

учитываться, как местное увеличение зазора между взаимодействующими поверхностями, по модели, предложенной в работе [6]  $\dot{\delta} = K \cdot \sigma_x^\alpha \cdot v$ , где  $\dot{\delta}$  означает производную изменения зазора по времени,  $K$  и  $\alpha$  – коэффициенты, зависящие от свойств материала и состояния поверхностей,  $v$  – скорость относительного проскальзывания. При учете износа необходимо использовать неявные временные схемы, сходные с использующимися при решении задач ползучести [6]. В противном случае имеет место неустойчивый вычислительный процесс даже при достаточно малых временных шагах.

## Литература

1. Гармаш Н. Г. Двовимірний скінченноелементний аналіз контактних задач із врахуванням теплообміну: Автореф. дис. . . . канд. техн. наук, Харків, 1999.
2. Гонтаровский П. П., Гармаш Н. Г. Расчет напряженно-деформированного состояния замковых соединений лопаток турбомашин с учетом термодетактных взаимодействий, 533-536, Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования, Харьков, ИПМаш им. А.Н.Подгорного НАН Украины, 1997.
3. Гонтаровский П. П., Матюхин Ю. И. О применении неявной схемы интегрирования по времени в конечноэлементном расчете ползучести конструкций по теории течения с анизотропным упрочнением, Проблемы машиностроения, 1998, **3-4**, 68–75.
4. Шлыков Ю. П., Ганин Б. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление, Энергия, Москва, 1977.
5. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций, Наук.думка, Киев, 1989.
6. Крагельский Н. В., Добрынин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ, Машиностроение, Москва, 1997.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, Мир, Москва, 1989.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК 539.3:534.1

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Н.В. Долгополова, С.В. Угримов, А.Н. Шупиков

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина*

In work the problem of non-stationary deformation of free-supported multilayer plates and cylindrical shells which lay on the elastic two-parameter foundation is considered. The behaviour of multilayer thin-walled constructions is described by the refined theory of multilayer plates and shells. The influence of parameters of the elastic foundation on the stress-strained state of multilayer constructions is investigated.

## Постановка задачи

Исследуется напряженно-деформированное состояние свободно-опертых многослойных тонкостенных конструкций (пластин и цилиндрических панелей), лежащих на упругом основании, при нестационарном импульсном нагружении.

Многослойная конструкция собрана из слоев постоянной толщины. Количество слоев в пакете равно  $I$ ,  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя. Каждый из слоев изготовлен из однородного изотропного материала. Механические характеристики  $i$ -го слоя:  $E_i$ ,  $\nu_i$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho_i$  – удельная плотность. Контакт между слоями, а также между многослойной конструкцией и основанием исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание.

Цилиндрическая панель отнесена к ортогональной криволинейной системе координат  $Oxyz$ , прямолинейная ось  $Oz$  направлена по нормали к слоям, а нормальная ей координатная поверхность  $Oxy$  связана с наружной поверхностью первого слоя и имеет радиус  $R$  (рис. 1).

К наружной поверхности первого слоя приложена внешняя сила  $\bar{q}^1 = \bar{q}^1(x, y, t)$ , а на наружную поверхность  $I$ -го слоя действует сила  $\bar{q}^I = \bar{q}^I(x, y, t)$ , представляющая собой реакцию упругого основания.

