

## АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АМПЛИТУДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К.В.Аврамов

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The response surface is used to analyze the period doubling bifurcations under the condition of the two parameters change. The bifurcation analysis of piecewise-nonlinear system is fulfilled with the help of the response surface under the condition of the frequency and the amplitude of the excitation change. Different codimension two bifurcations were discovered in the piecewise-nonlinear system.

### 1 Введение и описание механической системы

В статье используются амплитудные поверхности для анализа бифуркаций удвоения периода в кусочно-нелинейной системе при изменении двух управляющих параметров. В механике бифуркации удвоения периода часто исследуются с помощью амплитудно-частотных характеристик (бифуркационных диаграмм) [1-4]. Амплитудная поверхность является трехмерным обобщением амплитудно-частотных характеристик. В статье предлагается численный метод для построения амплитудных поверхностей кусочно-нелинейных систем. Благодаря использованию этих поверхностей удалось обнаружить различные бифуркации коразмерности два в кусочно-нелинейной системе. Эти бифуркации образованы в результате соединения двух бифуркационных линий удвоения периода и в результате соединения бифуркационной линии удвоения периода и касательной бифуркационной линии.

Рассмотрим кусочно-нелинейную систему с одной степенью свободы, которая моделирует колебания материальной точки между двумя ограничениями. Реакции этих ограничений определяются нелинейной зависимостью  $R(\xi) = \xi + c\xi^n$ . Используя обычные безразмерные переменные [5,6], уравнение движения системы запишем в виде

$$w^2 \ddot{x} + 2aw\dot{x} + H(x) = f \sin(t); \quad (1)$$

$$H(x) = \begin{cases} x + c(x+1)^2; & x > -1; \\ -1; & -2l-1 < x < -1; \\ x + 2l + (-1)^{n+1} c(x+2l+1)^n; & x < -2l-1, \end{cases}$$

где  $\omega$  - частота возмущающего воздействия;  $\alpha$  - коэффициент вязкого сопротивления;  $2l$  - расстояние между ограничениями. Систему (1) можно записать относительно переменных состояния  $(y_1, y_2) = (\dot{x}, x)$ , которые будут использоваться в следующем разделе.

## 2 Метод амплитудных поверхностей

Амплитудные поверхности удобно использовать для геометрического представления бифуркаций удвоения периода предельных циклов при изменении двух управляющих параметров системы. Далее такими параметрами примем  $\omega$  и  $f$ , а амплитудную поверхность представим зависимостью полуразмахов периодических движений  $S$  от  $\omega$  и  $f$ . Поэтому амплитудную поверхность в пространстве  $(s, \omega, f) \in R^3$  представим функцией  $s = G(\omega, f)$ . Каждой точке амплитудной поверхности соответствует определенный предельный цикл.

Следуя [7], предельные циклы системы (1) разделим на группы согласно величинам их мультипликаторов  $(\rho_1, \rho_2)$  следующим образом: направленно неустойчивые циклы  $(\rho_1 > 1; 0 < \rho_2 < 1)$  обратно неустойчивые циклы  $(\rho_1 < -1; -1 < \rho_2 < 0)$  устойчивые циклы  $(|\rho_i| < 1; i = 1, 2)$ . Циклы одного вида преобразуются в другие циклы вследствие локальных бифуркаций. Отметим, что бифуркации удвоения периода определяются  $\rho_1 = -1$ , а касательные бифуркации, которые также наблюдаются в системе (1) имеют  $\rho_1 = 1$ . Определим геометрическое представление бифуркаций с точки зрения амплитудной поверхности. Амплитудные поверхности содержат бифуркационные линии удвоения периода. В результате этой бифуркации рождаются предельные циклы удвоенного периода, которые в свою очередь могут претерпевать другие бифуркации. Очевидно, что вдоль линий удвоения периода соединяются три вида циклов: устойчивые циклы порядка  $N$ ; обратно неустойчивые циклы того же порядка и устойчивые циклы порядка  $2N$ . Отметим, что устойчивость циклов  $2N$  около бифуркаций удвоения периода может быть другой [8]. Вдоль линий касательных бифуркаций устойчивые циклы порядка  $N$  соединяются с направленно неустойчивыми циклами того же порядка. Заметим, что бифуркационные линии соединяются в бифуркационных точках коразмерности два [8,9,10].

