тирные кривые и экспериментальные данные – сплошные кривые, для различных уровней напряжений (МПа): 76,9 – кривая 1, 83 – 2, 90 – 3, 100 – 4, 110 – 5, 140 – 6.

Как видно из сопоставленных на этом рисунке расчетных и экспериментальных данных, результаты расчетов по предложенной в данной работе методике вполне удовлетворительно согласуются с известными в литературе расчетными и экспериментальными данными.

**Список литературы:** 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М: Наука. 1974. – 311 с. 3 *Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К.* Ползучесть тонких оболочек. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1977. – 123 с. 4. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с. 5. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), P. 215-226. 6. *Кац Ш.Н.* Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. – 1955. – № 11. – С.37-40.

*Поступила в редколлегию 09.07.02*

УДК 539.3

***В.К.НАУМЕНКО***, канд.техн.наук; ***К.В.НАУМЕНКО; В.П.ШУЛЬГИН***

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И МЕТОДА ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ

У статті показана побудова функцій впливу (функцій Гріна) при вигині прямокутних тонких пластин від зосереджених статичних і кінематичних впливів. В основу побудови математичної моделі цієї задачі покладені ММПП (матричний метод початкових параметрів), МВІ (метод варіаційних ітерацій), метод Ритца. Наведені численні розв'язання двох часткових задач, отримані за допомогою ЕОМ, які узгоджуються з відомими.

Известно [1], что функции влияния построены для немногих тонких пластин (круглая защемленная со всех сторон, бесконечная, полубесконечная пластины и т.п.) и только от действия сосредоточенных сил F = 1 или моментов M = 1.

В данной работе показано построение функций влияния для прямоугольных пластин на основе ММНП (матричный метод начальных параметров), который дает возможность получить их как от статических (F = 1, M = 1), так и кинематических (W = 1, $\Theta$ = 1) воздействий.

Их знание необходимо для определения НДС (напряженно-деформированное состояние) сложных многосвязных пластин с применением МСЭ (метод суперэлементов) в форме метода сил или перемещений, а также МГЭ (метод граничных элементов) для пластин с отверстиями или разрезами.

В этом случае матричные зависимости в методе сил будут выглядеть:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\delta}_{QQ}\vec{x}_Q + \bar{\delta}_{QM}\vec{x}_M + \vec{\Delta}_{QF} = 0 \\ \bar{\delta}_{MQ}\vec{x}_Q + \bar{\delta}_{MM}\vec{x}_M + \vec{\Delta}_{MF} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $\bar{\delta}$ — матрицы перемещений в узлах от единичных усилий; $\vec{\Delta}_F$ — векторы перемещений в узлах от внешних сил; $\vec{x}$ — векторы неизвестных усилий в узлах.

Матричные зависимости в методе перемещений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{WW}\vec{z}_W + \bar{r}_{W\Theta}\vec{z}_\Theta + \vec{R}_{WF} = 0 \\ \bar{r}_{\Theta W}\vec{z}_W + \bar{r}_{\Theta\Theta}\vec{z}_\Theta + \vec{R}_{\Theta F} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где $\bar{r}$ — матрицы усилий в узлах от единичных перемещений; $\vec{R}_F$ — векторы усилий в узлах от внешних сил; $\vec{z}$ — векторы неизвестных перемещений в узлах.

На практике матрицу $\bar{r}$ проще определять на основании того, что $\bar{r} = \bar{\delta}^{-1}$, так как усилия в точке приложения единичных перемещений обладают особенностью.

Проблема изгиба пластинок составляет одну из сложных задач математической теории упругости. Решение этой проблемы в замкнутой аналитической форме удается получить только для сравнительно небольшого числа краевых задач.

В большинстве же случаев решение бигармонического уравнения в виде

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) = q(x,y)$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость; $E$ – модуль упругости первого рода (модуль Юнга); $\nu$ – коэффициент Пуассона; $h$ – толщина пластины; $W$ – перемещение (прогиб) пластины; $q$ – внешняя нагрузка, в замкнутой форме, то есть в форме, когда прогиб пластинки $W(x,y)$ выражается конечной формулой от переменных $x$ и $y$, не может быть получено. По этой причине при изучении более или менее сложной краевой задачи применяют метод бесконечных рядов, члены которого определяются при помощи известных табулированных функций. К этому методу относится, например применение одинарных тригонометрических рядов (задача Мориса Леви) [2]. Поэтому для получения приближенного решения используются вариационные методы. При решении вариационной задачи по определению НДС пластины возникают следующие вопросы:

1. Вопрос о способе приближения функции.

