p_2 = 0$. В таблице 1 ($b = a$; $h = 0,06$ м; $x = 0$) представлены результаты вычислений функционалов I_L и I_R (I_K практически совпадает с I_R), а также перемещений u_z^-, u_z^0, u_z^+ (аналогично напряжений) соответственно при $z = -h/2$, $z = 0$, $z = h/2$ в зависимости от выбранной сдвиговой модели, заданной комбинацией чисел $(l_{1,1}, l_{3,1}, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$.

Из таблицы 1 (полужирным шрифтом выделены точные результаты) следует, что сходимость решений будет лучше, если число аппроксимирующих функций по оси z для перемещения u_z больше аналогичного числа для напряжения σ_z : $l_3 = l_{33} + 1$ (это соотношение выполняется в сдвиговых моделях Тимошенко-Рейсснера и [6]). В знаменателях таблицы 1 представлены результаты для рассматриваемой задачи, если ее решение искать в цилиндрической системе координат (x_1, θ, r) . Структура решений в этом случае будет иметь вид (6), если сделать следующие замены:

Таблица 1.

$l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33}$	2,2,2,2,1	2,2,2,2,2	3,3,3,3,2	3,3,3,3,3	4,4,4,4,3	4,4,4,4,4
$ I_R $, Дж	<u>50.18465</u> 50.18490	<u>50.12280</u> 50.08754	<u>50.18459</u> 50.18459	<u>50.18450</u> 50.18415	<u>50.18459</u> 50.18459	<u>50.18459</u> 50.18458
$ I_L $, Дж	<u>50.08301</u> 50.02463	<u>50.08831</u> 50.03315	<u>50.18440</u> 50.18366	<u>50.18443</u> 50.18379	<u>50.18459</u> 50.18358	<u>50.18459</u> 50.18358
u_z^- , мкм	<u>27.993</u> 27.984	<u>28.000</u> 27.981	<u>28.024</u> 28.023	<u>28.025</u> 28.024	<u>28.025</u> 28.025	<u>28.025</u> 28.025
u_z^0 , мкм	<u>27.519</u> 27.523	<u>27.527</u> 27.522	<u>27.504</u> 27.504	<u>27.504</u> 27.504	<u>27.504</u> 27.504	<u>27.504</u> 27.504
u_z^+ , мкм	<u>27.045</u> 27.038	<u>27.054</u> 27.041	<u>27.075</u> 27.077	<u>27.075</u> 27.076	<u>27.075</u> 27.077	<u>27.075</u> 27.075
σ_y^- , МПа	<u>9.9984</u> 9.9891	<u>10.250</u> 10.298	<u>10.024</u> 10.023	<u>10.035</u> 10.048	<u>10.025</u> 10.025	<u>10.025</u> 10.027
σ_y^0 , МПа	<u>9.5000</u> 9.5041	<u>9.5079</u> 9.5165	<u>9.4875</u> 9.4876	<u>9.4821</u> 9.4755	<u>9.4875</u> 9.4875	<u>9.4875</u> 9.4874
σ_y^+ , МПа	<u>9.0016</u> 8.9943	<u>8.7658</u> 8.6945	<u>9.0259</u> 9.0269	<u>9.0362</u> 9.0498	<u>9.0250</u> 9.0269	<u>9.0246</u> 9.0233
σ_z^0 , МПа	<u>-0.4625</u> -0.4626	<u>-0.4565</u> -0.4110	<u>-0.4625</u> -0.4625	<u>-0.4843</u> -0.5116	<u>-0.4625</u> -0.4625	<u>-0.4625</u> -0.4629

Таблица 2.

h/R	$l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33}$	u_z^- , мкм	u_z^0 , мкм	u_z^+ , мкм	σ_y^- , МПа	σ_y^0 , МПа	σ_y^+ , МПа	σ_z^0 , МПа
<u>1</u> 20	2,1,2,1,0	59.763	59.763	59.763	20.465	20.764	21.064	-0.4875
	3,3,3,3,2	60.262	59.788	59.301	20.664	20.772	20.892	-0.4866
	4,3,4,1,2	60.254	59.779	59.292	20.653	20.772	20.881	-0.4889
<u>1</u> 5	2,1,2,1,0	12.546	12.546	12.546	3.8127	4.2383	4.6639	-0.4500
	2,2,2,2,1	13.048	12.555	12.062	4.0125	4.2494	4.4864	-0.4414
	4,3,4,1,2	13.031	12.570	12.035	3.9838	4.2569	4.4640	-0.4621
	5,5,5,5,4	13.024	12.567	12.036	4.0166	4.2399	4.5044	-0.4497
<u>2</u> 3	2,1,2,1,0	2.2008	2.2008	2.2008	0.6115	0.6620	0.7124	-0.3333
	2,2,2,2,1	2.6785	2.1707	1.6629	0.8248	0.6414	0.5380	-0.2910
	4,3,4,1,2	2.8115	2.1141	1.7748	0.9221	0.6433	0.5830	-0.3084
	5,5,5,5,4	2.8306	2.1101	1.7453	0.9527	0.6301	0.6043	-0.3277
	6,6,6,6,5	2.8317	2.1100	1.7435	0.9543	0.6304	0.6050	-0.3271

$$z = r - R; \quad \lambda = 1; \quad \omega_2 = \omega_3 \omega_4. \quad (10)$$

Как видно, при лучшей (в числителях) сходимости структуры (6) результаты двух постановок практически совпадают, однако подход (10) может вызвать математические сложности при наличии неоднородных граничных условий, сформулированных в усилиях и моментах, в случае многосвязной рас-

четной области. Из анализа представленных в таблице 2 результатов для различных значений толщины цилиндра, когда давление p_1 действует не на всей внутренней поверхности ($b = 0,5a$), следует, что теория [6] применима для оболочек средней толщины при $h/R \leq 1/5$; для более толстых оболочек необходимо использовать более точные сдвиговые модели.

В заключение отметим, что при решении рассмотренных задач в силу программно реализованной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер.

Список литературы: 1. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера // Вестник Харьков. гос. политех. ун-та. - Харьков: ХГПУ. - 2000. - Вып. 95. - С. 70-75. 2. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. О методе двусторонней оценки решений смешанных вариационных задач теории упругости // Информ. технологии: Сб. науч. трудов ХГПУ. - Харьков: ХГПУ. - 1999. - Вып. 7, Ч.1. - С. 322-326. 3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. - К.: Наук. думка, 1982. - 566 с. 4. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир, 1979. - 309 с. 5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1983. - 448 с. 6. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. - СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-т, 1996. - 278 с.

Поступила в редколлегию 27.02.02

УДК 539.3

С.Н.СКЛЕПУС, канд.физ.-мат.наук

ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

В статті розглядається задача повзучості гнучких пластин складної форми. Наведено варіаційну постановку задачі на основі варіаційного принципу в формі Лагранжа. Метод розв'язку нелінійної задачі повзучості базується на сумісному застосуванні методів R-функцій, Рітца та Рунге-Кутта-Мерсона. Наведені результати розрахунку повзучості квадратної пластини та пластини складної геометричної форми.

В процессе ползучести стрела прогиба пластины может достигь величины, сравнимой с ее толщиной ($w \geq 0,2h$). В этом случае необходимо использовать геометрически нелинейную теорию пластин больших прогибов.

Пластинчатые элементы конструкций часто имеют неканоническую форму и сложные условия закрепления. Адекватное описание физически и геометрически нелинейного поведения таких объектов требует разработки достаточно точных и универсальных методов расчета.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2z тон-