

$$t_1 = t_0 - \zeta_x (t_0 - \vartheta_0) = t_0 (1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0, \quad (17)$$

где  $\zeta_x = \frac{c_{pb} G_B}{c_{pr} G_r} m z_x$ .

Соответственно

$$t_2 = t_1 (1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0 = t_0 (1 - \zeta_x)^2 + \zeta_x (1 - \zeta_x) \vartheta_0 + \zeta_x \vartheta_0$$

$$t_k = t_{k-1} (1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0 = t_0 (1 - \zeta_x)^k + \zeta_x (1 - \zeta_x)^{k-1} \vartheta_0 + \zeta_x (1 - \zeta_x)^{k-2} \vartheta_0 + \zeta_x (1 - \zeta_x) \vartheta_0 + \zeta_x \vartheta_0$$

Это выражение можно переписать так

$$t_k = t_0 (1 - \zeta_x)^k + \zeta_x \vartheta_0 [1 + (1 - \zeta_x) + (1 - \zeta_x)^2 + \dots + (1 - \zeta_x)^{k-1}]$$

или, используя выражение для суммы геометрической прогрессии

$$t_k = (t_0 - \vartheta_0) (1 - \zeta_x)^k + \vartheta_0. \quad (18)$$

Формула (18) определяет значение температуры газа за  $k$ -тым рядом трубок. По уравнению (13) находим температуру трубки  $k$ -го ряда и соответственно температуру расширения трубок этого ряда.

**Список литературы:** 1. Шнеэ Я.И., Капинос В.М., Котляр И.В. Газовые турбины, ч. 1. – Киев: Вища школа, 1976. – 195 с.

*Поступила в редакцию 10.03.04*

УДК 531; 534:57

**Б.Я.КАНТОР**, докт.техн.наук, ИПМаш НАН Украины;  
**Н.И.ЯБЛУЧАНСКИЙ**, докт.мед.наук, ХНУ; **Е.Ю.МИСЮРА**, ХНУ

### **ИССЛЕДОВАНИЕ НДС ТОЛСТОСТЕННОЙ ГИПЕРУПРУГОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТНОСИТЕЛЬНО ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ (МОДЕЛЬ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА)**

Поставлена геометрично та фізично нелінійна статична осесиметрична задача для дослідження напружено-деформованого стану гіперпружкого товстостінного еліпсоїда, до внутрішньої поверхні якого прикладено тиск (модель лівого шлуночка серця у діастолі). Модель містить в собі два відносно жорстких включення (основа серця та зона інфаркту). Задача вирішена за допомогою побудованого варіаційного принципу можливих переміщень у просторах, який використовується у кроковому алгоритмі метода скінчених елементів. Вивчені вплив виду та розмірів зони інфаркту на інтенсивність напруг, а також залежність кінцево-діастолічного об'єму лівого шлуночка від об'єму зони інфаркту. Установлено, що максимальні значення інтенсивності напруг виникають при ендокардіальному включенні та збільшуються при зростанні кута розхилу зони інфаркту; збільшення кута розхилу зони інфаркту зменшує кінцево-діастолічний об'єм, найменший об'єм – при ендокардіальному включенні.

The geometrically and physically nonlinear static axisymmetric problem for the investigation of the stress-

strain state of the hyper-elastic thick-wall ellipsoid loaded by the internal pressure (the model of a left ventricle heart in the diastole) was formulated. The model comprises two relatively hard inclusions (the base of the heart and the infarction zone). The problem was solved by developing the variational principle of possible displacements in the increments, which was used in the step-by-step algorithm of the finite element method. Influence of the kind and dimensions of the infarction zone on the stress intensity and also dependence of the end-diastolic volume of the left ventricle on the infarction zone volume was studied. It was determined that the maximum values of the stress intensity arises by the endocardial inclusion and increases with the angle of the infarction zone; increase of the angle of the infarction zone decreases the end-diastolic volume, the minimum volume arises by the endocardial inclusion.

**Введение.** В современной научной литературе актуальна проблема моделирования жизненно важной системы человеческого организма – сердечно-сосудистой. Изучение и исследование различных заболеваний сердца и его сосудов, с точки зрения механики деформируемого твердого тела, является одним из сравнительно новых направлений. В этом направлении ведутся теоретические и экспериментальные работы. С развитием компьютерной техники теоретические работы значительно приумножились. Особый интерес представляют исследования левого желудочка (ЛЖ) сердца, с патологией которого в основном связаны сердечно-сосудистые заболевания.