2. Вопрос о выборе формы аппроксимирующей функции.

Из опыта применения вариационных методов известно, что наиболее удобной формой выражения аппроксимирующей функции является ее представление в виде одинарного или двойного ряда

$$\left.W=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i y_i;\quad W=\sum_{i,k=1}^{n,m}a_{i,k}x_i y_k.\right\} \tag{3}$$

В отношении приближения нужно отметить, что при правильном выборе аппроксимирующих функций (удовлетворяющих дифференциальному уравнению, краевым условиям, условиям нагружения, разрывности параметров и т.д.) предпочтение нужно отдать методу Ритца, приводящему в задачах статики к системе

$$A\vec{a}=\vec{f}\ , \tag{4}$$

где $A$ — матрица нормальной формы [3], $\vec{f}$ — матрица-вектор внешних воздействий.

Как известно из [4], в этом случае "приближенное по Ритцу решение уравнения (4) сходится к точному обобщенному решению этого уравнения, как по энергии, так и по метрике исходного пространства". Последнее утверждение справедливо при любом выборе функций $X_i, Y_k$, однако от выбора формы аппроксимирующих функций зависит точность получаемых результатов и скорость их сходимости [5], [6].

При использовании метода Ритца необходимо знание полной энергии упругого тела, которая в случае пространственной задачи выглядит

$$Э=U-n\ , \tag{5}$$

или в развернутом виде

$$Э=\frac{1}{2}\iiint_V\left[\left(A_1^T\vec{u}\right)^T D\left(A_1^T\vec{u}\right)\right]dv-\iint_S\vec{p}^{\,T}\vec{u}ds-\iiint_V\vec{g}^{\,T}\vec{u}dv\ , \tag{6}$$

где $U$ — потенциал внутренних сил; $n$ — потенциал внешних сил; $D$ — матрица упругих постоянных; $A_1$ — матрица оператора дифференцирования; $\vec{u}$ — вектор перемещений; $\vec{p}$ — вектор поверхностных сил; $\vec{g}$ — вектор объемных сил.

Величина энергии $Э$ вполне определяется заданием функции перемещений $u,v,w$. Для тонких пластин выражение $Э$ получается при $u = v = 0$. Если приближенное значение функции прогибов выбрать в виде ряда (3), то после подстановки его в (6) энергия $U$ пластины окажется квадратичной функцией параметров $a_i$. Причем, так как $U$ — величина сугубо положительная, то это будет положительно определенная квадратичная форма, матрица которой будет матрицей нормальной формы, а как известно, это достаточное и необходимое условие сходимости итерационного процесса [3]. Величина полной энергии при изгибе пластин как частный случай получается из (6) и описывается известным выражением, что показано в [6].

Метод Ритца позволяет заменить задачу о нахождении решения дифференциального уравнения задачей о нахождении минимума потенциальной энергии:

$$\frac{\partial Э}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial Э}{\partial a_{i,k}} = 0. \cdot \tag{7}$$

Вариационные методы чаще применимы в тех случаях, когда точное решение неизвестно. Точность полученного решения при этом во многих случаях теоретически оценить не удается. Применение ЭВМ дает возможность оценить сходимость ряда (3) путем увеличения числа параметров $a_i(a_{i,k})$ и сравнения окончательных результатов, что и показано в данной работе.

Для увеличения точности и скорости сходимости задачи по определению НДС пластины рекомендуется применение метода вариационных итераций для функций $X_i, Y_k$, основанного на методе Власова-Канторовича (МВК) [7].

