

УДК 539.3

**В.А.САЛО**, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ОРТОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних сферичних оболонок з отворами. Використовуваний RVR-метод заснований на варіаційному принципі Рейсснера, методу И.Н.Векуа, теорії R-функцій, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності й алгоритму двосторонньої оцінки точності наближених рішень змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на прикладах.

The approach is suggested to definition of the stress-strained state of elastic spherical shells with holes. The used RVR-method is based on Reissner's variational principle, I.N.Vekua's method, R-functions theory, the common equations of the three-dimensional theory of an elasticity and algorithm for two-sided estimation of exactitude of approached solutions of the mixed variational problems. Efficiency of the method is shown on examples.

**Постановка проблемы.** Решения пространственных задач теории упругости сопряжены со значительными вычислительными трудностями. В этой связи актуальна потребность в создании универсальных и алгоритмически простых для численной реализации методов расчета нетонких оболочек.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Многообразие существующих в литературе вариантов уточненных теорий оболочек создает затруднения в выборе и практическом применении конкретной теории. Обзор этих вариантов дан в работе [1], в которой предложен эффективный RVR-метод решения краевых задач определения напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны.

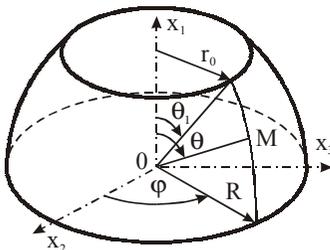


Рисунок 1

**Цель и постановка задачи.** В настоящей работе предлагается использование разработанного в монографии [1] RVR-метода для решения пространственных задач о напряженно-деформированном состоянии ортотропной сферической оболочки под действием статической нагрузки.

Введем в срединной поверхности  $\Omega_s$  радиуса  $R$  сферической оболочки толщины  $h$  (рис. 1) систему координат  $\{\theta, \phi, z\}$ , где координатная линия  $z$  перпендикулярна  $\Omega_s$ . Поверхность оболочки состоит из боковых

поверхностей  $\Gamma_s$  ( $\theta = \theta_s$ ) отверстий и лицевых  $\Gamma^\pm$  ( $z = \pm h/2$ ) поверхностей, уравнения которых определяются функциями  $\omega_s$  и  $\omega_\pm$ .

Для исследуемой оболочки вариационное уравнение Рейсснера в системе координат  $\{\theta, \varphi, z\}$  представим в виде (при отсутствии объемных сил):

$$\iiint_{\Omega} \left\{ - \left[ \frac{1}{R\chi} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \operatorname{ctg} \theta + \sigma_{13} \right] + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{13}}{\partial z} \right] \delta u_1 - \right. \\ - \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varphi} + 2\sigma_{12} \operatorname{ctg} \theta + \sigma_{23} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{23}}{\partial z} \right] \delta u_2 - \\ - \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \varphi} + \sigma_{13} \operatorname{ctg} \theta - \sigma_{11} - \sigma_{22} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{33}}{\partial z} \right] \delta u_3 + \\ + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_3 \right) - \frac{1}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{11} + \\ + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + u_1 \operatorname{ctg} \theta + u_3 \right) - \frac{1}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{22} + \\ + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{22} \right] \delta \sigma_{33} + \\ + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - u_2 \operatorname{ctg} \theta \right) - \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12} \right] \delta \sigma_{12} + \\ + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_1 \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13} \right] \delta \sigma_{13} + \\ + \left. \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - u_2 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23} \right] \delta \sigma_{23} \right\} R^2 \chi^2 \sin \theta d\theta d\varphi dz = 0. \quad (1)$$

Поверхностные интегралы в уравнении (1) отсутствуют в виду использования в предложенном RVR-методе структур решений, точно удовлетворяющих всем краевым условиям исследуемых задач. Искомые компоненты перемещений  $u_i$  и напряжений  $\sigma_{ij}$  представим рядами (при  $\zeta = 2z/h$ ):

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i^* + \sum_{k=0}^{l_i-1} u_i^k(a_i^{n_i}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta) \quad (i = \overline{1, 3}); \\ \chi \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^* + \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \sigma_{ij}^k(a_{ij}^{n_{ij}}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta) \quad (i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}); \\ \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sigma_{33}^k(a_{33}^{n_{33}}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассмотрим сферическую оболочку с двумя полюсными круговыми отверстиями радиуса  $r_0$ . Обозначим  $\theta = [(\theta_2 - \theta_1) \vartheta + \theta_1 + \theta_2] / 2$  при  $|\vartheta| \leq 1$ . С введением безразмерной координаты  $\vartheta$  функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , определяющие