Особый интерес представляет изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) стенок ЛЖ и его функций, представляющих собой результат явлений, которые происходят в материале миокарда (мышце сердца), и определяющих его насосную функцию как органа. Особенно важно исследование НДС ЛЖ при инфаркте миокарда (ИМ). Именно это заболевание в последнее время возникает очень часто. Возможны следующие четыре вида ИМ, отличающиеся степенью проникновения его по толщине стенки ЛЖ: заболевания: эндокардиальный – пораженная зона (ПЗ) расположена около внутренней поверхности стенки ЛЖ, интрамуральный – находится внутри стенки, эпикардиальный – локализуется около внешней поверхности, трансмуральный – пронизывает всю толщину стенки. ИМ рассматривают в разных фазах сердечного цикла: в диастоле (пассивной фазе) или систоле (активной фазе); при различных стадиях заболевания: хронической (ПЗ рубцуется и приобретает жесткость большую, чем здоровая мышечная ткань) или острой (ПЗ не активна, но ее механические свойства такие же, как у здоровой ткани).

Настоящая статья посвящена численному анализу НДС ЛЖ сердца при хронической стадии ИМ в диастоле. Исследованиями в этой области занимаются как украинские, так и зарубежные ученые. Среди первых работ, описывающих математическую модель ЛЖ и закономерности распределения напряжений при ИМ, можно назвать монографию Кантора Б.Я. (докт.техн.наук), Яблучанского Н.И. (докт.мед.наук), Шляховеца В.Н. (докт.мед.наук) [1]. Авторами созданы математические модели, качественно воспроизводящие реальную биомеханику ЛЖ в физиологических условиях и патологических состояниях, а также сформулирована осесимметричная задача для модели ЛЖ, представленной усеченным толстостенным эллипсоидом (хроническая стадия, диастола, четыре вида ИМ). Задача решена в линейной постановке с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Изучены НДС и концентрация напряжений в стенке ЛЖ. В работе [2] аналогич-

ные исследования проведены для сферической модели ЛЖ. В работе [3] поставлена и решена физически и геометрически нелинейная задача с помощью построенного вариационного принципа возможных перемещений в приращениях, используемого в шаговом алгоритме МКЭ. Выведены формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора правой части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Численно исследованы НДС ЛЖ сердца, интенсивность деформаций и напряжений, распределение перемещений и конечно-диастолический объем (КДО) ЛЖ.

Краткий обзор работ зарубежных авторов [4-8] приведен в статье [2]. В перечисленных работах рассматривался лишь трансмуральный ИМ.

Цель данной работы состоит в построении математической модели и численном исследовании осесимметричной физически и геометрически нелинейной задачи о влиянии относительно жестких включений в толстостенной эллипсоидальной модели ЛЖ сердца, первое из которых моделирует основание сердца, а второе – зону ИМ.

**Постановка задачи.** Построение модели ЛЖ сердца:

- 1) стенку ЛЖ аппроксимируем толстостенной эллипсоидальной оболочкой;
- 2) в стенке располагаем два относительно жестких включения: первое – основание сердца, второе – зона ИМ;
- 3) решаем геометрически и физически нелинейную осесимметричную задачу в цилиндрической системе координат;
- 4) материал стенки считаем кусочно-однородным, изотропным, почти несжимаемым, гиперупругим;
- 5) решаем квазистатическую задачу, так как силами инерции можно пренебречь по сравнению с упругими силами;
- 6) рассматриваем хроническую стадию ИМ в диастоле (к внутренней поверхности стенки ЛЖ прикладываем конечно-диастолическое давление).

**Основные соотношения.** Введем компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат

$$[\mathbf{u}] = [u_r, u_z, u_\varphi]^T. \quad (1)$$

Здесь  $u_r, u_z, u_\varphi$  являются функциями от  $r, z$ .

Компоненты тензора деформаций в точке  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$  в геометрически нелинейном случае находятся по следующей формуле:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2}(\bar{u}_{\cdot i} \cdot \bar{u}_{\cdot k}), \quad i, k=r, z, \varphi. \quad (2)$$

Здесь запятая обозначает ковариантное дифференцирование, черта сверху – вектор.