Существенным ограничением МВК является неравноправность координатных направлений, следствием чего является неодинаковая точность результатов вдоль различных координат. Модификацией МВК, сохраняющей все его преимущества и свободной от отмеченного ограничения является МВИ. Сущность его состоит в следующем. Искомые функции, согласно МВК, представляются в виде рядов функций с разделенными переменными. Система функций одного направления предполагается аппроксимирующей, а система функций другого направления определяется из решения вариационных уравнений. На второй итерации система найденных функций направления, принятого первоначально за исходное, определяется из вариационных уравнений, составленных для другого направления. Процесс вариационных итераций на ЭВМ продолжается до его сходимости к некоторому стационарному значению, определенному числом учитываемых членов ряда. Как следует из самой идеи МВИ, МВК является его частным случаем. Точность результатов по МВИ не зависит от выбора системы аппроксимирующих функций. Этот выбор может повлиять лишь на число итераций, необходимых для получения результатов с заданной точностью. Таким образом, МВИ, по своей сути, является машинным методом построения аппроксимирующих функций. Однако первоначальный выбор этих функций влияет на скорость сходимости МВИ. Чем лучше соответствуют аппроксимирующие функции физическому содержанию задачи (граничным условиям, характеру внешней нагрузки и т.п.), тем быстрее сходимость.

Поверхность прогибов в этом методе представляется в виде разложения

$$W(x,y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) Y_i(y), \tag{8}$$

где $X_i(x)$ — система безразмерных функций, которая считается заданной; $Y_i(y)$ — функции, имеющие размерность прогиба и являющиеся искомыми. Использование современных ЭВМ дает возможность строить с помощью МВИ функции, наиболее полно удовлетворяющие физической сути задачи, условиям нагружения, краевым условиям.

Правомочность этого метода видна с физической точки зрения, т.к. следуя по Власову, элементарную полоску можно взять по направлению оси X:

заданная функция $X_i(x)$, искомая — $Y_i(y)$, или по направлению оси Y: заданная — $Y_i(y)$, искомая — $X_i(x)$. Отсюда ясно, что применяя метод Власова-Канторовича по двум направлениям, мы будем приближать заданную и искомую функции к их действительному значению.

В данной работе МВИ использован для построения функций влияния.

ММНП, который дает возможность построить функции влияния не только от статических воздействий, но и кинематических, о чем было отмечено выше, основан на приведении краевой задачи к задаче с начальными условиями (задача Коши - Крылова). Для получения ММНП по Власову введем, вместо производных (по Коши) и пропорциональных им величин (по Крылову), линейные дифференциальные операторы, определяющие величины $\Theta$, $M$ и $Q$ через функции $K_1$ ... $K_4$ и их производные, которые являются линейными независимыми функциями от частных интегралов $\Phi_1$ ... $\Phi_4$ и потребуем, чтобы при $\xi = 0$ (для $X(\xi)$) и при $\eta = 0$ (для $Y(\eta)$) они образовали единичную матрицу. Этот метод в отличии от решения краевой задачи, где общее количество подлежащих определению произвольных постоянных равно учетверенному числу участков, приводит к определению только двух из четырех произвольных постоянных независимо от закона изменения внешней нагрузки и числа участков.

Из общего решения однородного уравнения и свойств единичной матрицы ясно, что произвольные постоянные $C_1$ … $C_4$ совпадают с начальными параметрами (обобщенными перемещениями и усилиями системы в начальном сечении, которые обозначены через $W_0$, $\Theta_0$, $M_0$, $Q_0$), то есть $C_1 = W_0$, $C_2 = \Theta_0$, $C_3 = M_0$, $C_4 = Q_0$ [5].

На основании вышесказанного построение ММНП будет выглядеть

$$\vec{Z} = K\vec{Z}_0 - \vec{F}, \tag{9}$$

где $\vec{Z}$ — вектор искомых параметров; $K$ — матрица влияния; $\vec{Z}_0$ — вектор начальных параметров; $\vec{F}$ — вектор внешних воздействий.

В случае однородного уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\vec{Z} = B\vec{C};\vec{Z}_0 = B(0)\vec{C}; \\ &\vec{C} = [B(0)]^{-1}\vec{Z}_0; \quad \vec{Z} = B[B(0)]^{-1}\vec{Z}_0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $B$ — матрица функций, определяющих НДС пластины; $B(0)$ — матрица функций НДС пластины в начале координат; $\vec{C}$ — вектор произвольных постоянных;

$$K = B[B(0)]^{-1}. \tag{11}$$

Элементы матрицы $K$ впервые получены Власовым [5]. Приведенная форма построения координатных функций удобно алгоритмизируется и позволяет применять ЭВМ для решения широкого круга задач пластинчато-стержневых систем.

