

Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешико Е.В., Ткачук Н.А. Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // Механіка та машинобудування. – 2003. – № 1, т. 2. – С. 3–8. 4. Радченко В.А., Корж Н.А. Практикум по стабилизации грудного и поясничного отделов позвоночника. – Харьков: Прапор, 2004. – 160 с. 5. Костная и металлическая фиксация позвоночника при заболеваниях, травмах и их последствиях / Под ред. Г.Д.Никитин, Н.В.Корнилов, К.Н.Коваленко и др. – С.-П.: Русская графика, 1998. – 442 с. 6. V. Radchenko, Z. Zyman, V. Filippenko, V. Glushko, V. Mezentsev Nonstoichiometric hydroxapatite granules for orthopaedic applications // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2003. – № 1. – С.101-107.

Поступила до редколегії 25.04.2005

УДК 539.3

Н.В.ШИРЯЕВА; К.В.АВРАМОВ, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

Стаття присвячена дослідженню геометрично нелінійних повздожньо-ізгибних коливань стержнів, що обертаються. Стержень моделюється із застосуванням гіпотез Ейлера-Бернулї. Коливання стержня подаються у вигляді ряду по власним формам лінійних коливань нерухомого стержню. У роботі були виведені звичайні диференційні рівняння нелінійних коливань.

Nonlinear axial-bending vibrations of rotating beams are investigated here. Euler-Bernuly hypothesis are used for modeling of a beam. Beam's vibrations are represented in the form of line of natural frequencies nonrotating beam. Ordinary differential equations of nonlinear vibrations are obtained here.

1. Введение

Как показывают экспериментальные исследования лопаток турбомашин и лопастей вертолетов, в таких конструкциях часто наблюдаются геометрически нелинейные колебания с амплитудами, соизмеримыми с толщинами стержней [1]. Линейные колебания закрученных стержней с учетом несовпадения центра тяжести поперечного сечения и центра упругости исследуются в монографии [2]. Одной из первых геометрически нелинейная модель гибких стержней была получена В.А.Светлицким [3]. Колебания вращающихся стержней рассмотрены В.И.Гуляевым [4]. В работе [5] рассмотрены нелинейные колебания балки, нагруженной периодической силой, в условиях комбинированного резонанса. Параметрические колебания стержня с тремя положениями статического равновесия асимптотическими методами исследуются в [6].

В этой статье исследуются геометрически нелинейные продольно-изгибные колебания вращающихся стержней. Колебания стержня представляются в виде ряда по собственным формам линейных колебаний невращающегося стержня. В статье получены обыкновенные дифференциальные уравнения нелинейных колебаний.

2. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассматриваемая механическая система представлена на рис. 1. Стержень моделируется с использованием гипотез Эйлера-Бернулли. В модели стержня не учитывается инерция вращения поперечных сечений. Предполагается, что собственные частоты крутильных колебаний существенно выше изгибных, поэтому в модели стержня учтены только изгибные и продольные движения. Потенциальную энергию U и кинетическую энергию T стержня представим так:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + m\Omega^2 (h + x + u)^2 dx, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(w_{,xx})^2 + EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)^2 dx, \quad (2)$$

где $u(x,t)$ и $w(x,t)$ – продольное и поперечное смещения, $(\cdot)_{,x}$ – производная по x , \dot{u} , \dot{w} – производные по времени, h – радиус куба, Ω – постоянная угловая скорость балки, m – масса на единицу длины, и E , A , I и L – модуль упругости первого рода, площадь поперечного сечения, момент инерции и длина, соответственно.

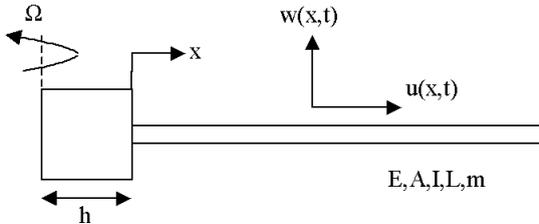


Рисунок 1 – Вращающийся гибкий стержень

Используя принцип Гамильтона, получим уравнения движения в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -m\ddot{w}\delta w - EIw_{,xxx}\delta w_{,xx} - EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)w_{,x}\delta w_{,x} \right\} + \left[-m\ddot{u}\delta u + m\Omega^2(h+x+u)\delta u - EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)\delta u_{,x} \right] dxdt = 0, \quad (3)$$