Для построения шагового метода решения задачи найдем приращение компонент тензора деформаций

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) + \frac{1}{2}(v_{\cdot i} u_{v,k} + u_{v,i} v_{\cdot k}), \quad i, k, v=r, z, \varphi, \quad (3)$$

где  $v_i$  – приращение компонент вектора перемещений. Так как соотношение (3) линейно относительно  $v_i$ , запишем его в матричной форме

$$[\mathbf{e}] = [\tilde{\mathbf{L}}][\mathbf{v}], \quad (4)$$

Вид операторной матрицы  $[\tilde{\mathbf{L}}]$  дан в работе [3].

Для случая гиперупругого материала имеет место следующее тензорно-линейное соотношение между приращениями напряжений  $s^{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$ :

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm} \quad (5)$$

или в матричной форме

$$[\mathbf{s}] = [\tilde{\mathbf{D}}][\mathbf{e}], \quad (6)$$

где компоненты тензора  $\tilde{D}^{iklm}$  равны вторым производным от потенциала  $W = W(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\varphi r})$  по компонентам тензора деформаций,

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}] &= [s_{rr}, s_{zz}, s_{\varphi\varphi}, s_{rz}, s_{z\varphi}, s_{\varphi r}]^T; \\ [\mathbf{e}] &= [e_{rr}, e_{zz}, e_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\varphi r}]^T; \\ \gamma_{ik} &= 2e_{ik}, \quad i \neq k, \quad i, k = r, z, \varphi. \end{aligned}$$

Для решения данной задачи использован потенциал  $W$  [9] в форме:

$$W = \frac{C_0}{2\beta} (e^{\beta Q} - 1) + C_c (J \ln J - J + 1), \quad (7)$$

где

$$Q = C_1 \varepsilon_{rr}^2 + C_2 \varepsilon_{zz}^2 + C_3 \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + C_4 \gamma_{rz}^2 + C_5 \gamma_{z\varphi}^2 + C_6 \gamma_{r\varphi}^2,$$

$J = \lambda_r \lambda_z \lambda_\varphi$  – мера изменения объема при деформации,  $\lambda_i = \sqrt{1 + \varepsilon_{ii}}$ ;  $i = r, z, \varphi$ ;  $C_0, C_1, \dots, C_c$  – константы, принимающие различные значения для разных материалов,  $\beta$  – коэффициент, отражающий степень нелинейности потенциала.

Задано кинематическое условие – закрепление основания:  $u_z = 0$  при  $r = 0, z = c(a, + h)$ ; значения параметров будут приведены далее. Статические условия ( $\sigma_n = 0, \sigma_\tau = 0$  – на внешней поверхности модели,  $\sigma_n = -q, \sigma_\tau = 0$  – на внутренней) выполняются в силу вариационного принципа.

**Вариационный принцип возможных перемещений в приращениях.** Для построения метода решения исходим из вариационного принципа возможных перемещений в приращениях. Рассмотрим тело объемом  $V_0$  до деформации, заполненное упругой сплошной средой, в некоторый момент времени  $t$ . Пусть накопленные к этому моменту за счет деформирования компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений есть  $\sigma^{ik}, \varepsilon_{ik}, u_i$  соответственно, а их приращения за время  $\Delta t$  есть  $s^{ik}, e_{ik}, v_i$ . Выберем цилиндрическую систему координат и получим формулу для приращения деформации  $e_{ik}$ , вводя в соотношения Коши (2) вектор  $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$  вместо  $\bar{\mathbf{u}}$ :

$$\varepsilon_{ik} + e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k + v_k)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_k}. \quad (8)$$

Записывая деформацию  $\varepsilon_{ik}$  для момента времени  $t$  (2) в виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (9)$$

и вычитая (9) из (8), находим:

$$\begin{aligned} e_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \left( \delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \left( \delta_{mk} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Слагаемое, стоящее в (10) в квадратных скобках, обозначим далее  $\tilde{e}_{ik}$ , так что

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \quad (11)$$

Полная энергия состоит из суммы потенциальной энергии деформации  $U$  и работы  $A$  сил давления на перемещениях. Вариация полной энергии имеет вид

$$\delta(U + A) = 0. \quad (12)$$

Запишем формулу для  $U$  в момент времени  $t$

$$\delta U_t = \int_{V_t} \sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV_t. \quad (13)$$

Здесь  $V_t$  – объем тела в момент времени  $t$ . В соответствии с физическим законом для гиперупругого тела, получим  $\sigma^{ik} = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}$ . Учитывая, что