Покажем, не исключая общности задачи, использование (9) на примере двух пластин, нагруженных сосредоточенными силами F = 1.

### 1 Защемленная по всему контуру пластина

Пластина, защемленная по всему контуру, нагруженная силой F = 1 в точке с координатами

$$\xi_F = \frac{x_F}{l_x}; \quad \eta_F = \frac{y_F}{l_y};$$

где $l_x$, $l_y$ — размеры пластины по осям x, y.

Используя (9), получим функции:

$$\left.\begin{aligned} X(\xi,\xi_F) &= K_{WM}(\xi)M_0(\xi_F) + K_{WQ}(\xi)Q_0(\xi_F) - 1(\xi-\xi_F)K_{WQ}(\xi-\xi_F) \\ Y(\eta,\eta_F) &= K_{WM}(\eta)M_0(\eta_F) + K_{WQ}(\eta)Q_0(\eta_F) - 1(\eta-\eta_F)K_{WQ}(\eta-\eta_F) \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

В случае действия на пластину M = 1, W = 1, $\Theta = 1$ (W, $\Theta$ — прогиб и угол поворота) вместо $K_{WQ}(\xi-\xi_F), K_{WQ}(\eta-\eta_F)$ в (12) нужно подставить $K_{WM}, K_{WW}, K_{W\Theta}$.

$$\left.\begin{aligned} M_0(\xi_F) &= \frac{K_{WQ}(1-\xi_F)K_{\Theta Q}(1) - K_{\Theta Q}(1-\xi_F)K_{WQ}(1)}{K_{WM}(1)K_{\Theta Q}(1) - K_{\Theta M}(1)K_{WQ}(1)} \\ Q_0(\xi_F) &= \frac{K_{WM}(1)K_{\Theta Q}(1-\xi_F) - K_{\Theta M}(1)K_{WQ}(1-\xi_F)}{K_{WM}(1)K_{\Theta Q}(1) - K_{\Theta M}(1)K_{WQ}(1)} \end{aligned}\right\}; \tag{13}$$

$M_0(\eta_F), Q_0(\eta_F)$ записываются аналогично.

При s > r в [5] показано, что при решении однородного дифференциального уравнения четвертого порядка имеем

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{s_x^2 + r_x^2}{2}}; \quad \beta_x = \sqrt{\frac{s_x^2 - r_x^2}{2}}; \tag{14}$$

$$r_x^2 = \frac{B_x}{A_x}\gamma^2; \quad s_x^4 = \frac{C_x}{A_x}\gamma^4; \tag{15}$$

$$A_x = \int_0^1 X^2(\xi)d\xi; \quad B_x = \int_0^1 \left[X'(\xi)\right]^2 d\xi; \quad C_x = \int_0^1 \left[X''(\xi)\right]^2 d\xi; \tag{16}$$

$$\alpha_y = \sqrt{\frac{s_y^2 + r_y^2}{2}}; \quad \beta_y = \sqrt{\frac{s_y^2 - r_y^2}{2}}; \tag{17}$$

$$r_y^2 = \frac{B_y}{A_y\gamma^2}; \quad s_y^4 = \frac{C_y}{A_y\gamma^4}; \tag{18}$$

$$A_y = \int_0^1 Y^2(\eta)d\eta; \quad B_y = \int_0^1 \left[Y'(\eta)\right]^2 d\eta; \quad C_y = \int_0^1 \left[Y''(\eta)\right]^2 d\eta. \tag{19}$$

Функции $K_{ij}$ принимаем с точностью до постоянного множителя при s > r

$$K_{WM} = -\frac{1}{2\alpha\beta}\Phi_4 = K_{\Theta Q}; \tag{20}$$

$$K_{WQ} = -\frac{1}{2\alpha\beta s^2}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3); \tag{21}$$

$$K_{\Theta M} = -\frac{1}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3); \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Phi_1 = ch(i\alpha z)\,sin(i\beta z);\quad \Phi_2 = ch(i\alpha z)\,cos(i\beta z);\\ \Phi_3 = sh(i\alpha z)\,cos(i\beta z);\quad \Phi_4 = sh(i\alpha z)\,sin(i\beta z);\\ z = (\xi,\eta). \end{array}\right\} \tag{23}$$

Для определения параметров $\alpha,\beta$ в (23) использован МВИ, при этом для достижения точности $10^{-5}$ хватило 5 итераций.