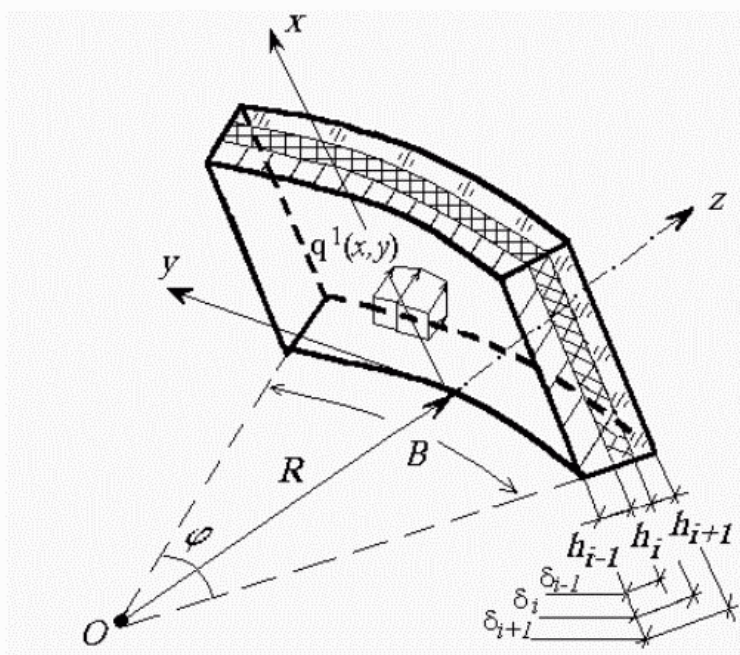


Рис. 1. Многослойная цилиндрическая панель.

## Математическая модель многослойной конструкции

Поведение многослойной конструкции описывается уравнениями уточненной теории первого порядка, построенной Э.И.Григолюком и П.П.Чулковым в работе [1].

Перемещения точки  $i$ -го слоя в направлении координатных линий  $x$ ,  $y$  и  $z$  описываются следующими кинематическими зависимостями [2 - 4]:

$$u^i = u^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \\ w^i = w^0, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Здесь  $u^0 = u^0(x, y, t)$ ,  $v^0 = v^0(x, y, t)$ ,  $w^0 = w^0(x, y, t)$  – перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных линий;  $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y, t)$ ,  $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y, t)$  – углы поворота нормали в пределах  $i$ -го слоя;  $t$  – время.

Деформации слоев предполагаются малыми и описываются формулами Коши

$$\varepsilon_x^i = u_{,x}^i, \quad \varepsilon_y^i = \frac{1}{1+z/R} \left( v_{,y}^i + \frac{1}{R} w^i \right), \quad \varepsilon_z^i = w_{,z}^i, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{1+z/R} u_{,y}^i + v_{,x}^i \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = u_{,z}^i + w_{,x}^i, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = v_{,z}^i + \frac{1}{1+z/R} w_{,y}^i + \frac{1}{R(1+z/R)} v^i, \quad i = \overline{1, I}.$$

На основе закона Гука устанавливается связь между напряжениями и деформациями

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_x^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_y^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \\ \sigma_z^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_z^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \quad \tau_{xy}^i = G_i \gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = G_i \gamma_{xz}^i, \\ \tau_{yz}^i = G_i \gamma_{yz}^i,$$

где

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad \theta^i = \varepsilon_x^i + \varepsilon_y^i + \varepsilon_z^i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Обобщенные усилия в  $i$ -ом слое определяются формулами

$$\begin{bmatrix} N_x^i & N_{xy}^i \\ M_x^i & M_{xy}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \frac{1}{z - \delta_{i-1}} \right\} \left[ \sigma_x^i, \tau_{xy}^i \right] (1+z/R) dz, \\ \begin{bmatrix} N_y^i & N_{yx}^i \\ M_y^i & M_{yx}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \frac{1}{z - \delta_{i-1}} \right\} \left[ \sigma_y^i, \tau_{xy}^i \right] dz, \quad Q_x^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{xz}^i (1+z/R) dz, \quad Q_y^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i dz.$$

## Математическая модель основания

Поскольку целью работы является исследование нестационарного деформирования тонкостенных конструкций, а не изучение напряженно-деформированного состояния в упругом основании, то главный интерес представляет реакция основания в зоне контакта. Поэтому задача сводится к нахождению сравнительно простого математического выражения, которое будет с достаточной точностью определять реакцию основания в зоне контакта [5, 6].

