Анализ показывает, что снижение величины момента до нуля уменьшает износ гребней в сравнении с серийным тепловозом на 6…8%, а введение такого же по модулю “активного” момента способствует дальнейшему снижению показателей динамики и износа гребней – до 12% в кривых радиусом 350 м. Аналогичная картина наблюдается и на второй колесной паре тележки. При дальнейшем увеличении “активного” момента появляется устойчивый контакт у гребня третьей колесной пары с наружным рельсом, поскольку тележка занимает хордовое положение и появляется его износ. При выходе тепловоза из кривой “активный” момент препятствует повороту тележки, что делает необходимым его ограничение по величине.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

- уменьшение момента сопротивления повороту тележки или введение “активного” момента, действующего между кузовом и тележкой в направлении кривой, в целом улучшают динамические показатели тепловоза, что способствует некоторому увеличению ресурса бандажей по износу гребней колес;

- величина “активного” момента ограничена по условиям выхода тепловоза из кривых участков пути, а также по износу гребня у третьей колесной пары.

Литература

1. Маслиев В.Г., Калинина С.А., Якунин Д.И. Базовая математическая модель горизонтальной динамики локомотива // Новые решения в современных технологиях: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. Випуск 118.- Харків: ХДПУ, 2000.- С.17 – 20. **2.** А.С.1071495 СССР, МКИ В 61 F 5/02; В 61 F 5/16. Роликовая опора кузова локомотива / В.Г.Маслиев, Э.П.Елбаев, Ю.П.Рыжков, А.В.Клименко; (СССР).- 2с. ил.; Опубл.07.02.84, Бюл. № 5.

Поступила в редколлегию 24.09.2001

УДК 517.944

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

В.И.Мельник

Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина

В роботі розглядається модифікація відомого із теорії гіперболічних систем методу перетворення незалежних змінних по розв’язкові. В запропонованому варіанті, стосовно систем двох рівнянь гарантується перехід на сітку характеристик.

Введение

Актуальность проблемы дальнейшего изучения квазилинейных гиперболических систем уравнений диктуется их широким прикладным значением. Они нашли применение в газовой динамике [1]. На них базируются теории пластичности [2] и предельного равновесия [3] различных сред, например, сыпучих и связных. Известны и другие их приложения [4]. Ограничимся рассмотрением системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, приводимой к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial y} = b, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

где: область D — односвязная; $u : D \to \mathbf{R}^2$ — искомая функция; $b = (b_i(x, y, u))_{i=1}^2$ — вектор-столбец; $A = (a_{ij}(x, y, u))_{i,j=1}^2$.

Пусть $l^i(x, y, u)$, $i = 1{,}2$ — левые собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям $\xi_i(x, y, u)$, т.е. $l^i A = \xi_i l^i$.

Определение 1. *Система квазилинейных уравнений (1) называется гиперболической в области D, если для всех $(x, y) \in D$: во-первых, все собственные значения $\xi_i(x, y, u)$, $i = 1{,}2$ матрицы $A = A(x,y,u)$ вещественны; во-вторых, существуют линейно независимые нормированные левые собственные векторы $l^i(x, y, u)$, $i = 1{,}2$* [1,4,5].

Определение 2. *Система (1) называется гиперболической в узком смысле в области D, если для всех $(x, y) \in D$ выполняются условия определения 1, а собственные значения ξ_i, $i = 1{,}2$ матрицы A различны* [1].

Если для системы (1) условие гиперболичности соблюдается, то путем известных преобразований она приводится к нормальной форме [5]:

$$l^i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \xi_i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = l^i b, \qquad i = 1{,}2. \tag{2}$$

Определение 3. *Под характеристическими направлениями системы (1) условимся понимать определенные уравнениями*

$$\frac{dy}{dx} = \xi_i(x, y, u), \qquad i = 1{,}2. \tag{3}$$

направления дифференцирования функции u(x,y) в равенствах (2) [1].