Теперь изложим алгоритм построения амплитудной поверхности. Во-первых, рассчитывается амплитудно-частотная характеристика ( бифуркационная диаграмма), по которой определяются бифуркационные точки. Во-вторых, зная бифуркационные точки, определяются бифуркационные линии на параметрической плоскости  $(\omega, f) \in R^2$ . Наконец, по данным об амплитудно-частотных характеристиках и бифуркационных линиях определяем амплитудную поверхность. Итак, для получения амплитудной поверхности используются два алгоритма: алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик и алгоритм построения бифуркационных линий на плоскости  $(\omega, f)$ . Для расчета амплитудно-частотных характеристик воспользуемся алгоритмом изложенным в [11,12]. Поэтому не будем останавливаться на этом алгоритме, а рассмотрим метод расчета бифуркационных линий для

системы (1). Решения уравнений (1) представим в виде  $y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, t); i = 1, 2$ , где  $y_{0i}$  - начальные состояния системы. Тогда циклы порядка  $N$  удовлетворяют нелинейным уравнениям:

$$y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, 2\pi N) - y_{0i} = 0; i = 1, 2. \quad (2)$$

Негиперболические циклы описываются уравнениями (2) и дополнительным уравнением:

$$w(\omega, f, y_{01}, y_{02}) = \det \left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} - E\rho \right] = 0, \quad (3)$$

где  $\left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right]$  - матрица Якоби;  $E$  - единичная матрица. Бифуркационную линию представим сеточной функцией  $(\omega_1, f_1)$ ,  $(\omega_2, f_2)$ ,  $(\omega_m, f_m)$ .

Каждая точка этой функции является решением системы уравнений (2,3). Поэтому для получения бифуркационной линии  $M$  раз решается система (2,3). Далее остановимся на численном решении этой системы. Эта система решается относительно одного из векторов  $V_1 = (\omega, y_{01}, y_{02})$  или  $V_2 = (f, y_{01}, y_{02})$ . Если вектором неизвестных является  $V_1(V_2)$ , то перед решением уравнений задается  $f(\omega)$ , соответственно. Переменная, которая задается называется параметризующей [12]. Выбор параметризующей переменной производится перед расчетом каждой точки бифуркационной линии по методу, изложенному в [12]. Для решения уравнений (2,3) воспользуемся методом Ньютона. Теперь рассмотрим метод расчета матрицы Якоби, использующейся в методе Ньютона. Для краткости записи введем обозначения:  $\pi_1 = \omega; \pi_2 = f$ , тогда матрицу Якоби запишем в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial(y_1 - y_{01}, y_2 - y_{02}, w)}{\partial(y_{01}, y_{02}, \pi_i)} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \\ Q \\ R \end{array} P \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - 1 & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} & \frac{\partial y_1}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - 1 & \frac{\partial y_2}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial w}{\partial y_{01}} & \frac{\partial w}{\partial y_{02}} & \frac{\partial w}{\partial \pi_i} \end{array} \right]. \quad (4)$$

Так как применение конечно-разностных формул для определения производных в (4) приводит к плохой сходимости метода Ньютона, воспользуемся следующим способом определения элементов матрицы Якоби.

Хорошо известно, что подматрица  $\left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right]$  является решением системы дифференциальных уравнений в вариациях:

уравнений (8). Функцию  $d^2H/dy_2^2$  представим в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix}_{t=0} = E;$$

$$[V(t)] = \begin{bmatrix} -2\alpha/\omega & -1/\omega^2 dH/dy_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Для определения подматрицы [P] составим две системы дифференциальных уравнений относительно векторов  $[\partial y_1/\partial \pi_i, \partial y_2/\partial \pi_i]$ ;  $i=1$  или  $2$ . Эти системы получаются дифференцированием (1) по  $\pi_i$ . Представим эти системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{\omega^2} y_1 + \frac{2H(y_2)}{\omega^3} - \frac{2f \sin(t)}{\omega^3} & \frac{\sin(t)}{\omega^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Решения уравнений (6) с нулевыми начальными условиями при  $t = 2\pi v$  являются элементами подматрицы [P] из (4).

