

125. 5. Колоджный А.В., Вакуленко К.В., Чернобрышко М.В. Яреченко В.Г. Учет тепловыделения при соударении цилиндрических оболочек с различными скоростями скольжения // Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве: Труды 6-й Международной научно-технической конференции, 10-11 октября 2002 г. – Харьков: ХНПК "ФЭД", 2002. – С. 272-275. 6. Петрунин И.Е. Металловедение пайки / Петрунин И.Е., Маркова И.Ю., Екатова А.С. – М.: Металлургия, 1976. – 263 с. 7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 8. Коваленко А.Д. Термоупругость пластин и оболочек. – Киев: Изд-во Киевского университета, 1971. – 284 с.

*Поступило в редколлегию 27.05.04*

УДК 539.3

**С.М.ВЕРЕЩАКА**, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **К ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ**

Пропонується варіант дискретно-структурної теорії багат шарових анізотропних оболонок обертання з дефектами структури у вигляді локальних ділянок непроклею. Рівняння рівноваги та геометричні співвідношення отримані з урахуванням впливу деформацій поперечного зсуву та обтіснення на напружено-деформований стан суцільностінчатих конструкцій із композиційних матеріалів у геометрично нелінійній постановці.

The variant of the discrete - structural theory of the multilayered anisotropic of shells of rotation with defects of structure such as local sites non-gluе is offered. At a conclusion of the equations of balance and geometrical ratio the influence of deformations of cross shift and transverse pressure on is intense – is deformed a status of thin-walled designs from composite materials in vectorially nonlinear production is taken into account.

Постановка контактної задачі механіки многослойних пластинок і оболонок дані в [1-5], где на основі дискретного підходу побудовані функціонали і отримані системи рівнянь для рішення таких задач при умові неідеального контакту шарів. Метод рішення нелінійних задач о контакте между двумя оболочками різної форми і еквідистантними шарами пропонується в книзі [6]. Детальний аналіз останніх результатів і напрямлений розвитку дискретно-структурної теорії шаруватих пластин і оболонок можна знайти в огляді [7].

В даній роботі пропонується варіант дискретно-структурної теорії многослойних анізотропних оболонок обертання з дефектами структури типу локальних ділянок непроклею. При виведенні рівнянь рівноваги і геометричних співвідношень враховується вплив деформацій поперечного зсуву і обжаття на напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів в геометрично нелінійній постановці.

**Постановка задачі.** В відповідності з дискретно-структурною теорією математична модель розглядаємої тут многослойної оболонки складається з  $n$  тонких анізотропних шарів (рис. 1). Тонкою вважається оболонка(шар), якщо величиною відносної товщини  $h/R_{min}$  ( $R_{min}$  – мінімальне значення одного з

главных радиусов кривизны) такой оболочки можно пренебречь по сравнению с единицей. Объем  $n$  жестких слоев равен:  $V = \sum_{i=1}^n V_i$ . Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат  $\alpha^i$  ( $i = 1, 2$ ),  $z^{(k)}$ . Координата  $z^{(k)}$  направлена по общей нормали  $\vec{m}^{(k)}$  к срединной поверхности  $S^{(k)}$  и эквидистантой поверхности  $S_z^{(k)}$   $k$ -го слоя. Индекс “ $z$ ” при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  эквидистантой поверхности  $S_z^{(k)}$ .

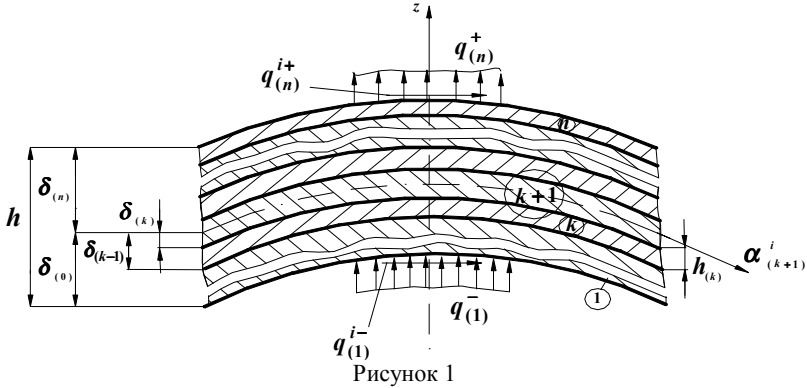


Рисунок 1

Положение точки недеформированной поверхности  $S_z^{(k)}$  будет определяться радиус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}; \quad -\frac{h^{(k)}}{2} \leq z^{(k)} \leq \frac{h^{(k)}}{2}, \quad (1)$$