$dV_t = J dV_0$  и сохраняя в (13) лишь квадратичные относительно  $v_k$  слагаемые, в момент времени  $t + \Delta t$  имеем

$$\delta U_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_0} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} \tilde{e}_{ik} \tilde{e}_{lm} \right) dV_0,$$

где  $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = J \sigma^{ik}$  – накопленные к моменту  $t$  известные функции координат,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} = \tilde{D}^{iklm}.$$

Заменяя индексы в векторе  $[\varepsilon]$  на  $1, \dots, 6$  и вводя новое обозначение для матрицы  $[\tilde{D}]$ , получим

$$\tilde{E}^{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}.$$

Здесь

$$\tilde{E}^{ik} = C_0 C_i (\delta_{ik} + 2C_k \varepsilon_i \varepsilon_k) e^{\beta Q} + C_c J \lambda_i^{-2} (\lambda_k^{-2} + \ln J (\lambda_k^{-2} - 2\lambda_i^{-2} \delta_{ik})),$$

$i, k = 1, \dots, 6$ ;  $\delta_{ik}$  – символы Кронекера.

В изотропном материале  $C_1 = C_2 = C_3$  (далее для этой константы используем обозначение  $C_1$ ),  $C_4 = C_5 = C_6$  (далее –  $C_2$ ).

При  $\epsilon_{ik} \rightarrow 0$  имеем  $\lambda + 2\mu = C_0 C_1$ ;  $\lambda = C_c$ ;  $2\mu = C_2$ , тогда  $\mu = \frac{C_0 C_1 - C_c}{2}$ .

Задавая таким образом коэффициенты  $C_0, C_1, C_2, C_c$ , можно получить модуль упругости  $E(\lambda, \mu)$  и коэффициент Пуассона  $\nu(\lambda, \mu)$  [10]

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Рассмотрим приращение вектора правой части СЛАУ. Пусть на части поверхности  $\Sigma$  тела задано внешнее давление  $q$ . Выпишем формулу для  $A$  в момент времени  $t$

$$\delta A_t = \int_{\Sigma} q \left( \frac{\partial z}{\partial s} \delta v_r + \frac{\partial r}{\partial s} \delta v_z \right) ds$$

или

$$\delta A_t = 2\pi \int_{\Sigma} q \frac{dl}{ds} (\delta v_r \sin \alpha - \delta v_z \cos \alpha) r ds,$$

где  $s$  – локальная координата ( $-1 \leq s \leq 1$ ) вдоль дуги внутреннего края КЭ,  $\alpha$  – угол между касательной к меридиану внутренней поверхности ЛЖ и осью  $r$ . В момент времени  $t + \Delta t$  работа  $A$  будет иметь вид

$$\delta A_{t+\Delta t} = \int_{\Sigma} (q_0 + \Delta q) \frac{d(l_0 + \Delta l)}{ds} (\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) \delta v_r - \cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \delta v_z) (r_0 + \Delta r) ds, \quad (14)$$

Здесь  $\Delta q$  – приращение давления за время  $\Delta t$ ,  $\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) \approx \sin \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0$ ,  $\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \approx \cos \alpha_0 - \Delta \alpha \sin \alpha_0$ . Имея в виду, что  $\left( \frac{dl_0}{ds} \right)_t = \sqrt{(r'_{0,s})^2 + (z'_{0,s})^2} \equiv l_t$ , находим  $\Delta l_t = \frac{d(\Delta l)}{ds} = \frac{r_{0,s} \Delta u_{r,s} + z_{0,s} \Delta u_{z,s}}{l_t}$ . Так как  $\alpha = \arctg(z_{,s} / r_{,s})$ , то

$$\Delta \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{1}{(r_{,s})^2} (-z_{,s} \Delta u_{r,s} + r_{,s} \Delta u_{z,s}) = \frac{r_{,s} \Delta u_{z,s} - z_{,s} \Delta u_{r,s}}{l_t^2}.$$

Сохраняя в (14) слагаемые второго порядка относительно приращений и вариации перемещений, получим

$$\begin{aligned} \delta A_{t+\Delta t} = & \Delta q \int_{\Sigma} \frac{dl_0}{ds} r_0 (\delta v_r \sin \alpha_0 - \delta v_z \cos \alpha_0) ds + q_0 \int_{\Sigma} \left[ \left( \sin \alpha_0 \left( r_0 \frac{d(\Delta l)}{ds} + \Delta r \frac{dl_0}{ds} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + r_0 \frac{dl_0}{ds} \Delta \alpha \cos \alpha_0 \right) \delta v_r + \left( r_0 \frac{dl_0}{ds} \Delta \alpha \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \left( r_0 \frac{d(\Delta l)}{ds} + \Delta r \frac{dl_0}{ds} \right) \right) \delta v_z \right] ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Так как приращения  $v_r, v_z$  неизвестны, то приравняем им значения, полученные на предыдущем шаге процесса.

