

**К.В.АВРАМОВ**, канд.техн.наук.

## **ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ**

Нелінійна динаміка гнучких стержнів в статті описується нелінійним диференціальним рівнянням з частковими похідними. У моделі стержня ураховується розтягання нейтральної лінії за умовою коливань. Використовуючи метод Бубнова-Галеркіна, одержана система звичайних диференціальних рівнянь, котра розв'язується чисельно.

Нелинейная динамика континуальных систем остается одним из сложнейших направлений механики [1-4]. Анализу нелинейных колебаний гибких стержней посвящено большое число публикаций, в которых рассмотрены разные постановки задач и предложены различные методы их решения. Влияние растяжения нейтральной оси стержней на свободные плоские колебания рассматривается в статье [5]. В работе [6] для решения дифференциального уравнения в частных производных нелинейных свободных колебаний используется метод возмущений. Вынужденные колебания с одномодовой аппроксимацией по первой форме, отвечающей потери устойчивости стержня, рассмотрены в [7]. В работе [8] плоские изгибные колебания стержня представлены в виде двухмодовой аппроксимации. Отметим, что постановка задачи, рассмотренной в этой статье, обсуждалась в статье автора [9].

Рассмотрим колебания шарнирно-опертого гибкого стержня, учитывая растяжение его нейтральной оси при изгибе. Уравнение колебаний представим в виде [4,9]:

$$\rho A W_{tt} + \beta W_t + EJ W_{xxxx} = \frac{EA}{2l} \int_0^l W_x^2 dx + F(x, t), \quad (1)$$

где  $F(x, t) = F_0 \delta(x - l/3) \cos(\Omega t)$  – периодически изменяющаяся поперечная сила;  $\rho$  – плотность материала;  $E$  – модуль упругости;  $A, J$  – площадь и момент инерции поперечного сечения;  $\delta()$  – дельта-функция. Введем безразмерные параметры и переменные:

$$W = \frac{W}{r}; x^* = \frac{x}{l}; t^* = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A l^4}} t; \frac{\beta l^2}{Ar \sqrt{E\rho}} = 2\mu;$$

$$f_0 = \frac{l^3 F_0}{EJr}; \delta(x^* - \frac{1}{3}) = l \delta(x - \frac{l}{3}), \quad (2)$$

где  $r$  – радиус инерции поперечного сечения. Опуская звездочки в обозначениях.(2), перепишем (1) в новых переменных:

$$W_{tt} + W_{xxxx} = \frac{1}{2} W_{xx} \int_0^1 W_x^2 dx - 2\mu W_t + f(x, t), \quad (3)$$

где  $f(x, t) = f_0 \delta(x - 1/3) \text{Cos}(\Omega t)$ . Колебания представим в следующем виде:  $W = \sqrt{2} \sum_n \eta_n(t) \text{Sin}(n\pi x)$ . Применяя метод Бубнова – Галеркина к (3), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\eta_k + \omega_k^2 \eta_k = -\frac{\pi^4}{2} k^2 \eta_k \sum_i i^2 \eta_i^2 - 2\mu \eta_k + 2h_k \text{Cos}\Omega t; \quad (4)$$

$$\omega_k = k^2 \pi^2; h_k = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \text{Sin}\left(\frac{k\pi}{3}\right); k = 1, 2, \dots$$

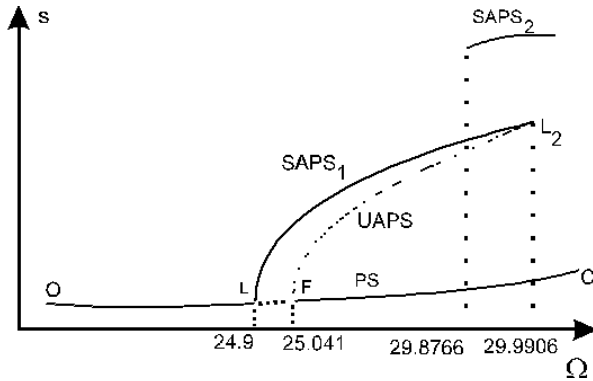


Рис.1. Бифуркационная диаграмма.