базисные векторы в точке  $(\alpha^i, z^{(k)})$  поверхности  $S_z^{(k)}$  равны

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)} (\delta_i^j - z^{(k)} b_i^{j(k)}), \quad \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{r}^{(k)}$  – радиус-вектор точки срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{m}^{(k)}$  – нормаль единичной длины к поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\delta_i^j$  – тензорная запись символа Кронекера;

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}; & b_{ij}^{(k)} &= -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)}; \\ b_i^{j(k)} \vec{r}_j^{(k)} &= -\vec{m}_i^{(k)}; & (i, j &= 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

– коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{m}_i^{(k)} = \partial \vec{m}^{(k)} / \partial \alpha^i$  – производная нормали  $\vec{m}^{(k)}$ .

Вектор полного перемещения  $\vec{u}_z^{(k)}$  точки  $k$ -го жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)}, \quad (4)$$

где  $\vec{u}^{(k)}$  – вектор перемещения точек срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{\gamma}^{(k)}$  – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон по направлению нормали к недеформированной срединной поверхности  $S^{(k)}$  в процессе деформации;  $\varphi^{(k)}(z)$  – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине  $k$ -го слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [8];  $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$  – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов  $\vec{u}^{(k)}$ ,  $\vec{\gamma}^{(k)}$ ,  $\vec{\psi}^{(k)}$  записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (5)$$

Тогда радиус-вектор точки  $k$ -го слоя оболочки после деформации запишется

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \quad (6)$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}, \quad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \quad (7)$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (8)$$

где

$$g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_j^{(k)}; \quad g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_j^{(k)*}; \quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)};$$

$$g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)} \vec{m}^{(k)} = 1;$$

$$g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}, \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2). \quad (9)$$

Подставляя в (8) и (9) выражения базисных векторов (2),(7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями

Вывод уравнений равновесия и граничных условий для решения контактных задач слоистых оболочек, как правило, осуществляется на основе вариационного принципа Рейсснера. Считая, что в направлении нормали к срединным поверхностям отдельно взятых слоев оболочки осевые линии общей и локальных систем координат совмещаются и также совмещаются локальные координатные поверхности со срединными поверхностями слоев, вариационное уравнение принципа Рейсснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты  $z$  от единицы до  $n$ . При этом  $F^{(k)}$  – удельная дополнительная работа деформации  $k$ -го слоя,  $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

В общем виде вариация работы внешних сил  $\delta A_R^{(k)}$  определяется для двух вариантов граничных условий  $k$ -го слоя – статических с индексом «1» и геометрических с индексом «2»:

$$\begin{aligned}
\delta A_R^{(k)} = & \iint_{S_1^{(k,k-1)}} (X_{(k,k-1)}^{S\beta} - X_{(k,k-1)}^\beta) \delta u_\beta^{(k,k-1)} dS + \iint_{S_2^{(k,k-1)}} (u_\beta^{(k,k-1)} - u_{S\beta}^{(k,k-1)}) \delta X_{(k,k-1)}^\beta dS + \\
& + \iint_{S_1^{(k,k+1)}} (X_{(k,k+1)}^\beta - X_{(k,k+1)}^{S\beta}) \delta u_\beta^{(k,k+1)} dS + \iint_{S_2^{(k,k+1)}} (u_\beta^{(k,k+1)} - u_{S\beta}^{(k,k+1)}) \delta X_{(k,k+1)}^\beta dS + \\
& + \iint_{l_1^{(k)}} (\Phi_{(k)}^{S\beta} - \Phi_{(k)}^\beta) \delta u_\beta^{(k)} dl + \iint_{l_2^{(k)}} (u_\beta^{(k)} - u_{S\beta}^{(k)}) \delta \Phi_{(k)}^\beta dl + \iiint_{V^{(k)}} P_{(k)}^\beta \delta u_\beta^{(k)} dV . \quad (11)
\end{aligned}$$