Принимая

$$W = \frac{Fl_y^2}{D}\gamma\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(\xi,\xi_F)Y_i(\eta,\eta_F);\quad \gamma = \frac{l_y}{l_x}, \tag{24}$$

находим $a_i$ из (4).

Элементы матрицы $A$ определяются из (7) в виде:

$$\delta_{i,k} = \left\{\gamma^4\int_0^1 X_i'' X_k'' d\xi\int_0^1 Y_iY_k d\eta + \int_0^1 X_iX_k d\xi\int_0^1 Y_i'' Y_k'' d\eta + \right.$$
$$+\nu\gamma^2\left[\int_0^1 X_i'' X_k d\xi\int_0^1 Y_iY_k'' d\eta + \int_0^1 X_iX_k'' d\xi\int_0^1 Y_i'' Y_k d\eta\right] +$$
$$\left. + 2(1-\nu)\gamma^2\int_0^1 X_i' X_k' d\xi\int_0^1 Y_i' Y_k' d\eta\right\}. \tag{25}$$

Элементы вектора $\vec{f}$ определяются из (7) в виде:

$$f_k = X_k(\xi_F)Y_k(\eta_F); \tag{26}$$

$$\vec{a} = A^{-1}\vec{f}. \tag{27}$$

Использование функций (12) в интегралах (25) приводит к тому, что вторая составляющая интеграла вызывает искажение элементов матрицы (25) вследствие того, что при

$$i > 7;\quad ch(i\alpha z) \approx sh(i\alpha z) \approx \frac{1}{2}e^{i\alpha z} \to \infty.$$

Поэтому интегралы в (25) представляем в виде суммы интегралов, пределы первого – (0; $z_F$), используются функции $X_1(\xi,\xi_F)$ и $Y_1(\eta,\eta_F)$ и их производные; пределы второго – (0; 1-$z_F$), используются функции $X_2(\xi,\xi_F)$ и $Y_2(\eta,\eta_F)$ и их производные:

$$X_1(\xi,\xi_F)=\frac{ch(i\alpha\xi_F)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WM}(\xi)\overline{M}_0(\xi_F)+K_{WQ}(\xi)\overline{Q}_0(\xi_F)\right]; \quad (28)$$

$$X_2(\xi,\xi_F)=\frac{ch[i\alpha(1-\xi_F)]}{ch(i\alpha)}\left[K_{WM}(\xi)\overline{M}_0(1-\xi_F)+K_{WQ}(\xi)\overline{Q}_0(1-\xi_F)\right], \quad (29)$$

где $\overline{M}_0$ и $\overline{Q}_0$ — начальные параметры, полученные после выделения в $M_0$ и $Q_0$ сомножителей, стоящих перед скобками; $Y_1(\eta,\eta_F)$ и $Y_2(\eta,\eta_F)$ записываются аналогично.

Этот прием устраняет вышеуказанную особенность и приводит матрицу (4), (25) к нормальной форме (положительность всех элементов, преобладание элементов главной диагонали). При $z_F = 0{,}5$

$$X_1(\xi,\xi_F)=X_2(\xi,\xi_F)=\frac{ch\left(i\,\alpha/2\right)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WM}(\xi)\overline{M}_0(0{,}5)+K_{WQ}(\xi)\overline{Q}_0(0{,}5)\right]\cdot \quad (30)$$

Для определения моментов и поперечных сил в точке F = 1 (где, как известно, возникает особенность) приводим ее к распределенной $q = 1/a^2$ (для полосы $q = 1/a$). Работа этой нагрузки на полоске выглядит как

$$f=\frac{1}{a}\left[\int_{\xi_F-\frac{a}{2}}^{\xi_F} X_1(\xi,\xi_F)d\xi+\int_{(1-\xi_F)-\frac{a}{2}}^{1-\xi_F} X_2(\xi,\xi_F)d\xi\right]. \quad (31)$$

