

***В.Н.ДАНИЛОВ***, НАУ «ХАИ»

## **РАСЧЕТ СТАТИКИ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ**

В статті запропоновано рішення задач, які описують стан кільцевої пластини методом рекуррентних співвідношень. На відомих задачах показані переваги цього підходу порівняно з деякими відомими методами і проаналізовані отримані результати. Також показана можливість рішення складних систем, що містять у собі кільцеву пластину.

In the article the problem solving which is offered describe a condition of a ring slice by a method of recurrent ratio. On the known tasks the advantages of this method as contrasted to by known methods are shown and the obtained outcomes are parsed. Capability of the solution of compound systems also is shown which comprise a ring slice

В настоящее время имеется много различного рода алгоритмов, методов и программ для расчета деформируемых структур, в том числе и кольцевых пластин. Однако, как известно, при увеличении длины образующей, возможность исследования этих задач ограничена из-за наличия быстро возрастающих и быстро убывающих решений. Поэтому практически все ранее разработанные методы, модели и алгоритмы имеют недостатки. То есть, подразумевают приближенное численное решение, или требуют больших запасов по ресурсам ЭВМ. Наш подход в какой-то степени позволяет избежать этих недостатков. Исследования авторов в данном направлении являются частью государственной темы Г202-20/2003 «Разработка математических моделей складных механических систем импульсной дѣи для використання в аерокосмічній галузі».

Частичный обзор теории и методов решения задач теории упругости по определению параметров вектора состояния в задачах статики кольцевых пластин можно найти, например, в работах [1–3].

В данной работе предлагается расчет статики кольцевых пластин при помощи сравнительно нового подхода – метода рекуррентных соотношений, который позволяет найти параметры вектора состояния в любой точке поверхности деформируемого тела путем решения общей моментной системы дифференциальных уравнений. При этом не требуется больших запасов по ресурсам и скорости обработки на ЭВМ даже для расчета сложных комбинированных структур.

Целью данной работы является демонстрация преимуществ нашего подхода по сравнению с известными результатами, содержащихся в работах других авторов. Точность расчетов для рассмотренных в данной работе задач, на наш взгляд является приемлемой, о чем будет сказано ниже.

В работе [4] дано применение метода рекуррентных соотношений к расчету статики и динамики стержневых и трубопроводных систем. Работа [5] иллюстрирует применение метода рекуррентных соотношений к расчету статики и динамики комбинированных цилиндрических оболочек. В работе [6] рассматривается адаптация метода к решению простых с составных конических оболочек.

В качестве первого примера демонстрации работы метода рекуррентных соотношений была взята задача, решение которой приводится в работе [1]. Это диск линейно-переменной толщины нагруженный антисимметричной изгибающей нагрузкой. Геометрические размеры, а также величина нагрузки и графики удельного изгибающего момента  $M_1$  и нормального перемещения  $w$  при  $\theta = 0$  показаны на рис. 1.