Определение 4. *Первые интегралы дифференциальных уравнений характеристик (3) определяют два однопараметрических семейства характеристических кривых (характеристик) с параметрами λ_i, $i = 1{,}2$, соответствующими собственным числам ξ_i матрицы коэффициентов A* [3].

В случае, когда два семейства характеристик используют как семейства координатных кривых, предполагают замену $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, где

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. В таком случае (3) дает [2,3]

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_i} = \xi_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \qquad i,j = 1,2, \quad i \neq j\,. \tag{4}$$

Обозначив $U(\lambda) = u(x(\lambda), y(\lambda))$ система (2) приводится к виду [5]

$$l^j \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = l^j b \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \qquad i = 1,2, \quad i \neq j\,. \tag{5}$$

Определение 5. *Уравнения системы (5), выполняющиеся вдоль характеристик $\lambda_j = const$ и, являющиеся следствиями уравнений исходной системы (1), условимся называть соотношениями на характеристиках.*

Для некоторых конкретных систем рассматриваемого класса соотношения на характеристиках (5) удается интегрировать [2,3].

1. Постановка задачи

Как показано выше, переход от исходной системы (1) к (4) и (5) предусматривает неявную замену переменных, при которой функциональные зависимости $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ остаются неизвестными. Предложим явную замену переменных, когда связь между старыми координатами *x, y* и новыми (параметрами характеристик) λ_i, $i = 1,2$, изначально представляется в аналитическом виде. Такую задачу ставим в предположении, что ее решение послужит дальнейшему развитию общей теории гиперболических систем.

Замечание. Переход от *(x,y)* к λ_i, $i = 1,2$, в процессе которого система (2) преобразуется в систему (5), возможен в случае, если такая замена переменных является невырожденной, т.е. когда

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda_1,\lambda_2)} = det\begin{vmatrix} \partial x/\partial\lambda_1 & \partial x/\partial\lambda_2 \\ \partial y/\partial\lambda_1 & \partial y/\partial\lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{6}$$

В известном случае частные производные $\partial/\partial\lambda_j\, x,$ *и* $\partial/\partial\lambda_j\, y,$, $j = 1,2,$ *равно, как и якобиан (6), остаются неизвестными.*

Заметим, что настоящая работа не первая [2,3] попытка решения такой задачи. Первым, применительно к математической теории пластичности, обозначил эту задачу, Христианович [5] в 1936 году.

2. Замена переменных

Из газовой динамики известно *преобразование координат (независимых переменных) по решению* [1], когда новые координаты записывают в виде выражений для полных дифференциалов. Этот метод предусматривает введение четырех новых неизвестных функций $\eta_i = \eta_i(\lambda,U)$, $\theta_i = \theta_i(\lambda,U)$, $i = 1,2,$, таких, что

$$\{\, dy = \eta_1 d\lambda_1 + \theta_1 d\lambda_2; \quad dx = \eta_2 d\lambda_1 + \theta_2 d\lambda_2. \tag{7}$$

Законность замены (7) предполагает выполнение двух условий [1]:

$$\Delta = \eta_1\theta_2 - \eta_2\theta_1 \neq 0, \tag{8}$$

$$\partial \eta_i / \partial \lambda_2 = \partial \theta_i / \partial \lambda_1;, \quad i = 1{,}2. \tag{9}$$

Справедливость (8) вытекает из соображений существования решения системы (7) относительно дифференциалов $d\lambda_i$, $i = 1{,}2$, а (9) — из равенства смешанных производных: $\partial^2 / \partial\lambda_1\partial\lambda_2 \, x = \partial^2 / \partial\lambda_2\partial\lambda_1 \, x$ и $\partial^2 / \partial\lambda_1\partial\lambda_2 \, y = \partial^2 / \partial\lambda_2\partial\lambda_1 \, y$.

