композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. **3.** *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **4.** *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **5.** *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. **6.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **7.** *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т 38. № 2. – С. 22-56. **8.** *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **9.** *Галимов К.З.* Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред.К.З.Галимова. - Издательство Казанского университета, 1977. - С. 36−95.

Поступила в редколлегию 11.05.04.

УДК 539.3

***Э.Е.ГЕРМАН*; *В.А.КНЫШ*;**
Б.А.УШАМИРСКИЙ, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

ОБ УПРУГОМ УДАРЕ

У статті описана розробка інженерних методів розрахунку механічних систем при ударних діях. В основу дослідження покладено метод енергетичного балансу. Із закону збереження механічної енергії визначаються довго тривалість удару, максимальні контактні зусилля й напруження в тілах, що співударяються. Розглянуто пружній удар стержня і кулі об абсолютно жорстку перешкоду, а також ударна взаємодія двох рушійних стержнів. Запропонований підхід дозволяє отримати прості залежності, зручні для інженерного застосування. Проведено порівняння теоретичних результатів з експериментом, яке підтвердило правомірність введених теоретичних передумов. Запропонована в роботі модель пружного удару може бути застосована для невеликих швидкостей співудару.

This paper reports about development of engineering methods for mechanic systems by impingement attack. The base of investigation consists on energy balance method. Duration of shock, maximum contact efforts and strain items in impingement items define by law of conservation of mechanical energy. Elastic impact of rod and sphere on absolute stiff barrier and percussion interaction of two moving rod be described. Method proposed in this paper permits to get the simple compute dependent, convenient to engineering application. Theoretic results are compared with experiment and trust of entry theoretic prerequisites is supported. Model of elastic impact proposed in the paper can be used for not great speeds of item in the moment of impingement.

В литературе рассмотрение удара фиксируется большей частью на моментах «до» и «после», а собственно взаимодействие описывается лишь качественно. Такое положение может быть объяснено весьма разнообразным подходом к решению конкретных задач. Настоящая статья посвящена оценке величин, характеризующих упругий удар, на основе энергетического баланса.

1. Рассмотрим удар стержня о жесткую преграду. Длина L, поперечное сечение S, а модуль упругости E, плотность ρ материала стержня, а также начальная скорость W_0 заданы. Известно, что удар состоит из двух симметрич-

ных фаз: в первой кинетическая энергия тела К переходит в энергию деформации U, во второй происходит восстановление кинетической энергии. Из закона сохранения следует, что в любой момент контакта

$$K + U = K_0, \tag{1}$$

где K_0 – начальная кинетическая энергия.

Пусть в момент $t > 0$ длина стержня уменьшилась вследствие сжатия на величину x. Считая, что справедлива статическая зависимость, получим силу сжатия $F = ES\dfrac{x}{L}$ и, соответственно, энергию деформации $U = \dfrac{1}{2L}ESx^2$

В то же время x – путь, пройденный стержнем с начала контакта. Следовательно, скорость стержня $W = \dfrac{dx}{dt}$, а кинетическая энергия $K = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$.

Подставляя в (1), имеем

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2L}ESx^2 = \frac{1}{2}mW_0^2,$$

откуда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(C\frac{x}{L}\right)^2 = W_0^2 \tag{2}$$

где $C = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения звуковых волн в материале стержня.

Время от начала контакта до достижения деформации x.

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{W_0^2 - \left(C\dfrac{x}{L}\right)^2}} = \frac{L}{C}\arcsin\frac{Cx}{W_0L}. \tag{3}$$

В конце первой фазы $\dfrac{dx}{dt} = 0$, а деформация, как следует из (2), достигает максимума $x_{max} = L\dfrac{W_0}{C}$.

Полное время контакта

$$T = 2t(x_{max}) = \pi\frac{L}{C}. \tag{4}$$

Максимальная сила

$$F_{max} = ES\frac{x_{max}}{L} = \rho W_0 CS, \tag{5}$$

и напряжение в стержне

$$\sigma = \rho W_0 C. \tag{6}$$

Такое же выражение для повышения давления при прямом гидравлическом ударе было получено Н.Е. Жуковским. Потеря скорости при торможении $\Delta W = 1$ м/с дает для воды повышение давления ~ 1,0 МПа (10 кгс/см^2) для стали – 40 МПа (400 кгс/см^2). В целом выражения (4), (5), (6) идентичны полученным с помощью дискретной модели (1), в которой сплошное тело представляется в виде последовательно соединенных между собой абсолютно твердых и недеформируемых безинерционных элементов.

2. При соприкосновении шара радиуса r с плоскостью теория упругости (2) дает следующую связь между действующей силой F и сближением тел x

$$F = 0{,}74Er^{1/2}x^{3/2}\,. \tag{7}$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \int_0^x F dx = 0{,}296Er^{1/2}x^{5/2}\,,$$

что можно представить как

$$U = 0{,}141\frac{m}{2}C^2\left(\frac{x}{r}\right)^{5/2}\cdot \tag{8}$$

Приравнивая сумму кинетической и потенциальной энергии в момент t > 0 начальной кинетической энергии и сократив на m/2, имеем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 0{,}141C^2\left(\frac{x}{r}\right)^{5/2} = W_0^2\,\cdot \tag{9}$$

Время удара от начала контакта до достижения деформации x

$$t = \frac{1}{W_0}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - 0{,}141\dfrac{C^2}{W_0^2}\left(\dfrac{x}{r}\right)^{5/2}}}\,\cdot \tag{10}$$

После введения переменной $\xi = x/x_{max}$

$$t = \frac{x_{max}}{W_0}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}}\,\cdot$$

Максимальная деформация достигается в конце первой фазы, когда скорость шара становится равной нулю. Из (9) следует

$$x_{max} = \left(\frac{1}{0{,}141}\right)^{2/5}\cdot\left(\frac{W_0}{C}\right)^{4/5} r\,\cdot$$

Подставляя в (7) и (10), получим максимальную силу

$$F_{max} = 2{,}41\rho C W_0 \sqrt[5]{\frac{W_0}{C}}\,r^2\,\cdot \tag{11}$$

и полное время контакта

$$T = 2t = \left(\frac{1}{0{,}141}\right)^{2/5}\cdot\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}}\cdot\frac{D}{C^{4/5}\cdot W_0^{1/5}}\,,$$

где D – диаметр шара.