где $\delta(\cdot)$ – изохронная вариация. Соотношение (3) представим в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ [-m\ddot{w} - EIw_{,xxx}]\delta w - \left[EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)w_{,x} \right]\delta w_{,x} + [-m\ddot{u} + m\Omega^2(h+x+u) + EAu_{,xx}]\delta u - \left[EA\left(\frac{1}{2}(w_{,x})^2\right) \right]\delta u_{,x} \right\} dxdt = 0, \quad (4)$$

Используя формы линейных продольных и изгибных колебаний для вращающегося линейного стержня, колебания стержня представим так:

$$u = \sum_{i=1}^{N_u} q_i(t) \theta_i(x); \quad (5)$$

$$w = \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_u+j}(t) \Psi_j(x). \quad (6)$$

В дальнейших расчетах нами принимается $N_u = 2$; $N_w = 2$. Формы собственных линейных продольных и изгибных колебаний выбираются так:

$$\theta_i(x) = \sin \frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{l}; \quad \Psi_i(x) = K_2(\lambda_i) \cdot K_3\left(\lambda_i \frac{x}{l}\right) - K_1(\lambda_i) \cdot K_4\left(\lambda_i \frac{x}{l}\right);$$

$$\lambda_k = \frac{2k-1}{2} \cdot \pi; \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2).$$

где $K_1(\lambda_k), K_2(\lambda_k), K_3\left(\lambda_k \frac{x}{l}\right), K_4\left(\lambda_k \frac{x}{l}\right)$ – функции Крылова [7]. Далее, подставим (5) и (6) в (4) и получим:

$$\int_0^L \int_0^L \left\{ [-m\ddot{w} - EI w_{,xxxx}] \cdot [\Psi_1 \delta q_3(t) + \Psi_2 \delta q_4(t)] - \right.$$

$$\left. - \left[EA \left(u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) w_{,x} \right] \cdot [\Psi_{1,x} \delta q_3(t) + \Psi_{2,x} \delta q_4(t)] + \right.$$

$$\left. + [-m\ddot{u} + m\Omega^2(h+x+u) + EA u_{,xx}] \cdot [\theta_1 \delta q_1(t) + \theta_2 \delta q_2(t)] - \right.$$

$$\left. - \left[EA \left(\frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) \right] \cdot [\theta_{1,x} \delta q_1(t) + \theta_{2,x} \delta q_2(t)] \right\} dx dt = 0, \quad (7)$$

Систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания стержня, в общем виде представим так:

$$M \cdot \ddot{q} + C \cdot q + F(q) = 0, \quad (8)$$

где M – матрица масс системы; C – матрица жесткости; $F(q)$ – нелинейная функция, выражающая геометрически нелинейные свойства стержня.

3. Анализ линейных колебаний.

В линейном приближении продольные и изгибные колебаний не связаны, так как центр тяжести поперечного сечения стержня совпадает с центром жесткости. Получим аналитическую формулу для определения продольных частот системы. Для этого представим $u(x,t)$ в виде статической и динамической составляющей:

$$u(x,t) = u_s(x) + u_d(x,t), \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), и, пренебрегая нелинейными слагаемыми, получим линейное дифференциальное уравнение для вращающегося стерж-

ня в виде:

$$m\ddot{u}_d - m\Omega^2 u_d - EAu_{d,xx} = 0$$

Тогда собственная частота линейных колебаний определяется так :

$$\omega = EA \frac{\pi^2}{xl^2} - \Omega^2. \quad (10)$$

Рассмотрим вращающийся гибкий стержень со следующими параметрами: $L = 9$ м; $EI = 3,99 \cdot 10^5$ Н · м²; $EA = 2,23 \cdot 10^8$ Н; $\Omega = 30$ рад/с, $h = 0,5$ м. Матрица масс и жесткости имеют вид:

$$M = \begin{pmatrix} 44.98 & 0.456 & 0 & 0 \\ 0.456 & 44.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96.29 & 0.092 \\ 0 & 0 & 0.092 & 16183.78 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.305 - 44.98 \cdot \Omega^2 & 278801.72 - 0.46 \cdot \Omega^2 & 0 & 0 \\ 30977.97 - 0.47 \cdot \Omega^2 & 0.24 \cdot 10^9 - 44.98 \cdot \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7237.71 & 272.37 \\ 0 & 0 & 6.93 & 0.48 \cdot 10^8 \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты колебаний для различных значений Ω представлены в таблице. На рис. 2 представлены зависимости собственных частот от угловой скорости вращения стержня.