Наконец, рассмотрим способ определения подматриц [Q] и [R], входящих в (4). Определим  $\partial W/\partial y_{0v}$ :

$$\frac{\partial W}{\partial y_{0v}} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - \rho \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - \rho & \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0v} \partial y_{02}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0v} \partial y_{02}} \end{bmatrix}; \quad v = 1, 2. \quad (7)$$

Формула для  $\partial W/\partial \pi_i$ ;  $i=1, 2$  имеет аналогичный вид. Теперь рассмотрим метод определения вторых производных, входящих в (7). Составим системы дифференциальных уравнений относительно векторов, состоящих из этих вторых производных. Эти системы дифференциальных уравнений получаются дифференцированием (5) по  $y_{0\mu}$  и  $\pi_i$ . В матричном виде эти системы имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} -\frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} - \frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} & 2\alpha \frac{\partial y_1}{\partial y_{0v}} + \frac{2}{\omega} \frac{dH}{dy_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} - \frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Уравнения (8) имеют нулевые начальные условия. Рассмотрим метод реше-

$$\frac{d^2 H}{dy_2^2} = \sigma(t) + q(y_2); \sigma(t) = \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\delta(t - \tau_j)}{|y_1(\tau_j)|} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{\delta(t - T_v)}{|y_1(T_v)|}, \quad (9)$$

где  $q(y_2)$  – нелинейная функция;  $\delta()$  – дельта-функция;  $\tau_j (j = \overline{1, p_1})$ ;  $T_v (v = \overline{1, p_2})$  – значения  $t$ , определяющиеся из нелинейных уравнений:

$$y_2(\tau_j) = -1; y_2(T_v) = -1 - 2\lambda. \quad (10)$$

Представим решения уравнений (8) в виде:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0\nu}} = u_{\mu\nu}^{(i)} + v_{\mu\nu}^{(i)}; \frac{\partial^2 y_i}{\partial f \partial y_{0\nu}} = w_{\nu}^{(i)} + p_{\nu}^{(i)}; \frac{\partial^2 y_i}{\partial \omega \partial y_{0\nu}} = r_{\nu}^{(i)} + s_{\nu}^{(i)}; \quad (11)$$

$$i = 1, 2; \mu = 1, 2; \nu = 1, 2.$$

Правые части соотношений (11) удовлетворяют матричным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} - \frac{\sigma(t)}{\omega^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{\partial y_2}{\partial f} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{\partial y_1}{\partial y_{0\nu}} & \frac{2}{\omega^3} \frac{dH}{dy_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Линейные дифференциальные уравнения (12) имеют полуаналитические решения благодаря дельта-функциям, входящим в эти уравнения. Запишем решения уравнений (12), используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу Остроградского-Лиувилля:

$$u_{\mu\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (14)$$

$$w_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial f} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (15)$$

$$r_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (16)$$

где

$$\Delta_i(z) = \frac{\exp\left(\frac{2\alpha z}{\omega}\right)}{\omega^2 |y_1(z)|} \left( \frac{\partial y_i}{\partial y_{01}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} \Big|_{t=z} - \frac{\partial y_i}{\partial y_{02}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} \Big|_{t=z} \right). \quad (17)$$

Формулы (4-17) позволяют численно определить матрицу Якоби. Потом

методом Ньютона находим решения системы (2,3) и бифуркационную линию в виде сеточной функции. В следующих двух разделах статьи, представим анализ бифуркационного поведения кусочно-линейной системы со следующими параметрами:  $c = 0$ ;  $\alpha = 0.005$ ;  $\lambda = 5$ , входящими в (1).

### **3 Бифуркационные точки коразмерности два**

Бифуркационные точки коразмерности два образуются в результате соединения бифуркационных линий [8]. Для лучшего понимания геометрии соединения линий в бифуркационных точках на рис.1 показаны участки амплитудных поверхностей около этих бифуркационных точек. Эти бифуркационные точки были получены в результате численного расчета предельных циклов порядка один и два системы (1). Как видно из рис.1 амплитудная поверхность представляет собой соединяющиеся листы. Листы амплитудной поверхности с направленно неустойчивыми циклами обозначаются буквой D, а листы с обратно неустойчивыми циклами буквой I. Листы с устойчивыми циклами не обозначаются.