Используем замену (7) для достижения цели, поставленной в п. 1 настоящей работы. Цель достигается если η_i, θ_i, $i = 1{,}2$ — найдены, а применение замены (7) обеспечивает невырожденный переход от системы (2) к системе соотношений на характеристиках (5). Известный [1] алгоритм поиска функций η_i, θ_i, $i = 1{,}2$ не всегда дает положительный результат (особенно в случае двух уравнений) и совсем не гарантирует переход к системе (5). В работе [1] преследовались иные цели. По этому, далее модифицируем известное преобразование координат по решению, для чего: во-первых, количество неизвестных функций из (7) сведем до двух; во-вторых, выведем уравнения, из которых эти две функции могут быть определены.

Поскольку вдоль характеристик $\lambda_i = const$ $d\lambda_i = 0$, $i = 1{,}2$ из (7) имеем

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \xi_1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \xi_2 \right. . \tag{10}$$

Собственные числа ξ_i, $i = 1{,}2$ определяют направления дифференцирования (3) и, следовательно, могут быть записаны как тангенс некоторого угла, то использовав замену

$$sin\alpha_i = \xi_i \Big/ \sqrt{1+\xi_i^2}, \quad cos\alpha_i = 1 \Big/ \sqrt{1+\xi_i^2}, \quad i = 1{,}2 \tag{11}$$

представим их в виде отношений:

$$\xi_i = sin\alpha_i / cos\alpha_i, \quad i = 1{,}2 \tag{12}$$

С учетом (10) и (12) можно утверждать, что функции η_i и θ_i, $i = 1{,}2$ имеют общие, отличные от единицы, множители. Условимся называть их масштабирующими и обозначим соответственно:

$$\upsilon = \upsilon(x, y, u(x, y)) = \upsilon(\lambda, U) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(x, y, u(x, y)) = \omega(\lambda, U). \tag{13}$$

Тогда учитывая (10 – 13), из (7) получим

$$\begin{cases} dy = \upsilon \sin\alpha_2 d\lambda_1 + \omega \sin\alpha_1 d\lambda_2, \\ dx = \upsilon \cos\alpha_2 d\lambda_1 + \omega \cos\alpha_1 d\lambda_2. \end{cases} \tag{14}$$

Запишем для (14) аналогичные (8), (9) уравнения ограничений

$$\Delta = \upsilon\omega \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0, \tag{15}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_2}(\upsilon\, sin\alpha_2) - \frac{\partial}{\partial\lambda_1}(\omega\, sin\alpha_1) = 0\ , \quad \frac{\partial}{\partial\lambda_2}(\upsilon\, cos\,\alpha_2) - \frac{\partial}{\partial\lambda_1}(\omega\, cos\,\alpha_1) = 0\ . \right. \tag{16}$$

При условии, когда выполняются требования гиперболичности в узком смысле, т.е. когда $\xi_1 \neq \xi_2$, выражение (15) трансформируется к виду

$$\upsilon\omega \neq 0. \tag{17}$$

Заметим, что для рассматриваемого класса систем уравнений, нашедших применение в теориях пластичности [2,5] и предельного равновесия ряда сред [3], условия гиперболичности в узком смысле — соблюдаются.

Теорема. *Применительно к системе квазилинейных гиперболических в узком смысле двух дифференциальных уравнений первого порядка (1), любое ненулевое решение* $\upsilon = \upsilon(\lambda)$ *и* $\omega = \omega(\lambda)$ *системы равенств смешанных производных (16) удовлетворяет требованию невырожденности преобразований независимых координат* $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, *выполняемых с использованием замены (14) в процессе перехода на сетку характеристик* (λ), *т.е. к системе соотношений на характеристиках (5).*

Доказательство. Полагая, что решением системы (16) масштабирующие функции υ, ω получены и они удовлетворяют требованию (17), из системы замены независимых переменных (14) заключаем

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda_1} = \upsilon \sin\alpha_2; \quad \frac{\partial y}{\partial\lambda_2} = \omega \sin\alpha_1; \quad \frac{\partial x}{\partial\lambda_1} = \upsilon \cos\alpha_2; \quad \frac{\partial x}{\partial\lambda_2} = \omega \cos\alpha_1 . \tag{18}$$

Теперь, представив дифференциалы dx, dy из (3) через частные производные (18), приходим к системе (4), а от нее, выполнив подстановку ξ_i, $i = 1{,}2$ в (2), непосредственно получаем соотношения на характеристиках (5).