В этом случае для квадратной пластины при $a = 0{,}1$; n = 1

$$M_x(\xi_F=0{,}5;\ \eta_F=0{,}5)=0{,}229F\ ,$$

а при n =10

$$M_x(\xi_F=0{,}5;\ \eta_F=0{,}5)=0{,}239F.$$

Расчеты, проведенные для этого случая с помощью IBM PC, при удержании 1 — 10 членов ряда практически совпадают с результатами, полученными в [2], причем удовлетворительная точность получается уже при одном члене ряда (n = 1):

$$l_x = l_y = l;$$

$$W(\xi=\xi_F=0{,}5;\ \eta=\eta_F=0{,}5)=5{,}46\cdot 10^{-3}\frac{Fl^2}{D};$$

$$M_x(\xi=0;\ \eta=0{,}5;\ \xi_F=\eta_F=0{,}5)=-0{,}1251F,$$

при n = 10:

$$W(\xi=\xi_F=0{,}5;\ \eta=\eta_F=0{,}5)=5{,}60\cdot 10^{-3}\frac{Fl^2}{D};$$

$$M_x(\xi=0;\ \eta=0{,}5;\ \xi_F=\eta_F=0{,}5)=-0{,}1252F..$$

## 2 Пластина с одним защемленным и тремя свободными краями под действием сосредоточенной силы

Так как аналитическое решение для такой задачи отсутствует, полученные нами результаты сравнивались с решением, полученным методом граничных элементов [1]

$$X(\xi,\xi_F)=K_{WM}(\xi)M_0(\xi_F)+K_{WQ}(\xi)Q_0(\xi_F)-K_{WQ}(\xi-\xi_F); \tag{32}$$

$$Y(\eta,\eta_F)=K_{WW}(\eta)W_0(\eta_F)+K_{W\Theta}(\eta)\Theta_0(\eta_F)-K_{WQ}(\eta-\eta_F); \tag{33}$$

$$M_0(\xi_F)=\frac{K_{MQ}(1-\xi_F)K_{QQ}(1)-K_{QQ}(1-\xi_F)K_{MQ}(1)}{K_{MM}(1)K_{QQ}(1)-K_{QM}(1)K_{MQ}(1)}; \tag{34}$$

$$Q_0(\xi_F)=\frac{K_{MM}(1)K_{QQ}(1-\xi_F)-K_{QM}(1)K_{MQ}(1-\xi_F)}{K_{MM}(1)K_{QQ}(1)-K_{QM}(1)K_{MQ}(1)}; \tag{35}$$

$$W_0(\eta_F)=\frac{K_{MQ}(1-\eta_F)K_{Q\Theta}(1)-K_{QQ}(1-\eta_F)K_{M\Theta}(1)}{K_{MW}(1)K_{Q\Theta}(1)-K_{QW}(1)K_{M\Theta}(1)}; \tag{36}$$

$$\Theta_0(\eta_F)=\frac{K_{MW}(1)K_{QQ}(1-\eta_F)-K_{QW}(1)K_{MQ}(1-\eta_F)}{K_{MW}(1)K_{Q\Theta}(1)-K_{QW}(1)K_{M\Theta}(1)}; \tag{37}$$

$$K_{MM}(\xi)=\Phi_2(\xi)+(1-\nu)\frac{r_y^2}{2\alpha_y\beta_y}\Phi_4(\xi); \tag{38}$$

$$K_{QM}(\xi)=-\frac{1}{2\alpha_y\beta_y}\left[(s_y^2-\nu r_y^2)\alpha_y\Phi_1(\xi)-(s_y^2+\nu r_y^2)\beta_y\Phi_3(\xi)\right]; \tag{39}$$

$$K_{WM}(\xi)=-\frac{1}{2\alpha_y\beta_y}\Phi_4(\xi); \tag{40}$$

$$K_{WW}(\eta)=\Phi_2(\eta)-(1-\nu)\frac{r_x^2}{2\alpha_x\beta_x}\Phi_4(\eta)=K_{QQ}(\eta); \tag{41}$$

$$K_{W\Theta}(\eta)=\frac{1}{2\alpha_x\beta_x s_x^2}\left[(s_x^2-\nu r_x^2)\alpha_x\Phi_1(\eta)+(s_x^2+\nu r_x^2)\beta_x\Phi_3(\eta)\right]=K_{MQ}(\eta); \tag{42}$$

$$K_{MW}(\eta)=\frac{1}{2\alpha_x\beta_x}\left[s_x^4-\nu(2-\nu)r_x^4\right]\Phi_4(\eta)=K_{Q\Theta}(\eta); \tag{43}$$