Составим динамическую систему с двумя степенями свободы, которая аппроксимирует бесконечную систему (4). Из (4) следует, что:  $\eta_{3n} = 0$ ;  $n = 1, 2, \dots$  Предположим, что  $\eta_1 \neq 0$ ;  $\eta_2 \neq 0$ , а  $\eta_{3n-2} = \eta_{3n-1} = 0$ ;  $n = 2, 3, \dots$  Тогда динамическая система, описывающая колебания гибкого стержня имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_1 + \pi^4 \eta_1 &= -\frac{\pi^4}{2} \eta_1 (\eta_1^2 + 4\eta_2^2) - 2\mu \eta_1 + \sqrt{1.5} f_0 \text{Cos}(\Omega t); \\ \eta_2 + 16\pi^4 \eta_2 &= -2\pi^4 \eta_2 (\eta_1^2 + 4\eta_2^2) - 2\mu \eta_2 + \sqrt{1.5} f_0 \text{Cos}(\Omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что система (5) имеет симметричные решения:

$$\eta_1(t) = -\eta_1(t + T/2); \quad \eta_2(t) = -\eta_2(t + T/2).$$

Цель описываемых здесь расчетов – анализ бифуркаций системы (5). Для представления бифуркационного поведения использовалась бифуркационная

диаграмма, показывающая зависимость размахов установившихся колебаний от частоты возмущающего воздействия. Для получения этой диаграммы использовалось численное интегрирование. Движение считалось переходным при  $t \in [0; 6 \cdot 10^4 \pi / \Omega]$  и установившемся при  $t \in [6 \cdot 10^4 \pi / \Omega; 9 \cdot 10^4 \pi / \Omega]$ . Одно из значений вектора состояний установившегося движения принималось за начальные условия при интегрировании системы (5) на следующем значении частоты возмущающего воздействия.

Для определения вида установившихся движений использовались сечения Пуанкаре, которые рассчитывались следующим образом. Переменные  $\eta_1(t)$  и  $\dot{\eta}_1(t)$  показываются на плоскости  $(\eta_1, \dot{\eta}_1)$  в моменты времени  $t_j = j 2\pi / \Omega$ ;  $3 \cdot 10^4 < j < 4.5 \cdot 10^4$ . В расчетах использовались следующие значения параметров:  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $f_0 = 100$ .

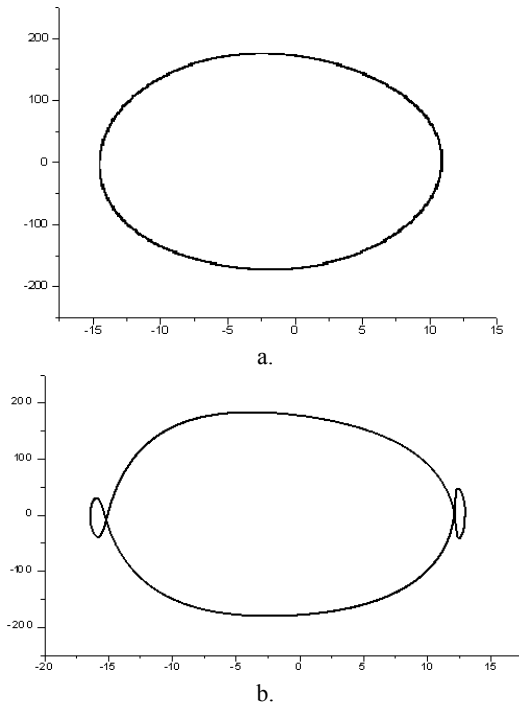


Рис.2. Сечения Пуанкаре динамической системы.

Рассмотрим результаты расчетов, представленные на бифуркационной диаграмме (рис. 1). Устойчивые и неустойчивые движения показаны на диаграмме сплошной и пунктирной линией, соответственно. В системе (5) на-

блюдаются два вида установившихся движений – периодические и квазипериодические. Участок диаграммы (OL) показывает периодические колебания. Бифуркация Неймарка наблюдается в точке L ( $\Omega_L = 24,9$ ), где устойчивые периодические движения преобразуются в неустойчивые и устойчивые квазипериодические движения возникают. В качестве примера на рис. 2а показаны сечения Пуанкаре квазипериодических колебаний при  $\Omega = 29,6$ , а на рис. 3а демонстрируются  $\eta_1(t)$  этих колебаний.

Подчеркнем, что устойчивые квазипериодические колебания  $AAPS_1$  и неустойчивые квазипериодические режимы  $UAPS$  соединяются в точке  $L_2$ . Рассмотрим поведение динамической системы около точки  $L_2$  при увеличении  $\Omega$ . Система подходит к точке  $L_2$  вдоль ветви  $SAPS_1$ . В точке  $L_2$  наблюдается срыв колебаний, то есть при увеличении  $\Omega$  движения притягиваются к ветви  $SAPS_2$ . На рис. 3б показаны сечения Пуанкаре таких колебаний при  $\Omega = 29,95$ , а рис. 3в демонстрирует  $\eta_1(t)$  этих движений. Участок (CF) бифуркационной диаграммы показывает периодические колебания. В точке F ( $\Omega_F = 25,04$ ) наблюдается бифуркация Неймарка. В этой точке рождаются неустойчивые почти периодические колебания, которые показаны пунктирной линией.