Определенный интеграл выражается через Г-функцию.

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}} = \frac{2}{5}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}\right)} = 1{,}47\,\cdot$$

Окончательно

$$T = 1{,}47\left(\frac{1}{0{,}141}\right)^{2/5} \cdot \frac{D}{C^{4/5}\cdot W_0^{1/5}} = 3{,}23 \cdot \frac{D}{C^{4/5}\cdot W_0^{1/5}}\,. \qquad (12)$$

В таблице 1 приведены результаты экспериментального измерения длительности контакта стальных шаров одинакового диаметра, полученные с помощью высокоскоростного фотографирования 5000 кадров в минуту (3). Скорость соударения во всех опытах была постоянной и равной 0,1 м/с. Заметим, что задачи о соударении одинаковых шаров или стержней, движущиеся с равными скоростями, сводится к предыдущим, так как плотность контакта по симметрии будет жесткой преградой для каждого из них.

3. Рассмотрим удар движущегося стержня по неподвижному, где симметрия не столь явна, как в предыдущих примерах. Длина стержней, сечение и материал одинаковы. В начале контакта скорость первого стержня $W_{1o} = 0$, второго $W_{2o} = 0$. К некоторому моменту $t > 0$ каждый стержень получит деформацию $x_1 = x_2 = x$, скорости их станут $W_1 = W_0 - \frac{dx}{dt}$, $W_2 = 0 + \frac{dx}{dt}$, а относительная скорость $W_r = W_1 - W_2 = W_0 - 2\frac{dx}{dt}$.

Переход кинетической энергии первого стержня в потенциальную энергию обоих будет происходить до момента $W_r = 0$, т.е. до приобретения стержнями скорости ½ W_0 и максимальной деформации x_{max}. Уравнение энергетического баланса $К_1 + К_2 + U_1 + U_2 = К_0$ с учетом $U_1 = U_2$ вследствие равенства сил действия и противодействия приобретает вид

$$\frac{1}{2}\rho LS\left(W_0 - \frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho LS\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{L}ESx^2 = \frac{1}{2}\rho LSW_0^2\,.$$

После сокращения и приведения подобных получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - W_0\frac{dx}{dt} + \left(C\frac{x}{L}\right)^2 = 0\,,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{W_0}{2} \pm \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C\frac{x}{L}\right)^2}\,. \qquad (13)$$

Здесь знаки «+» и «-» дают, как указано в таблице 2, скорости стержней в двух симметричных фазах соударения.

Полное время контакта

$$T = 2\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\frac{W_0}{2} + \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C\frac{x}{L}\right)^2}}\,.$$

Переходя к переменной $\xi = x/x_{max}$ и учитывая, что $x_{max} = \frac{1}{2}L\frac{W_0}{C}$, получим

$$T = \frac{4x_{max}}{W_0}\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\sqrt{1-\xi^2}} = (\pi-2)\frac{L}{C}. \qquad (14)$$

Максимальная сила

$$F = ES\frac{x_{max}}{L} = \frac{1}{2}\rho c W_0 S. \qquad (15)$$

Для аналогичного примера (4), принимая равную жесткость стержней и упругой прокладки, время контакта $T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{L}{C}$, что совпадает с выражением (14) с точностью до 3 %.

Как видно из предыдущего, сделанные предположения позволили получить удовлетворительные результаты при незначительном объеме вычислений. И в более сложных случаях уравнение энергетического баланса совместно с условием равенства нулю относительной скорости в момент достижения максимальной деформации дают достаточную определенность и простоту решения задач упругого удара.

В заключение отметим, что при использовании статических зависимостей теории упругости, результат будет тем точнее, чем больше будет длительность контакта по сравнению с наибольшим периодом колебания тел.

Таблица 1

Диаметр шара, мм	50,8	47,6	30,2	19,8	9,5
Измеренная длительность, мкс	230	180	130	90	45
Расчетная длительность, мкс	276	258	164	107	51

Таблица 2

	Начало контакта	Фаза 1	Фаза 2	Конец контакта
W_1	W_0	$\frac{W_0}{2}+\sqrt{\frac{W_0^2}{4}-\left(C\frac{x}{L}\right)^2}$	$\frac{W_0}{2}+\sqrt{\frac{W_0^2}{4}-\left(C\frac{x}{L}\right)^2}$	0
W_2	0	$\frac{W_0}{2}-\sqrt{\frac{W_0^2}{4}-\left(C\frac{x}{L}\right)^2}$	$\frac{W_0}{2}+\sqrt{\frac{W_0^2}{4}-\left(C\frac{x}{L}\right)^2}$	W_0

Список литературы: **1.** *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. **2.** *Тимошенко С.П.* Теория упругости. – М.: ОНТИ, 1934. – 300 с. **3.** *Татара И.* Исследование процесса соударения шаров // Теоретические основы инженерных расчетов. – № 1. – 1983. – С. 80. **4.** *Александров Е.В., Соколинский В.Б.* Прикладная теория и расчеты ударных систем. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редколлегию 29.04.04