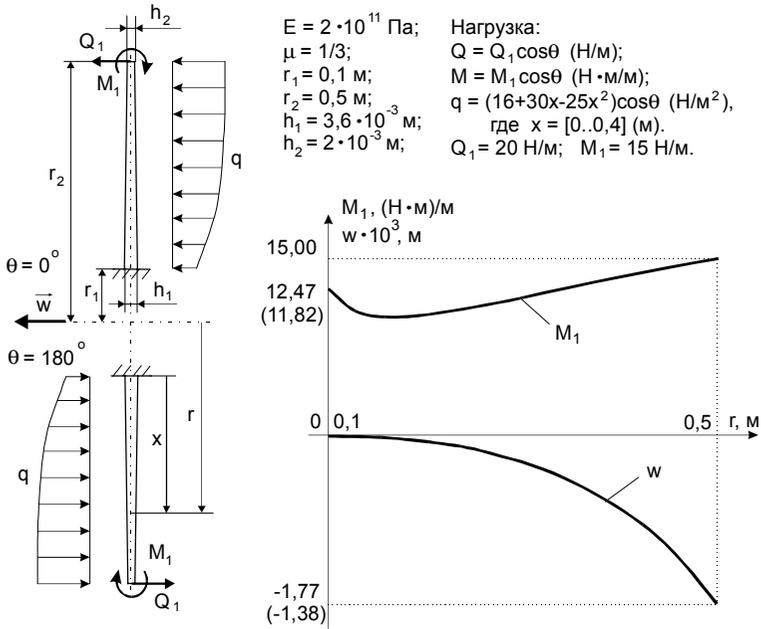
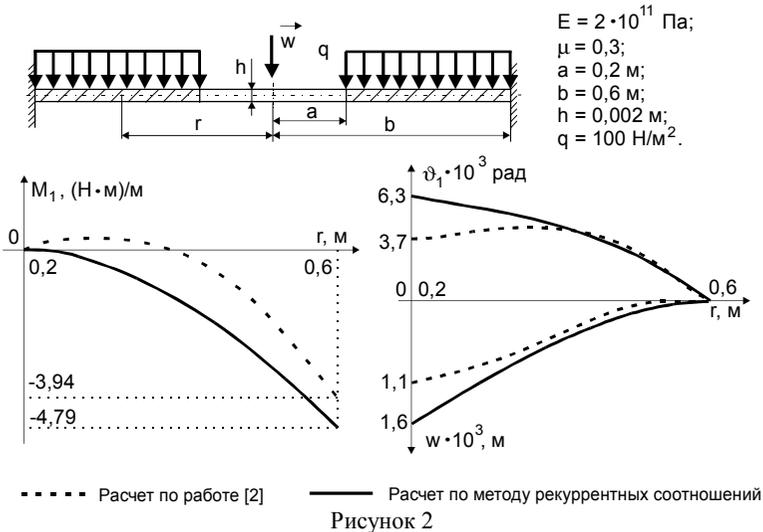


Рисунок 1

Графики рис. 1 получены численным методом рекуррентных соотношений. Методика, изложенная в работе [1] позволяет найти значения искомых параметров только лишь в граничных точках. Эти значения показаны на рис. 1 в скобках, ниже значений, полученных методом рекуррентных соотношений.

Комментируя полученный результат, отметим, что метод рекуррентных соотношений, хотя и является численным методом, он позволяет избежать многих систематических ошибок присущих другим численным методам: ошибки аппроксимации, ошибки численного интегрирования и др. Для метода рекуррентных соотношений характерен только один тип ошибки – ошибка округления чисел при решении больших систем уравнений на ЭВМ. Однако при решении задачи изображенной на рис. 1. потребовалось разбиение пластины на 9 участков и решение в конечном итоге системы линейных уравнений  $72 \times 72$ . Если начать увеличивать количество участков при расчете, то при любом количестве участков меньше 60-ти ответ не меняется и совпадает до 15 знака. При большем количестве участков результаты начинают ухудшаться.

ся. Здесь начинают сказываться ошибки численного счета при решении большой системы уравнений. По этому в данном случае результат, полученный методом рекуррентных соотношений в рамках данной математической модели на наш взгляд достаточно точный.



Следующая задача, рассматриваемая в данной работе это кольцевая пластина постоянной толщины, жестко закрепленная по внешнему контуру и нагруженная равномерно распределенным давлением см. рис. 2.

Методика изложенная в работе [2] уже позволяет оценивать распределение изгибающего момента  $M_1$ , угла поворота  $\vartheta_1$  и нормального перемещения  $w$  по радиусу пластины. Однако, из расчета по работе [2] видно, что изгибающий момент меняет свой знак на участке, что при данном виде нагрузки вызывает некоторое сомнение. Из этого можно сделать вывод, что методика, изложенная в работе [2] приемлемая, но неточная и даже в такой простой задаче позволяет только лишь примерно рассчитывать искомые параметры.

Кроме этого, методика решения задач в работе [2] сравнительно трудоемкая, так как подразумевает расчет в специальных функциях, что даже по сравнению с другими аналитическими методами является недостатком. Метод рекуррентных соотношений сравнительно прост в реализации, а программа, написанная по этому методу, не требует больших затрат времени и специального уровня подготовки специалиста.

Рассмотрим еще одну задачу, аналитический расчет которой приводится в работе [3]. Это кольцевая пластина, жестко заделанная на внутреннем контуре. На наружном контуре разрешено перемещение в нормальном направлении, перемещения в других направлениях запрещены. Нагружена пластина равномерно распределенной поперечной нагрузкой см. рис. 3. На графиках

см. рис. 3 изображены значения не нулевых параметров вектора состояния ( $w$  – нормальное перемещение,  $Q_1$  – удельная радиальная поперечная сила,  $M_1$  – удельный изгибающий момент).