Индексом «s» в (11) обозначены заданные величины; индексы «k, k-1», «k, k+1» указывают на нижнюю и верхнюю поверхность  $k$ -го слоя. Если считать, что по сопряженным лицевым поверхностям  $k$ -го слоя выполняются условия идеального контакта (рис. 1):

$$u_\beta^{(k,k-1)} = u_\beta^{(k-1,k)}; \quad X_{(k,k-1)}^\beta = X_{(k-1,k)}^\beta, \quad (12)$$

или в векторном форме -

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z^{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{u}_z^{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2); \\
\bar{X}_{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{X}_{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2), \quad (i=1,2), \quad (13)
\end{aligned}$$

тогда вариацию элементарной работы внешних сил  $\delta A_R$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\delta A_R = & \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \epsilon_{33}^{(k)}) dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + G_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + (\bar{u}^{(k)} - \bar{u}_S^{(k)}) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + \\
& + (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl . \quad (14)
\end{aligned}$$

Здесь  $S_{(k)}$  - срединная поверхность  $k$ -го слоя;  $l_1^{(k)}$ ,  $l_2^{(k)}$  - части контура  $l^{(k)}$ .

Векторы внешних усилий  $\bar{X}_{(k)}$ , моментов  $\bar{M}_{(k)}$  и дополнительных моментов  $\bar{B}_{(k)}$ , которые входят в уравнение (14), определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{(k)} = \bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^- + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} d\bar{z}; \quad \bar{M}_{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \bar{z} d\bar{z}; \\
\bar{B}_{(k)} = \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) d\bar{z} \right), \quad (15)
\end{aligned}$$

где векторы  $\bar{X}_{(k)}^+$ ,  $\bar{X}_{(k)}^-$  включают контравариантные компоненты тензора контактных напряжений  $\sigma_{(k)}^{i3+}$ ,  $\sigma_{(k)}^{i3-}$  ( $i=1,2,3$ ):

$$\bar{X}_{(k)}^+ = \sigma_{(k)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33+} \bar{m}^{(k)*}, \quad \bar{X}_{(k)}^- = \sigma_{(k)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33-} \bar{m}^{(k)*}, \quad (i=1,2). \quad (16)$$

Индексы «+» и «-» указывают на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности  $k$ -го слоя. Аналогичную запись имеют векторы внешней нагрузки  $\bar{q}_{(n)}^+$ ,  $\bar{q}_{(1)}^-$ :

$$\bar{q}_{(n)}^+ = q_{(n)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(n)*} + q_{(n)}^{33+} \bar{m}^{(n)*}; \quad \bar{q}_{(1)}^- = q_{(1)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(1)*} + q_{(1)}^{33-} \bar{m}^{(1)*}, \quad (i=1,2). \quad (17)$$

Вектор  $\bar{P}^{(k)}$  учитывает влияние собственного веса. Контравариантные компоненты  $M_{(k)}^i, M_{(k)}^3$  вектор-момента  $\bar{M}_{(k)}$  относительно базисных векторов  $\bar{r}_i^{(k)*}$  и  $\bar{m}^{(k)*}$  находятся согласно равенства

$$\bar{M}_{(k)} = M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)*} + \bar{m}^{(k)*} M_{(k)}^3. \quad (18)$$

Кроме этого, элементарная работа (14)  $k$ -го слоя оболочки характеризуется главным вектором  $\bar{\Phi}_{(k)}^S$ , главным моментом  $\bar{G}_{(k)}^S$ , дополнительным главным моментом  $\bar{L}_{(k)}^S$ , которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на  $l_1^{(k)}$ , а также главным вектором  $\bar{\Phi}_{(k)}$ , главным моментом  $\bar{G}_{(k)}$ , дополнительным главным моментом  $\bar{L}_{(k)}$ , связанных с напряжениями в точках контура  $l_2^{(k)}$  из-за заданного смещения точек контура  $\bar{u}_S^{(k)}$ .

Второе слагаемое уравнения (10) следует представить в виде

$$\delta \Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta \Pi_{1R}^{(k)} + \delta \Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}) \delta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (20)$$

$$\text{где } \delta \Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)\#} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(k)\#} + \sigma_{(k)}^{33} \delta \varepsilon_{33}^{(k)\#}) dV,$$

$$\delta \Pi_{2R}^{(k)} = - \iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = - \iiint_{V^{(k)}} \{ (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\#}) \delta \sigma_{(k)}^{ij} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\#}) \times \\ \times \delta \sigma_{(k)}^{i3} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\#}) \delta \sigma_{(k)}^{33} \} dV, \quad (i, j = 1, 2).$$

Тогда, подставляя геометрические соотношения (8) в (10),(15),(20) и варьируя независимыми между собой перемещениями и напряжениями, можно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки [9] значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий.