уравнения поверхностей  $\Gamma_s$  ( $s = 1, 2$ ) в случае равных отверстий можно заменить (при переносе начала координат в сечение  $\theta = \pi/2$ ) одной функцией  $\omega_\vartheta = 1 - \vartheta^2$ . Структуры решений (2) в этом случае приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= u_1^* + \sum_{k=0}^{l_1-1} (1 - b_{1k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_1} \sum_{r=0}^{l_1} a_1^{n_1} C_1(p, \vartheta) S_1(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 u_2 &= u_2^* + \sum_{k=0}^{l_2-1} (1 - b_{2k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_2} \sum_{r=0}^{l_2} a_2^{n_2} C_2(p, \vartheta) S_2(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 u_3 &= u_3^* + \sum_{k=0}^{l_3-1} (1 - b_{3k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_3} \sum_{r=0}^{l_3} a_3^{n_3} C_3(p, \vartheta) S_3(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{11} &= \sigma_{11}^* + \sum_{k=0}^{l_{11}-1} [1 - (1 - b_{1k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{11}} \sum_{r=0}^{l_{11}} a_{11}^{n_{11}} C_{11}(p, \vartheta) S_{11}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{22} &= \sigma_{22}^* + \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} \sum_{r=0}^{l_{22}} a_{22}^{n_{22}} C_{22}(p, \vartheta) S_{22}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{12} &= \sigma_{12}^* + \sum_{k=0}^{l_{12}-1} [1 - (1 - b_{2k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{12}} \sum_{r=0}^{l_{12}} a_{12}^{n_{12}} C_{12}(p, \vartheta) S_{12}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{13} &= \sigma_{13}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{13}-1} [1 - (1 - b_{3k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{13}} \sum_{r=0}^{l_{13}} a_{13}^{n_{13}} C_{13}(p, \vartheta) S_{13}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{23} &= \sigma_{23}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{23}-1} \sum_{p=0}^{m_{23}} \sum_{r=0}^{l_{23}} a_{23}^{n_{23}} C_{23}(p, \vartheta) S_{23}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} \sum_{r=0}^{l_{33}} a_{33}^{n_{33}} C_{33}(p, \vartheta) S_{33}(r, \varphi) P_k(\zeta),
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $a_i^{n_i}$ ,  $a_{ij}^{n_{ij}}$  – искомые постоянные;  $C_i$ ,  $C_{ij}$ ,  $S_i$ ,  $S_{ij}$  – аппроксимирующие функции;  $P_k(\zeta)$  – полиномы Лежандра;  $\chi = 1 + h \zeta / 2R$ ;  $\omega_\zeta = 1 - \zeta^2$ .

Функции  $u_i^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$  в общем случае находятся по формуле “склейки” теории R-функций [2]. Постоянные  $b_{ik}$  необходимы, чтобы в каждой записи граничных условий на  $\Gamma_s$  не встречались взаимно соответственные величины из искомых перемещений и напряжений.

Рассмотрим нагруженный постоянным внутренним давлением  $q_0$  ортотропный сферический пояс с геометрическими и физическими параметрами (при разных значениях соотношения  $E_2/E_1$ ):  $R = 0,6$  м;  $\theta_1 = \pi/4$ ;  $\theta_2 = 3\pi/4$ ;  $q_0 = 1$  МПа;  $E_1 = E_3 = 20E_0$ ;  $G_{13} = E_0$ ;  $\nu_{ij} = 0,3$ ;  $E_0 = 1$  ГПа.

В силу осесимметричного нагружения оболочки и симметричного расположения круговых отверстий

$$u_2 = 0; \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{23} = 0, \quad (4)$$

поэтому аналитические выражения вариационного уравнения и структур

решений для перемещений  $u_i$  и напряжений  $\sigma_{ij}$  значительно упрощаются.

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки:

$$\Gamma^+ : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0, \quad \Gamma^- : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = -q_0. \quad (5)$$

Будем считать, что отверстия закрыты крышками такой конструкции, которая передает на оболочку только действие перерезывающей силы  $Q_\theta^* = -q_0 r_0/2$ , определяемой из условия равновесия крышки.