**Применение метода конечных элементов.** Для решения задачи используем МКЭ. Модель ЛЖ разобьем на конечное число связанных в узловых

точках восьмиузловых конечных элементов (КЭ). В КЭ введем систему локальных координат  $-1 \leq \zeta_1 \leq 1, -1 \leq \zeta_2 \leq 1$ .

Вектор узловых перемещений элемента будет имеет вид

$$[\tilde{\mathbf{u}}] = [u_{r1}, u_{z1}, u_{\varphi1}, \dots, u_{r8}, u_{z8}, u_{\varphi8}]^T. \quad (16)$$

Тогда выражение для вектора перемещений произвольной точки КЭ будет

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{u}}]. \quad (17)$$

Здесь  $[\mathbf{N}]$  – матрица функций формы:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Функции формы  $N_i$  удовлетворяют условиям  $N_i(x_i, y_i) = 1, N_i(x_j, y_j) = 0$  при  $i \neq j; i, j = 1, \dots, 8$ .

Для данного восьмиузлового КЭ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\zeta_1)(1+\zeta_2)(\zeta_2-\zeta_1-1)}{4}; & N_2 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1-\zeta_1)}{2}; \\ N_3 &= \frac{(\zeta_1-1)(1-\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2+1)}{4}; & N_4 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1-\zeta_2)}{2}; \\ N_5 &= \frac{(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2-1)}{4}; & N_6 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_1)}{2}; \\ N_7 &= \frac{(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2-1)}{4}; & N_8 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_2)}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение для производных функций формы по глобальным координатам  $(r, z)$  через производные по локальным координатам  $(\zeta_1, \zeta_2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} N_i &= a_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + b_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i; \\ \frac{\partial}{\partial z} N_i &= c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + d_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i, \quad k=1, \dots, 8, \end{aligned}$$

где

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} \\ r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

$$\Delta \equiv \det(I) = ad - cb; \quad [\mathbf{I}]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}.$$

Введем соотношения для приращений компонент вектора перемещений и тензора приращений деформаций для одного КЭ в матричной форме

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{v}}]; \quad (20)$$

$$[\mathbf{e}] = [\tilde{\mathbf{L}}][\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{v}}]. \quad (21)$$

Здесь  $[\tilde{\mathbf{v}}]$  – вектор приращений узловых перемещений.

Подставляя приведенные выше формулы в уравнение (12), получим

$$[\delta\tilde{\mathbf{v}}]^T \left\{ \int_V [\mathbf{N}]^T [\tilde{\mathbf{L}}]^T [\tilde{\mathbf{E}}]([\tilde{\mathbf{L}}]\mathbf{N}) + [\mathbf{L}_g]^T [\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{L}_g] dV \right\} [\tilde{\mathbf{v}}] - [\delta\tilde{\mathbf{v}}]^T [\mathbf{Q}] = 0, \quad (22)$$

где  $[\mathbf{Q}]$  – матричное представление (15),  $[\mathbf{L}_g]$  – матрица (8x3) производных по координатам функций формы.

Так как  $\frac{1}{2}\sigma_t^{ik}(\tilde{v}_{,i}\tilde{v}_{,k}) = \frac{1}{2}\sigma_t^{ik}(v_{1,i}v_{1,k} + v_{2,i}v_{2,k} + v_{3,i}v_{3,k})$ , то в декартовой системе координат это дает матрицу (3-8)(3-8) для восьмиузлового КЭ. Клетка с номером  $(m,n)$  ( $m,n = 1,\dots,8$ ) размером (3x3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

где  $a = \sigma_t^{ik} f_{m,i} f_{n,k}$  ( $f_v$  - функции формы). В цилиндрической системе координат в осесимметричной задаче клетка имеет вид

