Для устранения вышеуказанной особенности в этом случае применяем функции

$$X_1(\xi) = \frac{ch(i\alpha\xi_F)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\xi)\overline{W}_0(\xi_F) + K_{W\Theta}(\xi)\overline{\Theta}_0(\xi_F)\right]; \tag{47}$$

$$X_2(\xi) = \frac{ch\left[i\alpha(1-\xi_F)\right]}{ch(i\alpha)}\left[K_{WM}(\xi)\overline{M}_0(1-\xi_F) + K_{WQ}(\xi)\overline{Q}_0(1-\xi_F)\right]; \tag{48}$$

$$Y_1(\eta) = \frac{ch(i\alpha\eta_F)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\eta)\overline{W}_0(\eta_F) + K_{W\Theta}(\eta)\overline{\Theta}_0(\eta_F)\right]; \tag{49}$$

$$Y_2(\eta) = \frac{ch\left[i\alpha(1-\eta_F)\right]}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\eta)\overline{W}_0(1-\eta_F) + K_{W\Theta}(\eta)\overline{\Theta}_0(1-\eta_F)\right], \tag{50}$$

которые используем при определении интегралов в (25).

$$W(\xi = 1; \xi_F = \eta = \eta_F = 0{,}5) = 0{,}1046\frac{Fl^2}{D};$$

$$M_x(\xi = 0; \xi_F = 0{,}5; \eta = \eta_F = 0{,}5) = -0{,}5429F.$$

Список литературы: 1. *Бребия К.* и др. Методы граничных элементов, Мир, Москва, 1987. 2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки, Наука, Москва, 1966. 3. *Демидович В.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики, Наука, Москва,1966. 4. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике, Наука, Москва, 1964. 5. *Власов В.З.* Избранные труды, Т.3, Наука, Москва, 1964. 6. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике, ОГИЗ, Москва, 1948. 7. *Naumenko K., Altenbach J., Altenbach H., Naumenko V.K.* Closed and approximate analytical solutions for rectangular Mindlin plates, Acta Mechanica, 2001, №147, с.153 — 172.

Поступила в редколлегию 08.04.02

УДК 621.833

А.И.ПАВЛОВ, канд.техн.наук

КОНТАКТИРОВАНИЕ ВЫПУКЛОЙ И ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗУБЧАТОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

Встановлена форма та розміри площадки контакту в зачепленні з точковим контактом опуклої та угнутої поверхонь, які дозволять знайти величину деформацій та контактних напруг, якщо заданий коефіцієнт к, який в свою чергу залежить від властивостей матеріалу, виду зачеплень та прикладеного навантаження. За допомогою розрахунків отримана формула для приблизного вирахування площини плями контакту.

Долговечность зубчатых передач в основном определяется износом и разрушением рабочих поверхностей зубьев. Разрушения зубчатых передач от выламывания зубьев, которые происходят из-за резкого нагружения зубьев, встречаются крайне редко. А с применением зацеплений с выпукло-вогнутым контактом изгибная прочность зубьев еще более возрастает. Поэтому важнее всего знать величину контактных напряжений в точке контакта.

Для определения контактных напряжений чаще всего применяют формулу Герца, хотя исследователями контактных напряжений [1] предложены другие, более соответствующие условиям, в которых находится сопряженная пара зубьев.

Герц впервые выдвинул гипотезу о том, что область контакта имеет в общем случае эллиптическую форму. Он сделал предположение, согласно которому для вычисления локальных деформаций каждое тело может рассматриваться как упругое полупространство, нагруженное по малой эллиптической области на его поверхности. Чтобы это допущение было оправданным, должны быть выполнены два условия: характерные размеры области контакта должны быть малыми по сравнению с размерами каждого из контактирующих тел и с радиусами кривизны их поверхностей.

Второе условие необходимо для того, чтобы, во-первых, поверхности вне области контакта, но вблизи нее можно считать близкими к плоской поверхности полупространства, и, во-вторых, чтобы деформации в области контакта были достаточно малыми для применимости линейной теории упругости. Для металлических тел, нагруженных в пределах чисто упругого поведения это последнее ограничение, безусловно, выполняется. Наконец, поверхности контактирующих тел предполагаются гладкими, вследствие чего по области могут действовать только нормальные давления. Хотя по физическому смыслу контактные давления действуют перпендикулярно поверхности контакта, которая необязательно должна оставаться плоской, линейная теория упругости не учитывает изменения направлений действия поверхностных усилий, вызванных деформацией этой поверхности (за исключением некоторых частных случаев). Таким образом, вследствие моделирования обоих тел полупространствами с плоскими поверхностями нормальные усилия на границе контакта считаются действующими параллельно нормали к плоскости касания, а касательные усилия – в этой плоскости.

В случае контакта выпуклой и вогнутой поверхностей с близкими по величине радиусами кривизны, который называется контактом согласованных поверхностей, часто нарушаются условия, в которых применима теория Герца. При приложении нагрузки размеры области контакта быстро растут и могут достигать величин, сравнимых с характерными размерами контактирующих тел. Типичным примером является вал, вставленный во втулку с малым зазором. В этом варианте ни вал, ни втулка не могут рассматриваться как упругое полупространство, так что подход Герца непригоден.