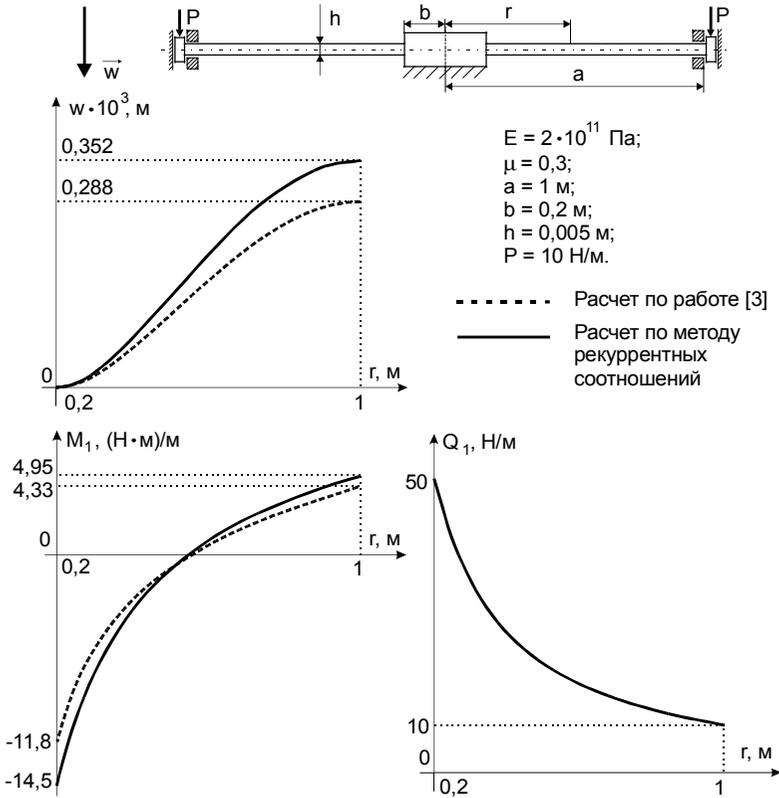


Рисунок 3

В данной задаче сила  $Q_1$  определяется всего лишь по одной формуле в зависимости от текущего значения радиуса  $Q_1 = pa/r$ . Эта формула является абсолютно точной в рамках данной математической модели, так как ее можно получить аналитическим путем, что и демонстрируется в работе [3].

Расчет методом рекуррентных соотношений (в котором численно решается общая система дифференциальных уравнений) показывает совпадение с этим результатом до 15 знака после запятой. Это аргументирует, при всех прочих условиях правильность обоих решений.

Два других не нулевых параметра в работе [3] также определяются по аналитическим формулам, которые получаются вследствие численного интегрирования системы дифференциальных уравнений описывающих деформацию пластины и в конечном итоге определяются по громоздким формулам,

в чем на наш взгляд и содержится ошибка по сравнению с более точным методом рекуррентных соотношений.

Из рассмотренных выше примеров видно, что метод рекуррентных соотношений, на наш взгляд, не уступает, а в целом, позволяет более надежно и точно исследовать изложенные выше задачи. Кроме того метод рекуррентных соотношений в силу его алгоритмических преимуществ, позволяет исследовать не только простые, состоящие из одного участка пластины, а и рассчитывать более сложные структуры, о чем уже говорилось в работе [6]. Для практики интерес представляет конструкция, в которой кольцевая пластина является лишь составным элементов в комбинации оболочек.

Рассмотрим, например, конструкцию (см. рис. 4). Вся конструкция из материала:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu = 0,3$ .

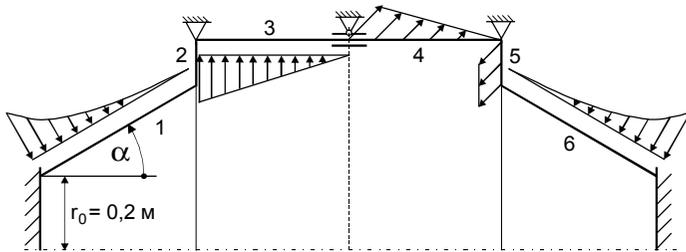


Рисунок 4

В таблице приводятся значения остальных параметров для оболочек составляющих конструкцию и нагрузка на участках.