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 & c_1 \\ 0 & a & d_1 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $a = \sigma_t^{ik} N_{m,i} N_{n,i}$ ,  $i, k=1,2$ ,

$$b = \sigma_t^{33} N_{m,3} N_{n,3}; \quad \left( N_{m,3} = \frac{N_m}{r} \right)$$

$$c_1 = \sigma_t^{13} N_{m,1} N_{n,3}; \quad c_2 = \sigma_t^{31} N_{m,3} N_{n,1};$$

$$d_1 = \sigma_t^{23} N_{m,2} N_{n,3}; \quad d_2 = \sigma_t^{32} N_{m,3} N_{n,2}.$$

Суммируя соотношения (22) по всем КЭ, приравнявая нулю множители при вариациях компонент вектора узловых значений перемещений  $[\tilde{\mathbf{v}}]$ , приходим к СЛАУ

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g])[\tilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{Q}]. \quad (23)$$

Здесь  $[\mathbf{K}_e]$  и  $[\mathbf{K}_g]$  – матрицы жесткости и геометрической жесткости, равные интегралам от первого и второго слагаемых в (22). Первая из них отвечает геометрически линейной задаче, вторая учитывает геометрическую нелинейность.

Введем обозначение  $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]$ , тогда из (23) следует разрешающая СЛАУ для одного шага по нагрузке

$$[\mathbf{K}][\tilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{Q}]. \quad (24)$$

Кинематические граничные условия вводим в систему (24) путем замены диагональных компонент матрицы  $[\mathbf{K}]$ , отвечающим равными нулю компо-

нентам вектора перемещений значений существенно больших, чем другие компоненты матрицы.

**Геометрия модели и исходные данные.** Геометрия модели ЛЖ сердца определяется следующими параметрами:  $a_v$  – меньшая полуось внутренней поверхности,  $b_v$  – большая полуось. Они связаны следующим образом: задается  $a_v$  и отношение  $c_v = b_v/a_v$ , а затем вычисляется  $b_v = a_v c_v$ . Далее задаем толщину эллипсоида  $h$  при  $z = 0$ . По толщине определяем полуоси внешней поверхности: малую  $a_n = a_v + h$  и большую  $b_n = a_n c_v$ . В расчетах принято:  $a_v = 2,243$  см [1];  $c_v = 1,27$  [11];  $h = 1$  см. Эти данные являются усредненными параметрами реального ЛЖ человека.

Внутри толстостенной эллипсоидальной оболочки расположены два относительно жестких включения. Одно из включений моделирует основание сердца, в котором размещены его клапаны, второе – ПЗ, расположенную в вершине. Оба включения моделируются участками стенки с повышенной жесткостью. Второе включение в первом случае моделирует трансмуральный ИМ, а во втором – эндокардиальный (трансмуральная ПЗ занимает всю толщину стенки ЛЖ, эндокардиальная – половину толщины стенки). Для трех зон оболочки заданы разные коэффициенты жесткости: первая (основание) – 8, вторая (здоровая мышечная ткань) – 1, третья (ПЗ) – 5–7 [8] (эти значения взяты из экспериментальных данных, известных в кардиологии). Коэффициент жесткости для ПЗ обозначим через  $c$ . Для того, чтобы в местах соединения включений и здоровой части оболочки не возникало разрыва напряжений из-за большой разницы в коэффициентах жесткости, было введено смягченное изменение жесткостей. Кроме того, в этих переходных зонах задано сгущение сетки КЭ (рис. 1).

К внутренней поверхности прикладываем давление  $q = 0,667$  кПа, которое соответствует измеренному значению конечно-диастолического давления, равному 5 мм рт. ст. В расчетах введена сетка: по толщине – 10 КЭ, по дуге меридиана – 27. Угол раствора включения задавался в диапазоне 45–60°, угол раствора основания принят равным 30°. Модуль упругости  $E = 5,15$  кПа (при малых (инфинитезимальных) деформациях);  $\beta = 0,25$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,4$ . Численное интегрирование проведено с помощью трехузловой формулы Гаусса.

**Результаты численного анализа.** Все расчеты производились на персональном компьютере с помощью разработанной авторами программы.

На рис. 1, а приведена сетка КЭ, в переходных зонах которой (основание – основная часть и основная часть – ПЗ) задано сгущение. Черным цветом показаны основание (в верхней части рисунка) и включение (внизу), серым – основная часть. На рис. 1, б показаны начальное (серый цвет) и конечное (черный цвет) деформированное состояния.