Невырожденность таких преобразований непосредственно следует из прямой подстановки выражений частных производных (18) в условие (6). С учетом обязательного требования (17) условие (6) выполняется всегда

$$D(x,y)/D(\lambda_1,\lambda_2) = -\Delta \neq 0. \tag{19}$$

Теорема доказана.

Таким образом, использовав предлагаемую замену переменных (14), применительно к системе (1), можно осуществить переход на сетку характеристик λ_i, $i = 1{,}2$ (к системе (5)), не заботясь о поиске масштабирующих функций υ и ω. Сами же мастштабирующие функции υ, ω можно получить решением системы (16), что мы покажем на конкретном примере.

3. Пример реализации метода

Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 2k\left(\sin(2u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \cos(2u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) = \gamma \sin\alpha \,, \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + 2k\left(\cos(2u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \sin(2u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) = \gamma \cos\alpha \,.
\end{cases}
\tag{20}
$$

где k, α и γ — постоянные, а остальные обозначения совпадают с ранее принятыми. Она известна в теории предельного равновесия идеально-связной среды [3], имеет серьезное прикладное значение и обычно именуется системой уравнений предельного равновесия. К представлению системы (20) сводятся основные уравнения теории пластичности [2].

Путем формальных преобразований система (20) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
\cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y} \mp 2k\left[\cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] = \\
= \gamma\left[\sin\alpha\cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) + \cos\alpha\sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right)\right],
\end{gathered}
\tag{21}
$$

и, с учетом следующих обозначений

$$
\begin{gathered}
b_1 = \gamma\left\{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2}\left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}, \\
b_2 = \gamma\frac{\cos\alpha}{4k}\left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right],
\end{gathered}
\tag{22}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
\dfrac{1}{2}\left[\tan\left(u_2 + \dfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] & k\left[\tan\left(u_2 + \dfrac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] \\
\dfrac{1}{4k}\left[\tan\left(u_2 + \dfrac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] & \dfrac{1}{2}\left[\tan\left(u_2 + \dfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]
\end{pmatrix},
\tag{23}
$$

к матричной форме (1). Собственные значения ξ_i, $i = 1{,}2$ и соответствующие левые собственные векторы l^i матрицы A (23) следующие:

$$
\xi_i = \tan\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad l^i = \left\{\mp\left(4k^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad 2k\left(4k^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}, \quad i = 1{,}2 \tag{24}
$$

Система (20) квазилинейна и гиперболична в узком смысле во всей области определения, исключая геометрические места, где $u_2 \mp \pi/4 = \pm\pi(n+1/2)$, $n = 1{,}2{,}\ldots$. Развернутые уравнения характеристик для нее получаем подстановкой собственных значений ξ_i (24) матрицы A (23) в уравнения (3)

$$
cos(u_2 \mp \pi/4)dy - sin(u_2 \mp \pi/4)dx = 0, \tag{25}
$$

т.е. известным способом [3], а приведение системы (20) к виду (5) выполним, применяя предлагаемую замену переменных (14). Частные производные старых координат x, y по новым λ_i, $i = 1{,}2$ получаем из выражений (18)

$$\begin{aligned} &\partial y/\partial\lambda_1 = \upsilon\, sin(u_2 + \pi/4)\,, \quad \partial y/\partial\lambda_2 = \omega\, sin(u_2 - \pi/4), \\ &\partial x/\partial\lambda_1 = \upsilon\, cos(u_2 + \pi/4)\,, \quad \partial x/\partial\lambda_2 = \omega\, cos(u_2 - \pi/4). \end{aligned} \qquad (26)$$