Предполагается, что многослойная конструкция лежит на упругом безинерционном двухстороннем основании, которое при вдавливании деформируется согласно гипотезе Пастернака [5, 6]

$$q_3^I = -k_1 w^I(x, y, t) + k_2 \nabla^2 w^I(x, y, t), \quad q_1^I = q_2^I = 0$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты постели,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Согласно работам [7, 8] основание представляется в виде упругого слоя конечной толщины  $H$ , тогда приближенные связи между коэффициентами постели и механическими характеристиками упругого слоя выражаются следующим образом:

$$k_1 = \frac{E^*}{H}, \quad k_2 = \frac{G_0 H}{4}, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad E^* = \frac{E_0(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)}, \quad (1)$$

где  $E_0, G_0, \nu_0$  – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона основания, соответственно.

Используемая математическая модель учитывает не только поперечное сжатие основания, но и работу его на сдвиг. В частном случае, при  $k_2=0$ , модель Пастернака совпадает с широко известной моделью Винклера [5, 6, 7].

## Уравнения движения и метод решения

Уравнения движения и граничные условия получены с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [2]. Для цилиндрической панели уравнения движения в усилиях и моментах имеют вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \left[ N_{x,x}^i + N_{yx,y}^i - \alpha_{\rho}^i \left( u_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,tt}^j \right) - \beta_{\rho}^i \psi_{x,tt}^i \right] + q_1^1 = 0, \\ & \sum_{i=1}^I \left[ N_{y,y}^i + N_{xy,x}^i + \frac{1}{R} Q_y^i - \alpha_{\rho}^i \left( v_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,tt}^j \right) - \beta_{\rho}^i \psi_{y,tt}^i \right] + q_2^1 = 0, \\ & \sum_{i=1}^I \left[ Q_{x,x}^i + Q_{y,y}^i - \frac{1}{R} N_y^i - \alpha_{\rho}^i w_{,tt}^0 \right] + q_3^1 - q_3^I = 0, \\ & h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left[ N_{x,x}^{j+1} + N_{yx,y}^{j+1} - \alpha_{\rho}^{j+1} \left( u_{,tt}^0 + \sum_{k=1}^j h_k \psi_{x,tt}^k \right) - \beta_{\rho}^{j+1} \psi_{x,tt}^{j+1} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_{x,x}^i + M_{yx,y}^i - Q_x^i - \beta_p^i \left( u_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,tt}^j \right) - \gamma_p^i \psi_{x,tt}^i = 0, \\
& h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left[ N_{y,y}^{j+1} + N_{xy,x}^{j+1} + \frac{1}{R} Q_y^{j+1} - \alpha_p^{j+1} \left( v_{,tt}^0 + \sum_{k=1}^j h_k \psi_{y,tt}^k \right) - \beta_p^{j+1} \psi_{y,tt}^{j+1} \right] + \\
& + M_{y,y}^i + M_{xy,x}^i - \left( 1 + \frac{\delta_{i-1}}{R} \right) Q_y^i - \beta_p^i \left( v_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,tt}^j \right) - \gamma_p^i \psi_{y,tt}^i = 0, \quad i = \overline{1, I}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_p^i = \rho_i \alpha_2^i$ ,  $\beta_p^i = \rho_i \beta_2^i$ ,  $\gamma_p^i = \rho_i \gamma_2^i$ ,  $\alpha_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (1 + z/R) dz$ ,

$$\beta_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (z - \delta_{i-1})(1 + z/R) dz, \quad \gamma_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (z - \delta_{i-1})^2 (1 + z/R) dz.$$

Уравнения движения многослойных пластин получаются из этих уравнений, если опустить слагаемые, содержащие величину  $1/R$ . Метод решения полученных уравнений основан на разложении искомых функций перемещений, а также внешней нагрузки в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям на контуре опирания [2, 3, 4].

### Численные исследования и обсуждение результатов

Рассматриваются трехслойные пластины и цилиндрические панели на упругом основании, подверженные импульсному нагружению. Конструкции имеют следующие геометрические характеристики:  $A = B = 0,6$  м,  $h_1 = h_2 = h_3 = 0,01$  м. Первый и третий слой изготовлены из стекла силикатного ( $E_3 = 6,67 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_1 = \nu_3 = 0,22$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>), второй – из стекла органического ( $E_2 = 5,7 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_2 = 0,38$ ,  $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>).