Начальный внутрисердечный объем у здорового сердца (модель ЛЖ без ПЗ) равен 60 мл, КДО – 120 мл, максимальное значение интенсивности на-

пряжений – 4.57 кПа (см. рис. 2).

В приведенных далее таблицах значения над и под косой чертой отвечают углам раствора включений 45 и 60°, соответственно. На рис. 3 приведено распределение интенсивности напряжений для эндокардиального и трансмурального включений.

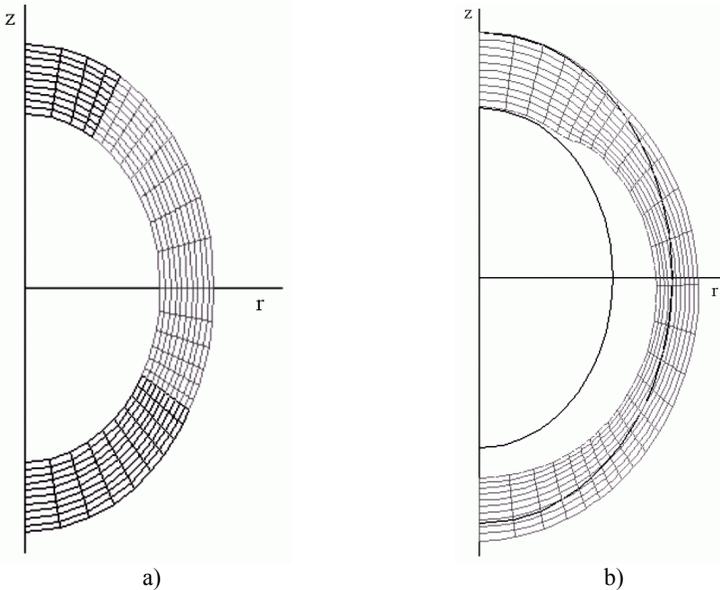


Рисунок 1 – Сетка КЭ модели ЛЖ (а); начальное и деформированное состояния модели (б).

Таблица 1 – Зависимость КДО от вида, угла раствора и коэффициента жесткости с ПЗ

Вид ИМ	КДО ЛЖ	
	$c = 5$	$c = 7$
Трансмуральный ИМ	110.42 / 103.14	110.83 / 104.05
Эндокардиальный ИМ	109.49 / 101.64	109.88 / 102.47

Таблица 2 – Зависимость максимального значения интенсивности напряжений от вида, угла раствора и коэффициента жесткости с ПЗ

Вид ИМ	Максимальное значение интенсивности напряжений	
	$c=5$	$c=7$
Трансмуральный ИМ	4.58 / 4.62	4.59 / 4.79
Эндокардиальный ИМ	4.67 / 4.79	4.83 / 5.12

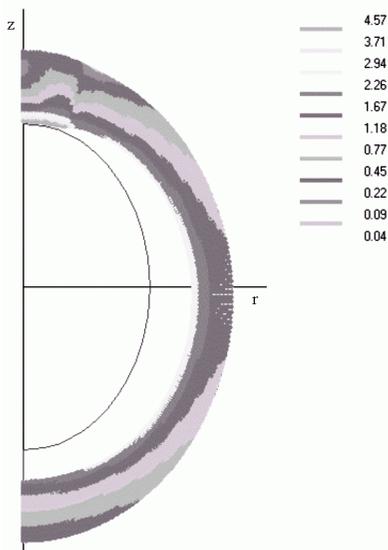
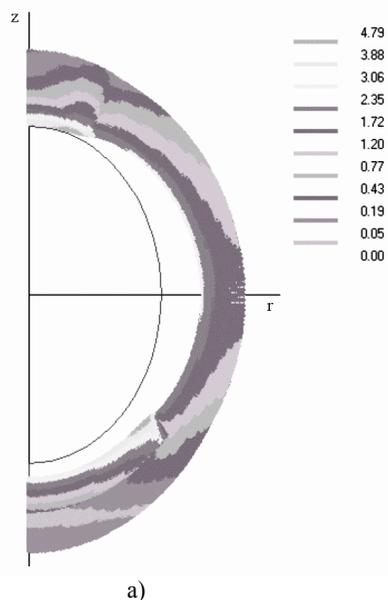
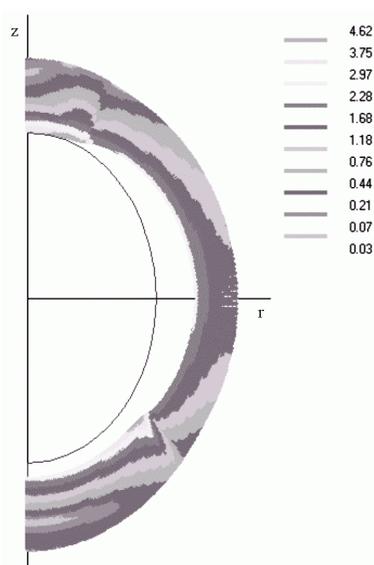