| № уч. | $\alpha$ , град | Длина участка, м | Толщина, м | Нагрузка, Н/м <sup>2</sup>                         |
|-------|-----------------|------------------|------------|--|
| 1     | 30              | 0,5              | 0,002      | $q_3 = -12500 + 7500x_1 - 15000x_1^2 + 10000x_1^3$ |
| 2     | 90              | 0,1              | 0,006      | 0  |
| 3     | 0               | 0,4              | 0,003      | $q_3 = -1000 + 2500x_3$                            |
| 4     | 0               | 0,4              | 0,003      | $q_2 = 2500 - 6250x_4$                             |
| 5     | -90             | 0,1              | 0,006      | $q_2 = -20000$                                     |
| 6     | -30             | 0,5              | 0,002      | $q_3 = -10000x_6^3$                                |

В таблице:  $x_1 = [0 \dots 0,5]$ ,  $x_3 = [0 \dots 0,4]$ ,  $x_4 = [0 \dots 0,4]$ ,  $x_6 = [0 \dots 0,5]$ ;  $q_2$  – касательная нагрузка,  $q_3$  – нормальная нагрузка. Угол раскрытия конуса  $\alpha$  отсчитывается от оси вращения конструкции.

В начале и в конце конструкция жестко заделана; между вторым и третьим, четвертым и пятым участками запрещено продольное  $u$ , касательное  $v$  и нормальное  $w$  перемещения; между третьим и четвертым участками запрещено продольное перемещение  $w$ . Переход от одного участка к другому осуществляется простым поворотом базиса на соответствующий угол.

Графики для касательного  $v$  и продольного  $w$  перемещений конструкции, изображенной на рис. 4, приведены на рис. 5.

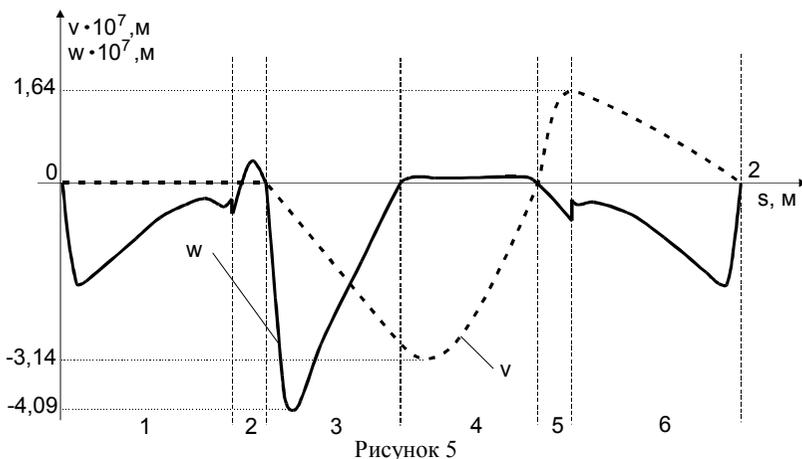


Рисунок 5

**Выводы.** В результате проведенных исследований было установлено, что метод рекуррентных соотношений ничем не уступает большинству аналитических и численных решений при расчете простых кольцевых пластин с различным видом нагружения. При расчете сложных составных структур, как правило, большинство методик, подходов и численных методов или не применимо или на наш взгляд дают погрешность в расчетах. Метод рекуррентных соотношений позволяет считать составные оболочечные структуры с довольно большим количеством участков с различного вида закреплениями между участками и произвольной нагрузкой представляющей собой степенной ряд. Это дает возможность для дальнейших исследований и написанию алгоритмов программ расчета статики оболочек, у которых в поперечном сечении не окружность, расчета задач формулируемых нелинейной теорией оболочек и др.

**Список литературы:** 1. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – М., 1959. – 296 с. 2. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. – Л., 1977. – 184 с. 3. Григолюк Э.И. Прочность, колебания, устойчивость круговых пластин. – М., 1997. – 134 с. 4. Черночуб И.П., Попов А.Е., Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем. – Х., 1998. – 226 с. 5. Берешко И.Н., Вамболь С.А., Доценко П.Д. Постановка задач расчета статики и динамики многосвязных цилиндрических оболочек методом рекуррентных соотношений // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». – 2000: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 23(6). – С. 144-155. 6. Доценко П.Д., Данилов В.Н. Метод рекуррентных соотношений в статике конических оболочек // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». – 2003: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 34(3). – С. 74-81.

Поступила в редколлегию 12.04.04