Рассмотрим геометрические свойства амплитудной поверхности около бифуркационной точки коразмерности два  $L_1$ . Точка  $L_1$  наблюдается при  $f = f_{L1}$ . При  $f > f_{L1}$  существуют две бифуркационные линии  $pd1$  и  $pd2$ . Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику при  $f > f_{L1}$ . Она содержит две бифуркационные точки удвоения периода. В этих точках рождаются направленно неустойчивые циклы удвоенного периода. Лист таких циклов показан на рис. 1а. В бифуркационной точке коразмерности два  $L_1$  эти две бифуркационные точки соединяются. При  $f < f_{L1}$  существуют две несвязанные ветви амплитудно-частотной характеристики. Одна ветвь образована устойчивыми циклами порядка один, а вторая направленно неустойчивыми циклами порядка два. Бифуркационная точка коразмерности два  $L_2$  имеет аналогичные геометрические свойства. Если бифуркационные точки коразмерности два  $L_1$  и  $L_2$  образованы соединением бифуркационных линий удвоения периода, то в бифуркационной точке коразмерности два  $L_3$  соединяются бифуркационная линия удвоения периода предельных циклов порядка один  $pd5$  и седло-узловая бифуркационная линия  $sn1$  предельных циклов порядка два. Бифуркационная точка коразмерности два  $L_3$  наблюдается при  $f = f_{L3}$ . При  $f > f_{L3}$  наблюдается бифуркационная линия  $pd5$ , а при  $f < f_{L3}$  имеет место две бифуркационные линии  $pd6$  и  $sn1$ . Рассмотрим свойства предельных циклов, которые показаны на амплитудной поверхности. При  $f > f_{L3}$  в результате бифуркации удвоения периода рождается направленно неустойчивый цикл удвоенного периода, а при  $f < f_{L3}$  в результате бифуркации  $pd6$  рождается устойчивый цикл удвоенного периода. Итак, бифуркационная точка коразмерности два  $L_3$  изменяет устойчивость циклов рождающихся в результате бифуркаций удвоения периода.

#### 4 Субгармонические колебания второго порядка

В этом разделе статьи исследуются бифуркации предельных циклов с периодом в двое больше периода возмущающего воздействия. Эти предельные циклы рождаются вследствие бифуркаций удвоения периода циклов первого порядка. Рассмотрим бифуркационное поведение предельных циклов, которые представлены амплитудной поверхностью (рис.2). Амплитудная поверхность содержит четыре бифуркационные точки коразмерности два  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Бифуркационная точка  $C_1$  соответствует точке представленной на рис.1а. Точка  $C_2$  отвечает бифуркационной точке представленной на рис.1с. Следуя [9] область амплитудной поверхности около  $C_3$  назовем начальной областью.

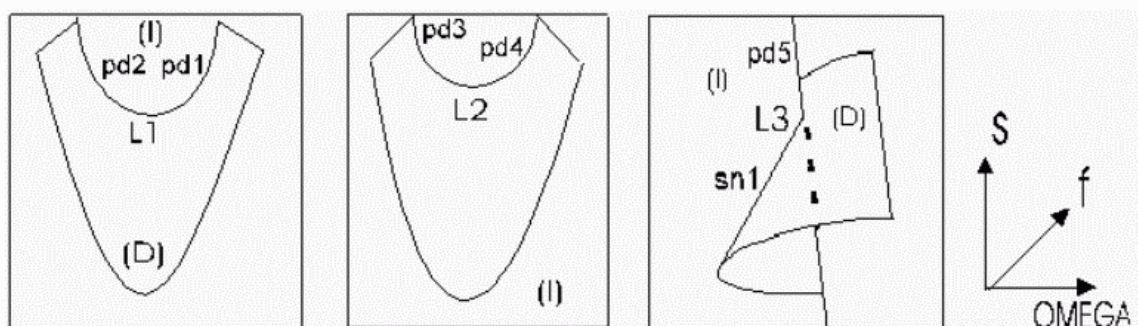


Рис.1. Бифуркационные точки коразмерности два.