Импульсная нагрузка имеет вид

$$q_3^1 = P_0 \cdot H(t), \quad q_1^1 = q_2^1 = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

где  $H(t)$  - функция Хевисайда,  $P_0 = 1$  МПа,  $x_1 = y_1 = 0,2$  м;  $x_2 = y_2 = 0,4$  м.

Во всех рассмотренных ниже примерах приводятся результаты расчетов изгибных напряжений в точке  $x = y = 0,3$  м,  $z = 0,03$  м, расположенной посередине наружной поверхности третьего слоя.

Исследуется влияние коэффициента  $k_1$  на изменение напряжений  $\sigma_x^3$  во времени. Коэффициент  $k_1$  принимался равным 0, 10 и 100 МПа, при этом работа упругого основания на сдвиг не учитывалась ( $k_2 = 0$ ). Результаты расчета приведены на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что при увеличении коэффициента постели основания величина напряжений в многослойной конструкции падает. Анализ

кривых, представленных на этом рисунке, позволяет сделать вывод, что учет упругого основания при исследовании динамического поведения многослойной конструкции существенно влияет на процесс колебаний. Если упругое основание отсутствует, то уровень максимальных напряжений для цилиндрической панели ниже, чем для пластины. Максимальные значения изгибных напряжений для пластины и оболочки на упругом основании практически совпадают.

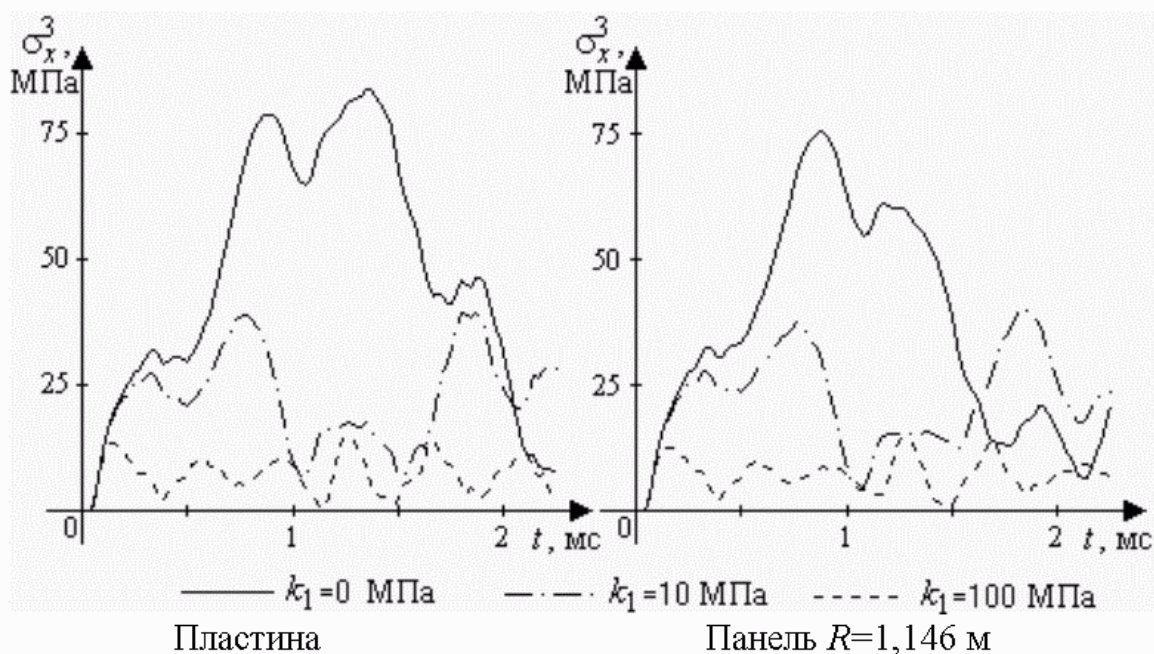


Рис. 2. Изменение напряжений во времени.