Граничные условия на поверхностях отверстий:

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^*/\chi \Rightarrow \{b_{1k} = 0, b_{3k} = 0\}. \quad (6)$$

Функции  $\sigma_{13}^*$  и  $\sigma_{33}^*$  с учетом изменения метрики по толщине оболочки:

$$\sigma_{13}^* = -\frac{3Q_\theta^*}{2h}(1-\zeta^2)\vartheta; \quad \sigma_{33}^* = -\frac{1}{2}(1-h/2R)^2(1-\zeta)q_0. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться в том, что на боковых поверхностях  $\Gamma_s$  отверстий ( $\vartheta = \pm 1$ ) поперечное касательное напряжение  $\sigma_{13} = \sigma_{13}^*/\chi$ , заданное законом (7), статически эквивалентно приложенной в срединной поверхности интегральной характеристике – перерезывающей силе  $Q_\theta^*$ .

**Численная реализация задач.** На рис. 2 в зависимости от анизотропии материала нетонкой ( $h/R = 0,2$ ) оболочки показаны вдоль безразмерной координаты  $r_\theta = [r_0 + (\theta - \theta_1)R]/r_0$  по меридиану оболочки графики распределения коэффициентов концентрации меридианных  $k_\theta^- = 2h\sigma_{11}^-/q_0R$  (при  $\zeta = -1$ ) и окружных  $k_\varphi^+ = 2h\sigma_{22}^+/q_0R$  (при  $\zeta = 1$ ) напряжений. Цифры 1,2,3,4, 5 возле построенных графиков рис. 2 соответствуют значениям соотношения  $E_2/E_1 = 4; 2; 1; 0,5; 0,25$ , а штриховой линией показан график для трансверсально-изотропной ( $E_2/E_1 = 1$ ) оболочки.

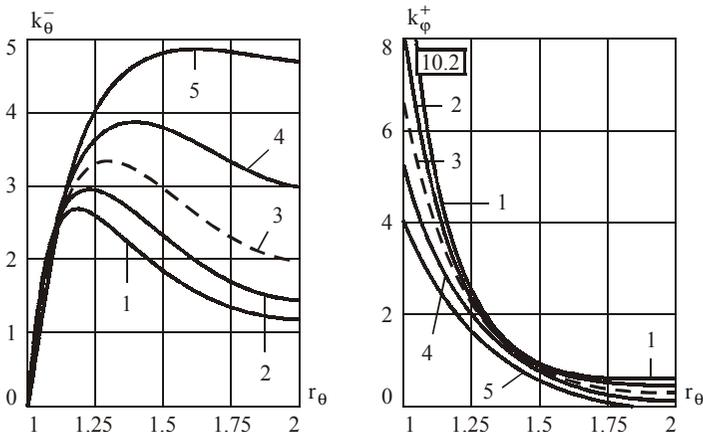


Рисунок 2 – Графики коэффициентов концентрации напряжений  $k_\theta^-$  и  $k_\varphi^+$

В численной реализации исследуемой краевой задачи использована сдвиговая модель  $l_i = l_{ij} = 5$  (при  $m_i = m_{ij} = 15$ ) уточненной теории оболочек пятого приближения. Как следует из рис. 2, увеличение жесткости  $E_2/E_1$  в интервале  $[0,25 \div 4]$  приводит в рассмотренных примерах к существенному изменению величин определяемых напряжений.

**Выводы.** Полученные результаты подтверждают возможность эффективного использования предложенного в монографии [1] RVR-метода при исследовании напряженно-деформированного ортотропных сферических оболочек с отверстиями. Средством проверки достоверности полученных результатов может стать программно реализуемый алгоритм [3] интегральной двойственной оценки численных решений, позволяющий автоматизировать поиск такого количества аппроксимаций, при котором процесс сходимости приближенных решений для независимо варьируемых искомым перемещений и напряжений приобретает устойчивый характер.

**Список литературы:** 1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Київ: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. Сало В.А. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейсснера // Доповіді НАН України. – К., 2003. – №. 1. – С. 53–57.

*Поступила в редколлегию 29.03.04*

УДК 539.3

**Э.А.СИМСОН**, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;  
**Ю.П.АНАЦКИЙ**, НТУ «ХПИ»

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРОЧНОСТНЫМ И ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ**

В статті пропонуються методи оптимізації складних скінченноелементних моделей з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на великі розмірності векторів перемінних стану і проектування, мінімальну кількість звертань до процедури прямого розрахунку. Досліджено обчислювальні етапи. Розглянуто застосування розробленого математичного апарату.

Structural optimization methods of high both geometric and physical informational content are suggested for complicated FEA models, especially with design variables vector of high dimension, to minimize numbers of straight calculation procedure activation. Computational stages are investigated. The developed mathematical apparatus application are examined.

Создание систем автоматизированного оптимального проектирования машиностроительных конструкций способствует не только сокращению сроков, но и повышению качества проектирования [1,2]. Разработка систем связана с применением теории и численных методов оптимизации для реальных задач проектирова-