Рисунок 2 – Распределение интенсивности напряжений в ЛЖ здорового сердца

Как видно из приведенных выше данных увеличение угла раствора ПЗ от  $45^\circ$  до  $60^\circ$  уменьшает КДО на 5.7-6.6% при эндокардиальном ИМ и на 6.7-7.2% при трансмуральном; наибольшие максимальные значения интенсивности напряжений возникают при эндокардиальном ИМ около соединения основной части и включения и увеличиваются при росте угла раствора ПЗ. Полученные результаты адекватны данным кардиологии.



a)



b)

Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений при эндокардиальном (a) и трансмуральном ИМ (b) при угле раствора ПЗ  $60^\circ$  и  $c = 5$

Список литературы: 1. Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И. и др. Нелинейная кардиобиомеханика

левого желудочка. – К., 1991. – 212 с. 2. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Напряженно-деформированное состояние модели левого желудочка сердца при инфаркте миокарда // Пробл. машиностроения. – 2002. – № 4, т. 5. – С. 92-101. 3. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и ... – 2004. – № 1(10). – С. 23-31. 4. Lowe T.E., Love E.R. Cardiac aneurysms: a mechanical analysis of their deformation // J. Exp. Biol. Med. Sci. – 1948. – Vol. 26. – P. 497-513. 5. Mirsky I., McGill R.F., et. al. Mechanical behavior of ventricular aneurysms // Bull. Math. Biophys. – 1978. – Vol. 40. – P. 451-464. 6. Radhakrishnan S., Ghista D. N., et. al. Mechanical analysis of development of left ventricular aneurysms // J. Biomech. – 1980. – № 13. – P. 1031-1039. 7. Janz R. F, Waldron R.J. Predicted effect of chronic apical aneurysms on the passive stiffness of the human left ventricle // Circ. Res. – 1978. – Vol. 42. – P. 255-263. 8. Taber L.A., Podszus W. W. A laminated shell model for the infarcted left ventricle // Int. J.Solid and Structures. – 1997. – Vol. 34. № 2. – P. 223-241. 9. Usyk T.P., Mazhari R., et. al. Effect of laminar orthotropic myofiber architecture on regional stress and strain in the canine left ventricle // In: Cowin S.C., Humphrey J.D., eds. Cardiovascular Soft Tissue Mechanics, Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers. – 2001. – P. 143-164. 10. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости / Под ред. Э.И. Григолюка. – М., 1961. – 219 с. 11. Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И. и др. Неинвазивная диагностика нарушений биомеханики левого сердца. – К., 1992. – 219 с.

*Поступила в редколлегию 29.04.04*

УДК 539.3

**Г.И.ЛЬВОВ**, докт.техн.наук; **В.И.ТАРАНЮК**, НТУ «ХПИ».

## **АНАЛИЗ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В АВТОФРЕТИРОВАННОМ ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ ПОСЛЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ.**

У даній роботі розглядається визначення залишкових напружень в автофретованому товстостінному циліндрі після механічної обробки. Приводиться аналітична постановка задачі. Чисельна реалізація проводиться в скінчено-елементному програмному комплексі ANSYS.

The paper discusses the common statement of problems of determination of residual stresses after autofrettage of a thick-walled cylinder and additional machining. Analytical statement of the given problem is resulted. Numerical realization is carried out in finite-element program complex ANSYS.

Остаточные напряжения могут возникать в твердых телах в результате различных физических процессов, связанных с изготовлением и обработкой изделий. Проблемам исследования остаточных напряжений уделяется значительное внимание [1-4].

Предметом исследования в рамках настоящей работы являются процессы предварительного упруго-пластического деформирования твердых тел с целью получения таких полей остаточных напряжений, которые позволяют снизить максимальные напряжения в условиях эксплуатации.

Для получения необходимого уровня остаточных напряжений, детали в процессе автофретирования подвергают пластическому деформированию, которому соответствуют значительные необратимые деформации. Это приводит к тому, что