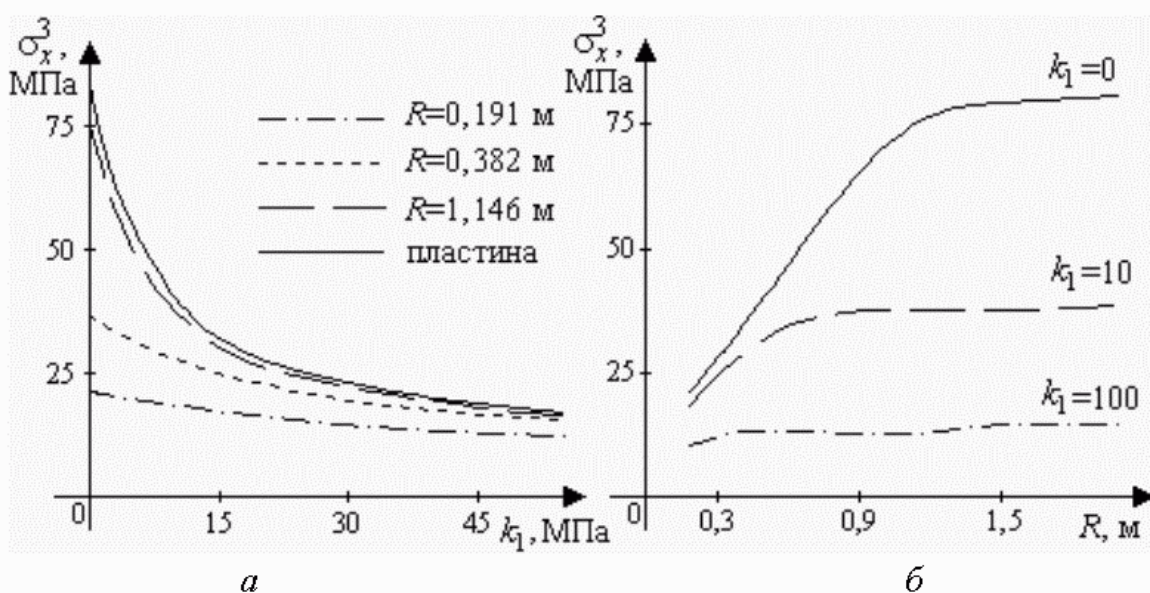


Рис. 3. Влияние кривизны панели и жесткости основания на максимальные изгибные напряжения.

На рис. 3 исследуется зависимость максимальных изгибных напряжений в панелях с разными радиусами кривизны от величины коэффициента постели

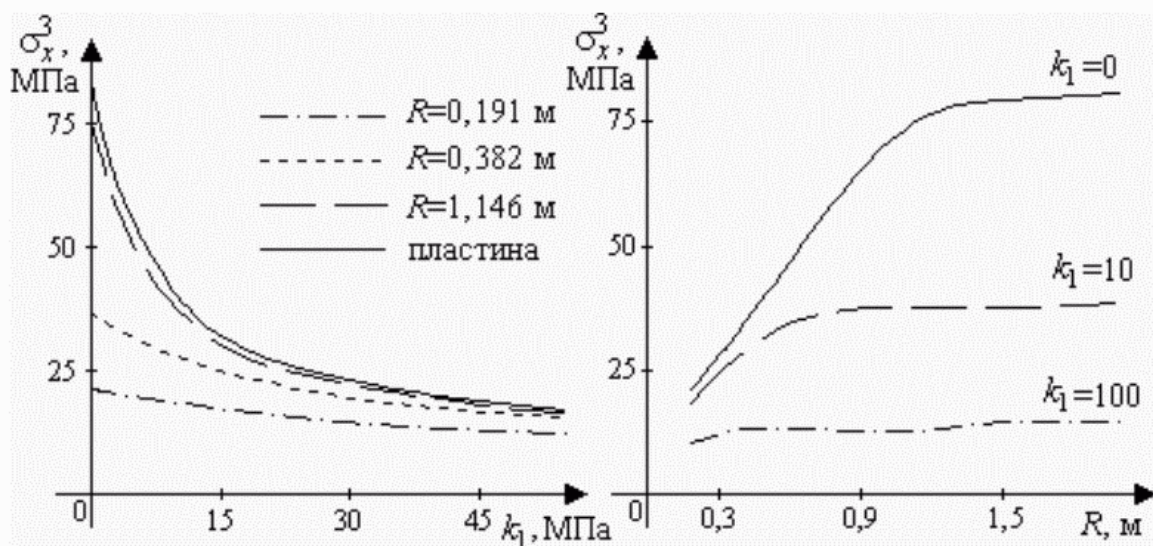


$k_1$ . При этом коэффициент  $k_2$ , как и в предыдущем случае, принимался равным нулю. Область изменения радиуса кривизны цилиндрической панели ограничивалась с одной стороны пластинами, а с другой – панелями с центральным углом  $\varphi = \pi$  ( $R=0,191$  м).