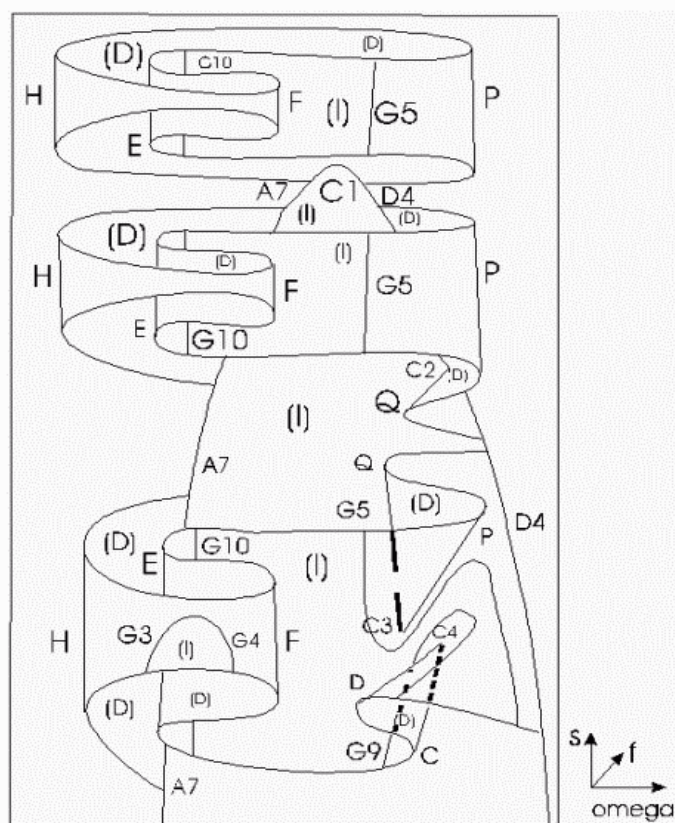


Рис.2. Амплитудная поверхность предельных циклов порядка два.

Эта область имеет лист направленно неустойчивых циклов, который ограничивается двумя седло-узловыми бифуркационными линиями P и Q. Точка  $C_3$  ранее была обнаружена в отображении. Бифуркационная точка коразмерности два  $C_4$  имеет такие же геометрические свойства как и  $C_3$ . Теперь рассмотрим поведение предельных циклов, представленное на амплитудной поверхности (рис.2). Благодаря бифуркационной линии удвоения периода  $A_7$  предельные циклы порядка один преобразуются в направленно неустойчивые циклы порядка два. Вдоль бифуркационной линии удвоения периода  $D_4$  на участке  $(C_1C_2)$  рождаются направленно неустойчивые циклы удвоенного периода, а на остальной части этой линии рождаются устойчивые предельные циклы. Остальное бифуркационное поведение предельных циклов порядка два можно проследить, используя амплитудную поверхность (рис.2).

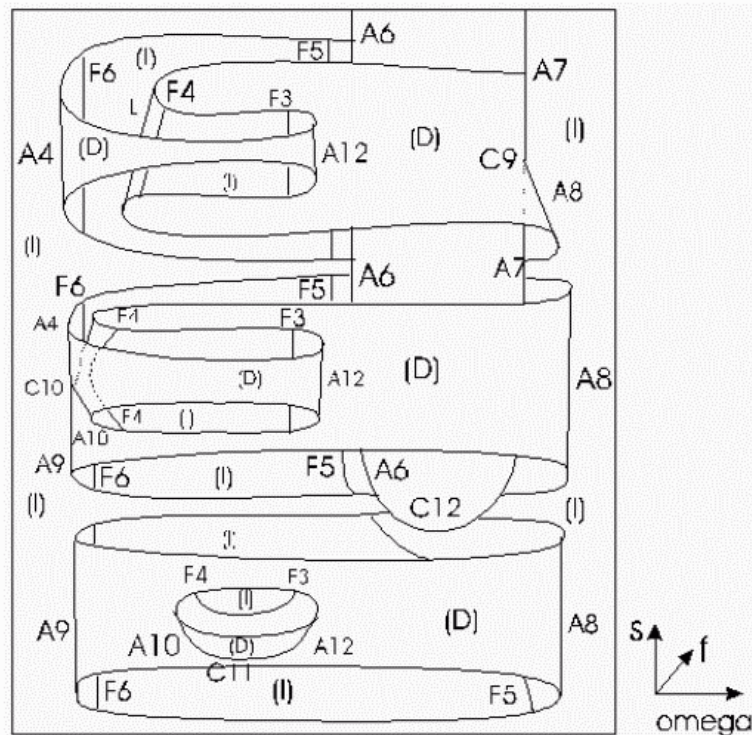


Рис.3. Амплитудная поверхность.

Теперь рассмотрим бифуркации предельных циклов, показанные на рис.3. Предельные циклы порядка два содержат четыре бифуркационные точки коразмерности два  $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ . Бифуркационная точка коразмерности два  $C_9$  аналогична бифуркационной точке, показанной на рис.1с. В бифуркационной точке коразмерности два  $C_{10}$  соединяются четыре касательные бифуркационные линии  $A_4, F_4, A_9, A_{10}$ . Отметим, что в бифуркационной точке коразмерности два  $C_{11}$  соединяются две бифуркационные линии  $A_{10}$  и  $A_{12}$ . Бифуркационная точка коразмерности два  $C_{12}$  рассматривалась в предыдущем разделе. Вдоль бифуркационной линии удвоения периода  $A_6$  рождаются устойчивые предельные циклы порядка два. На участке  $(C_{12}C_9)$  бифур-



кационной линии удвоения периода  $A_7$  рождаются устойчивые предельные циклы порядка два, а на остальном участке этой линии появляются направленно неустойчивые циклы порядка два. Поведение предельных циклов порядка два можно проследить используя амплитудную поверхность (рис.3).