Теперь, домножая уравнение (21) с верхними знаками на ω, а уравнение с нижними знаками — на υ, учитывая (26), получаем соотношения на характеристиках λ_i, $i = 1{,}2$ (форму (5)). После интегрирования они дают

$$u_1 \mp 2ku_2 = \gamma[x\sin\alpha + y\cos\alpha] + f_i(\lambda_i), \quad \text{при} \quad \lambda_i = const, \quad i = 1{,}2. \qquad (27)$$

где $f_i(\lambda_i)$ — постоянные интегрирования, представленные, как функции от параметров характеристик λ, $i = 1{,}2$. $f_i(\lambda_i)$ могут быть уточнены по граничным данным. Когда $f_i = \lambda_i$ из (27) имеем

$$u_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \gamma[x\sin\alpha + y\cos\alpha], \quad u_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \qquad (28)$$

Производные (26) с учетом (17) удовлетворяют требованию (6), а значит проведенные преобразования независимых переменных — невырожденные.

Система (16), в этом частном случае с применением (28) дает

$$\left\{ \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_1} = -\frac{\upsilon}{4k}, \quad \frac{\partial\upsilon}{\partial\lambda_2} = -\frac{\omega}{4k}, \right. \qquad (29)$$

и в соответствии с конкретными граничными условиями может быть интегрирована [4], что, в конечном итоге, с учетом (28) позволяет полностью избавиться от опосредствованных зависимостей между старыми x, y и новыми λ_i, $i = 1{,}2$ координатами в выражениях частных производных (26).

Заключение

Использовав известную замену независимых переменных (7) с учетом предложенных ограничений (10) применительно к квазилинейным гиперболическим в узком смысле системам двух дифференциальных уравнений, можно выполнить невырожденную замену независимых переменных и перейти на сетку характеристик, не заботясь о поиске масштабирующих функций υ и ω. Сами же $\upsilon(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ в ряде случаев удается получить из системы равенств смешанных производных (16).

Предложенная выше замена переменных является частным вариантом известной, именуемой “преобразованием независимых переменных по решению” [1], а поэтому будет логичным называть её “преобразованием независимых переменных по характеристическому решению”, акцентировав внимание на том, что, во-первых, в предлагаемом варианте осуществляется переход на сетку характеристик, а, во-вторых, для получения преимуществ метода необходимо иметь интегралы соотношений на характеристиках (типа (27)).

Литература
1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 688 с. **2.** Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения. – К.: Выща шк., 1991. – Ч. 1. – 264 с. **3.** Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Наука, 1990. – 272 с. **4.** Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. – М.: Изд-во РУДН, 1997. – 447 с. **5.** Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с. **6.** Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре // Мат. сб. – 1936. – Т. 1 (43). –Вып. 4. – С. 511 – 531.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК629.1.032:531.3

ОЦЕНКА НАГРУЖЕННОСТИ БАЛАНСИРОВ ПОДВЕСКИ ОПОРНЫХ КАТКОВ ГУСЕНИЧНОГО ТРАНСПОРТЕРА-ТЯГАЧА ЛЕГКОЙ ВЕСОВОЙ КАТЕГОРИИ.

Писарев В.П.
Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина

Quantitative estimate of the loading beams of loader-trailer MT-L is considered by new method as compared with traditional approach

Гусеничный транспортер–тягач МТ-Л является базовой машиной семейства унифицированных быстроходных гусеничных машин легкой весовой категории (вес снаряженной машины $\approx$ 85кН, вес машины с грузом при перевозке груза без прицепа $\approx$ 130кН). Ходовая часть тягача содержит шесть опорных катков на один борт. Опорные катки односкатные с наружной ошиновкой, гусеница двутребневая, подвеска опорных катков балансирная моноторсионная.

Традиционная методика расчета элементов ходовой части, (в частности методика изложенная в [1]), исходит из конфигурации (относительного положения катков и гусеницы), представленной на рис.1а. Расчетная схема по этой методике вообще не учитывает боковых сил (в частности направляющих усилий в горизонтальной плоскости между опорными катками и гребнями гусеницы), а также смещение зоны приложения нагрузки в вертикальной плоскости.