На рис. 3, а показано изменение максимальных изгибных напряжений в зависимости от  $k_1$  для панелей с разными радиусами кривизны. Следует отметить, что при увеличении коэффициента постели максимальные значения напряжений асимптотически стремятся к одному и тому же значению. В случае пластин и цилиндрических оболочек с большим радиусом кривизны учет упругого основания приводит к существенному снижению уровня напряжений. На рис. 3, б показаны максимальные изгибные напряжения в зависимости от радиуса кривизны панели для разных значений  $k_1$ .

Исследуется динамическое поведение многослойных конструкций, лежащих на упругом основании толщиной  $H=1$  м. Механические характеристики основания принимались равными:  $E_0 = 8$  МПа,  $\nu_0 = 0,47$  (каучук), коэффициенты постели определялись согласно формулам (1).

На рис. 4 показано изменение напряжений  $\sigma_x^3$  во времени для пластины и цилиндрической панели с  $R = 1,146$  м. Результаты расчета приведены для конструкций без упругого основания, а также для конструкций на одно- и двухпараметрическом основаниях. Анализ результатов показывает, что в начальной стадии динамического взаимодействия конструкции с упругим основанием, коэффициент постели  $k_2$  не влияет на характер изменения напряжений, а на последующем этапе деформирования начинает сказываться сдвиг, обусловленный вторым коэффициентом.



Пластина  
Панель  $R=1,146$  м  
Рис. 4. Динамическое поведение многослойных конструкций, лежащих на упругом основании.

Таким образом, разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния многослойных пластин и цилиндрических оболочек, лежащих на упругих основаниях, при их динамическом нагружении. При этом поведение многослойной конструкции описывается уравнениями уточненной теории, а упругое основание моделируется основанием типа Пастернака.

## **Литература**

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах, Журн. прикл. механики и технической физики, 1964, № 5, 109-117.
2. Smetankina N.V., Sotrikhin S.Yu., Shupikov A.N. Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads, Int. J. Solids and Structures, 1995, V. 32, № 8/9, 1247-1258.
3. Угримов С. В. Обобщенная теория многослойных пластин, Вестник Харьк. гос. политехн. ун-та, 1998, № 21, 157-160.
4. Шупиков А. Н., Долгополова Н. В. Колебания многослойных цилиндрических панелей при импульсных воздействиях, Вестник Харьк. гос. политехн. ун-та, 1998, № 10, 104-111.
5. Пастернак П.Л. Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели, Москва, Госстройиздат, 1954.
6. Kerr A.D. Elastic and viscoelastic foundation models, J. of Applied mechanics. Transactions of the ASME, 1964, V. 31, Ser.E, № 3, 139-148.
7. Winkler E. Die lehre von elasticitaet und festigkeit, Prag: Dominicus, 1867.
8. Киселев В. А. Расчет пластин, Москва, Стройиздат, 1973

Поступила в редколлегию 14.09.2001

УДК 62.254

## **СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ТУРБОКОМПРЕССОРА С УЧЕТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ**

В.А. Жовдак, Л.М. Смирнова

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The static stress-and-strain state and free vibrations of cyclic symmetry structure with mistuning are investigated. The paper deals with the process mistuning modeling one variant on the 3D-model of the centrifugal turbocompressor first-stage wheel. Comparative results of tuned and mistuned system analysis are presented.

### **1 Постановка задачи**

Отклонение реальных рабочих колес от строгой симметрии может приводить к существенным изменениям в их напряженно-деформированном состоянии,