Упругие деформации сжатия двумерных контактирующих тел нельзя вичислить только через контактные напряжения, определяемые теорией Герца. Необходимо учитывать также форму и размеры самих тел, а также способы их закрепления. В большинстве практических ситуаций такие вычисления трудно осуществить, что привело к множеству приближенных формул для расчета упругих деформаций сжатия тел при контакте в условиях плоской задачи, как, например, в случае зубьев шестерен или подшипников качения.

Рассмотрим контактирование зубчатых шестерен с косыми зубьями и выпукло-вогнутым контактом в зацеплении. Для точечного контакта двух зубьев, свойственного зацеплению Новикова, площадка контакта имеет форму (см рис. 1), которую можно представить как дезъюнкцию двух эллипсов. Эта форма пятна контакта получена визуальным наблюдением на моделях из органического стекла с большим модулем для большей наглядности. Для обкатных передач контакт осуществляется по линии, если нет большой погрешности, и тогда пятно контакта должно иметь форму полосы. На величину площади пятна контакта оказывает влияние погрешность изготовления и монтажа.

Исходя из формы пятна можно решать задачу о контактных напряжениях. Так как для точечного контакта форма пятна можно представить как разность двух эллипсов, то и полная сжимающая сила будет представлена разностью двух интегралов

$$P = \left(\int x dy - \int x_1 dy\right) q_m, \tag{1}$$

где $x(y)$, $x_1(y)$ – функции, описывающие эллипсы, ограничивающие площадку контакта зубьев в зацеплении;

q_m – среднее давление на этой площадке.

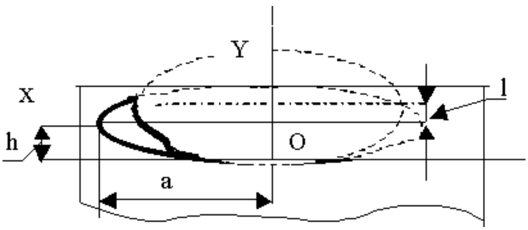

Рис. 1. Форма пятна контакта в передаче Новикова

При определении параметров эллипсов сделаны следующие допущения. Большая полуось внешнего эллипса равна половине расстояния между точками контакта на одном зубе, если это передача Новикова ДЛЗ, плюс малая полуось того же эллипса, умноженная на отношение радиусов кривизны зуба в соответствующих плоскостях. Малая ось равна расстоянию от точки контакта до полюсной линии. Для внутреннего эллипса большая полуось равна большой полуоси внешнего, умноженной на коэффициент *к,* который будет определен позже. Большая полуось будет равна расстоянию от точки контакта до полюса, разделенному на тот же коэффициент *к*. Это утверждение получено из условия, что площади обоих эллипсов должны быть равны. Одна общая точка эллипсов лежит на полюсной линии. Центр внешнего эллипса принят за начало координат, тогда центр внутреннего смещен по оси ординат на величину

$$l = (1 - k)\, h/k, \tag{2}$$

где

h – расстояние от точки контакта до полюсной линии, равное малой полуоси внешнего эллипса.

Уравнения, описывающие эллипсы, имеют вид:

для внешнего –

$$x^2/a^2 + y^2/h^2 = 1; \quad (3)$$

для внутреннего –

$$x^2/(ka)^2 + (y - lh)^2 k^2/h^2 = 1. \quad (4)$$

Из совместного решения уравнений (3) и (4) найдено положение второй общей точки обоих эллипсов, что позволяет установить пределы интегрирования в формуле (1). Величина расстояния между точками контакта на одном зубе определялась по формулам, приведенных в работе [2]. Расчеты произведены для разных значений коэффициента *к*, разных углов наклона зубьев и разных отношений радиусов кривизны контактирующих поверхностей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, из которых установлено следующее: площадь пятна контакта практически не зависит от соотношения радиусов кривизны и угла наклона зубьев и в основном определяется коэффициентом *к*. Приближенная формула для вычисления площади пятна контакта выглядит так

$$S = \pi ab(1 - k)/4k^2, \quad (5)$$

где a, b – полуоси внешнего эллипса.

Полученная формула (5) пригодна и для дополюсного зацепления, если для определения расстояния между точками контакта вторую точку вообразить.

Для обкатных передач площадь теоретической полоски равна площади прямоугольника, у которого стороны равны ширине зубчатого колеса и малой оси эллипса *2a*.

Таким образом, установлена форма и размеры площадки контакта в зацеплении с точечным контактом выпуклой и вогнутой поверхностей, которые позволят получить величину деформаций и контактных напряжений, задаваясь величиной коэффициента *к*, который в свою очередь зависит от вида зацепления и прилагаемой нагрузки. Форма площадки была установлена экспериментально, а ее размеры из условия соотношения осей двух равных по величине площади эллипсов. Расчетом получена формула для приближенного вычисления площади пятна контакта.

Список литературы: 1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир. – 1989. – 509с. 2. *Кириченко А.Ф., Павлов А.И., Бондаренко В.С.* Об одной особенности контактирования цилиндрических зубчатых передач Новикова. // Вестник Харьковского политехнического института. Машиностроение, вып. 5. – 1974. – С.29-32.

Поступила в редколлегию 30.04.02