## 5 Заключение

Таким образом в данной работе предложен метод анализа бифуркаций удвоения периода на основе амплитудных поверхностей. Последние позволяют геометрически представить бифуркации удвоения периода механических систем. Подробно рассмотрен алгоритм построения амплитудных поверхностей к анализу бифуркационного поведения на примере кусочно-нелинейной системы. Использование амплитудной поверхности позволило выявить различные бифуркации удвоения периода в кусочно-нелинейных системах.

## Литература

1. Аврамов К.В. ,Беломытцев А.С. ,Карабан В. Н.Области хаотических колебаний дискретных механических систем с кусочно- линейными упругими характеристиками. Прикладная механика т.30(5), 1994, С. 81-88.
2. Аврамов К.В. , Карабан В. Н. Резонанс при хаотических колебаниях дискретных динамических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Прикладная механика, т.33(7),1997,стр. 84-88.
3. Аврамов К.В. ,Карабан В. Н. Особенности развития вынужденных колебаний нелинейных силовых передач. Известия вузов. Машиностроение. - N 4-6, 1994, С. 3-8.
4. Гуляев В.И., Баженов Е.А., Гозуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных системах.-Львов: Вища школа, 1983. - 288 с.
5. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. - М: Наука, 1978, 352 с.
6. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator J. of Sound and Vibration. - 1983. - 1. p.129-155.
7. Kawakami H. Bifurcation of periodic response in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters. IEEE Transactions of Circuits and Systems. - 1984. - 3. - P. 212-227.
8. Guckenheimer J., Holmes P.J. Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Field- Springer-Verlag. - 1983.
9. Allam R., Mira C. "Crossroad area-dissymmetrical spring area- symmetrical spring area" and "double crossroad area-double spring area" transitions. Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1993-3. - P. 429-435.
10. Mira C., Kawakami H., Allam R. The dovetail bifurcation structure and its qualitative changes. Int. J. of Bifurcation and Chaos. - 1993. - 3. P. 903-919.
11. Беломытцев А.С. , Карабан В. Н. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности. Журнал вычисл. мат. и мат. физ. - 1986. - 26. - N 7. - с. 1099-1102.
12. Seydel R. Nonlinear computation. Int. J. of Bifurcation

УДК 539.3

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКОВ СИЛОВОГО КАРКАСА МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ**

Л.В.Автономова, В.Л.Хавин

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The stress-strain analysis of the disk of power flame magnetic system electro-physical plant was investigated by the finite element method with the object of receipt the nice calculation. The flagrant solution was considered for the whole disk and more accurate solution was considered for definition of concentration of stress in the region of the orifice under the sprig.

Одной из составных частей магнитной системы электрофизической установки является силовой каркас, воспринимающий действующие пондеромоторные нагрузки. Силовым каркасом установки является пространственная конструкция, состоящая из двух стальных дисков, соединенных между собой по периферии шестнадцатью наклонными силовыми талрепами. Расчет НДС такой конструкции представляет собой сложную пространственную задачу. В связи с этим целесообразно разбить задачу на две независимые: определение НДС от сил, действующих в плоскости дисков силового каркаса, и от сил, действующих перпендикулярно их плоскости.

Диски силового каркаса (рис. 1) представляют собой стальные плиты с периодически радиально расположенными отверстиями. По внешнему контуру плита жестко оперта в восьми точках, так как перемещения, обусловленные податливостью талрепов, на НДС плиты практически не влияют, то это позволяет при нахождении решения исключить перемещения плиты как абсолютно жесткого тела.

Диски воспринимают радиальные силы от блоков обмотки тороидального поля. На каждый диск действуют тридцать две опорные реакции, распределенные по периметру соответственно тридцати двух отверстий под штифты, расположенных симметрично относительно оси диска. При расчете напряженно-деформированного состояния силового диска вводится допущение, что модель имеет постоянную толщину, что позволяет решать плоскую задачу теории упругости.