$$K_{M\Theta}(\eta)=\frac{1}{2\alpha_x\beta_x s_x^2}\left\{\left[s_x^4-2(1-\nu)s_x^2r_x^2-\nu^2r_x^4\right]\alpha_x\Phi_1(\eta)-\right.$$

$$\left.-\left[s_x^4+2(1-\nu)s_x^2r_x^2-\nu^2r_x^4\right]\beta_x\Phi_3(\eta)\right\}; \tag{44}$$

$$K_{QW}(\eta)=\frac{1}{2\alpha_x\beta_x}\left\{\left[s_x^4-2(1-\nu)s_x^2r_x^2-\nu^2r_x^4\right]\alpha_x\Phi_1(\eta)+\right.$$

$$\left.+\left[s_x^4+2(1-\nu)s_x^2r_x^2-\nu^2r_x^4\right]\beta_x\Phi_3(\varsigma\varsigma\right\}; \tag{45}$$

$$K_{WQ}(\eta)=\frac{-1}{2\alpha_x\beta_x s_x^2}\left[\alpha_x\Phi_1(\eta)-\beta_x\Phi_3(\eta)\right]. \tag{46}$$

Для устранения вышеуказанной особенности в этом случае применяем функции

$$X_1(\xi) = \frac{ch(i\alpha\xi_F)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\xi)\overline{W}_0(\xi_F) + K_{W\Theta}(\xi)\overline{\Theta}_0(\xi_F)\right]; \tag{47}$$

$$X_2(\xi) = \frac{ch\left[i\alpha(1-\xi_F)\right]}{ch(i\alpha)}\left[K_{WM}(\xi)\overline{M}_0(1-\xi_F) + K_{WQ}(\xi)\overline{Q}_0(1-\xi_F)\right]; \tag{48}$$

$$Y_1(\eta) = \frac{ch(i\alpha\eta_F)}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\eta)\overline{W}_0(\eta_F) + K_{W\Theta}(\eta)\overline{\Theta}_0(\eta_F)\right]; \tag{49}$$

$$Y_2(\eta) = \frac{ch\left[i\alpha(1-\eta_F)\right]}{ch(i\alpha)}\left[K_{WW}(\eta)\overline{W}_0(1-\eta_F) + K_{W\Theta}(\eta)\overline{\Theta}_0(1-\eta_F)\right], \tag{50}$$

которые используем при определении интегралов в (25).

$$W(\xi = 1; \xi_F = \eta = \eta_F = 0{,}5) = 0{,}1046\frac{Fl^2}{D};$$
$$M_x(\xi = 0; \xi_F = 0{,}5; \eta = \eta_F = 0{,}5) = -0{,}5429F.$$

**Список литературы:** 1. *Бребия К.* и др. Методы граничных элементов, Мир, Москва, 1987. 2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки, Наука, Москва, 1966. 3. *Демидович В.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики, Наука, Москва,1966. 4. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике, Наука, Москва, 1964. 5. *Власов В.З.* Избранные труды, Т.3, Наука, Москва, 1964. 6. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике, ОГИЗ, Москва, 1948. 7. *Naumenko K., Altenbach J., Altenbach H., Naumenko V.K.* Closed and approximate analytical solutions for rectangular Mindlin plates, Acta Mechanica, 2001, №147, c.153 — 172.

*Поступила в редколлегию 08.04.02*

УДК 621.833

***А.И.ПАВЛОВ***, канд.техн.наук

## КОНТАКТИРОВАНИЕ ВЫПУКЛОЙ И ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗУБЧАТОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

Встановлена форма та розміри площадки контакту в зачепленні з точковим контактом опуклої та угнутої поверхонь, які дозволять знайти величину деформацій та контактних напруг, якщо заданий коефіцієнт к, який в свою чергу залежить від властивостей матеріалу, виду зачеплень та прикладеного навантаження. За допомогою розрахунків отримана формула для приблизного вирахування площини плями контакту.

Долговечность зубчатых передач в основном определяется износом и разрушением рабочих поверхностей зубьев. Разрушения зубчатых передач от выламывания зубьев, которые происходят из-за резкого нагружения зубьев, встречаются крайне редко. А с применением зацеплений с выпукло-вогнутым