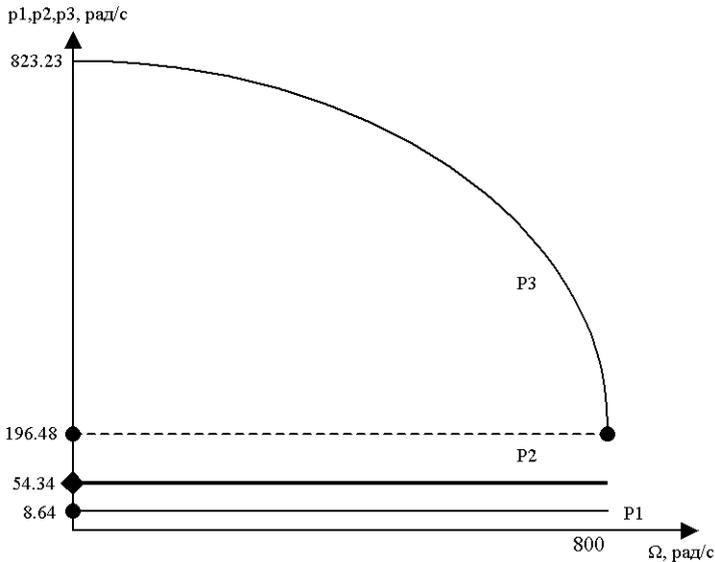


Рисунок 2 – Собственные частоты системы p_i , ($i = 1, \dots, 3$)

Собственные частоты системы

	p_1	p_2	p_3	p_4
$\Omega=30$ рад/с	8,64	54,34	823,23	2471,28
$\Omega=100$ рад/с	8,64	54,34	817,68	2469,43
$\Omega=200$ рад/с	8,64	54,34	799,13	2463,35
$\Omega=400$ рад/с	8,64	54,34	720,14	2438,87
$\Omega=800$ рад/с	8,64	54,34	196,49	2338,4

4. Выводы

В работе получены обыкновенные дифференциальные уравнения нелинейных колебаний вращающихся стержней. Эти уравнения могут использоваться для анализа нелинейных колебаний лопастей вертолетов и лопаток турбомашин. Отметим, что собственные частоты изгибных колебаний не зависят от частоты вращения стержня, а собственные частоты продольных колебаний зависят от этой величины.

Список литературы: 1. *Ю.М.Темис, В.В.Карабан* Геометрически нелинейная конечноэлементная модель закрученного стержня в задачах статических и динамических расчетов лопаток. 2. *Ю.С.Воробьев, Б.Ф.Шорр* Теория закрученных стержней. – К., «Наукова думка», 1983. 3. *В.А.Светлицкий* Механика гибких стержней и нитей. – М., Машиностроение, 1978. 4. *В.И.Гуляев, В.В.Гайдайчук, В.Л.Кошкин* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – К., «Наукова думка», 1992. 5. *Avramov K.V.* Non-linear beam oscillations excited by lateral force at combination resonance // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – 257(2). – P. 337-359. 6. *Avramov K.V.* Bifurcations of parametric oscillations of beams with three equilibrium // Acta Mechanica. – 2003. – V. 164. – P. 115-138. 7. *В.Л.Бидерман* Прикладная теория механических колебаний. – М., «Высшая школа», 1972.

Поступила в редколлегию 16.03.2005

УДК 539.5

В.Н.КОНКИН, канд.техн.наук; **В.И.ЛАВИНСКИЙ**, докт.техн.наук;
НТУ «ХПИ»

ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ И ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Представлені результати дослідження граничних станів і втрати стійкості прямолінійної форми стрижня і плоскої форми круглї пластинки з урахуванням температурної залежності модуля пружності матеріалів елементів.

The research results of maximum fortunes and steadiness loss of rectilinear bar form and flat form of round plate with calculation of temperature elements materials resiliency module dependence are represented.