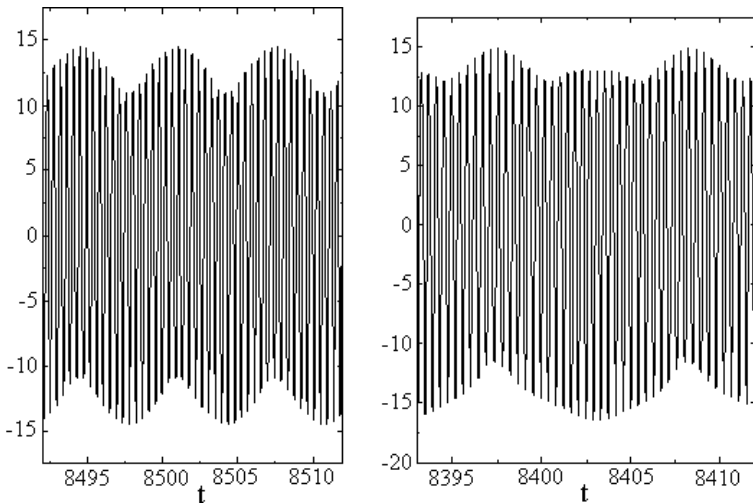


Рис.3. Колебания гибкого стержня.

В данной статье исследуются резонансные колебания гибких стержней под действием периодической силы. Бифуркационная диаграмма, представленная на рис.2, отвечает комбинационному резонансу:

$$\Omega \approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Аналитический анализ этого резонанса представлен в статье [9]. Аналитические результаты качественно совпадают с численными данными.

**Список литературы:** 1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М: Наука, 1972. – 431 с. 2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с. 3. *Кубенко В. Д., Ковальчук Т.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1984. – 220 с. 4. *Nayfeh A., Mook D.* Nonlinear Oscillations. – N.Y. – J. Wiley and Sons, 1979. – 704 p. 5. *Woinowsky-Krieger S.* The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, 1950, p.35-36. 6. *Evensen D. A.* Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions. *AIAA Journal*, Vol. 6, 1972, p. 370-372. 7. *Tseng W. Y., Dugundji J.* Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 38, 1971, p. 467-472. 8. *Bennet J. A., Easley J.G.* A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beam vibration. *AIAA Journal*, Vol. 1, 1970, p. 734-739. 9. *Аврамов К.В.* Вынужденные нелинейные колебания гибких стержней при комбинационном резонансе. Докл. НАН Украины N2, 2002. – С.47-50.

*Поступила в редакцию 05.04.02*

УДК 539.3

**Л.В.АВТОНОМОВА**, канд. техн. наук;

**В.И.ЛАВИНСКИЙ**, канд. техн. наук; **С.Ю.ШЕРГИН**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ УЗЛА РАЗЪЕМА МНОГОСЛОЙНОЙ ВИНТОВОЙ ОБМОТКИ ТОРСАТРОНА**

Запропоновано експериментальний метод прогнозування несучої здатності моделі вузла роз'язання гвинтової обмотки. Дані модельних експериментів дозволили одержати оцінки реальних граничних навантажень гвинтових обмоток торсатрона.

Достоверный анализ механической прочности винтовой обмотки магнитной системы электрофизической установки типа торсатрон возможен на основе совместного комплексного исследования напряженно-деформированного состояния, тепловых и электрических процессов. Основным элементом установки является многокомпонентная винтовая обмотка, состоящая из пакета медных шин, уложенная на тороидальной поверхности и содержащая узлы разъема, обеспечивающие требуемые условия изготовления и монтажа.

Несущая способность обмотки в основном определяется конструктивными особенностями и напряженным состоянием узла разъема, общий вид которого приведен на рис.1. Контакт перемычек 1 с шинами обмотки 2 осуществляется домкратами 3 через изоляционные прокладки 4, разделяющие пары шин. Для компенсации температурных расширений и погрешностей сборки пакета для надежного электрического контакта сжатие реализуется с помощью тарельчатых пружин 5 и клинового соединения. Усилия сжатия в соединении действуют в направлении бинормали к осевой линии пакета.