Переходя к физическим компонентам используемых в данной работе тензоров, уравнения равновесия относительно недеформированной ортогональной системы координат  $k$ -го слоя оболочки принимают вид

$$\frac{\partial (B^{(k)} R_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} R_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + R_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - R_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\ + A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} R_{13}^{(k)} + X_1^{(k)}) = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2; \quad A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\ \frac{\partial (B^{(k)} R_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} R_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} R_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} R_{22}^{(k)} - X_3^{(k)}) = 0; \\ \frac{\partial (B^{(k)} M_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} +$$

$$\begin{aligned}
& + A^{(k)} B^{(k)} (M_1^{(k)} - Q_1^{(k)}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\
& \frac{\partial (B^{(k)} L_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} L_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\
& + A^{(k)} B^{(k)} (B_1^{(k)} - L_{13}^{(k)}) = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}). \quad (21)
\end{aligned}$$

При учете обжатия  $k$ -го слоя к семи уравнениям системы (21) добавляется восьмое уравнение равновесия

$$\frac{\partial (B^{(k)} M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)} L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)} - M_3^{(k)}) = 0. \quad (22)$$

При выводе уравнений (21),(22) не учитывается влияние мембранных деформаций на компоненты изгибной деформации. После отбрасывания нелинейных слагаемых более высокого порядка малости физические компоненты тензора тангенциальных усилий  $R_{ij}^{(k)}$  и усилий поперечного сдвига  $R_{i3}^{(k)}$  запишутся

$$\begin{aligned}
R_{11}^{(k)} &\approx T_{11}^{(k)}; \quad R_{22}^{(k)} \approx T_{22}^{(k)}; \quad R_{12}^{(k)} \approx T_{12}^{(k)} + M_{12}^{(k)} k_2^{(k)}; \quad R_{21}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)} + M_{21}^{(k)} k_1^{(k)}; \\
R_{13}^{(k)} &\approx T_{11}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_1^{(k)}; \quad R_{23}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{22}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)}, \quad (23)
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} - \omega_i^{(k)}; \quad \omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - k_1^{(k)} u_1^{(k)}, \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \quad (24)$$

$k_1^{(k)}, k_2^{(k)}$  – главные кривизны,  $A^{(k)}, B^{(k)}$  – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности  $k$ -го слоя.

Кроме уравнений равновесия дополнительно имеют место восемь статических –

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(k)S} &= R_n^{(k)}; \quad \Phi_\tau^{(k)S} = R_\tau^{(k)}; \quad \Phi_m^{(k)} = R_m^{(k)}; \quad G_{(k)}^{Sn} = G_{(k)}^n; \quad H_{(k)}^{S\tau} = H_{(k)}^\tau; \quad L_{(k)}^{Sn} = L_{(k)}^n; \quad L_{(k)}^{S\tau} = L_{(k)}^\tau; \\
M_{(k)S}^{3n} + L_{(k)S}^{3n} &= M_{(k)}^{i3} n_i^{(k)}, \quad (25)
\end{aligned}$$

и восемь геометрических –

$$\bar{u}_S^{(k)} = \bar{u}^{(k)}; \quad \gamma_n^{(k)S} = \gamma_n^{(k)}; \quad \gamma_\tau^{(k)S} = \gamma_\tau^{(k)}; \quad \psi_n^{(k)S} = \psi_n^{(k)}; \quad \psi_\tau^{(k)S} = \psi_\tau^{(k)}; \quad \varepsilon_{33S}^{(k)\#} = \varepsilon_{33}^{(k)\#} \quad (26)$$

граничных условий на части контуров  $l_1^{(k)}$  и  $l_2^{(k)}$  соответственно. В случае среднего изгиба имеет место зависимость  $\varepsilon_{33}^{(k)\#} = \gamma^{(k)}$ .

Отнесенные к единице длины координатных линий недеформированной срединной поверхности  $k$ -го слоя контравариантные компоненты тензоров тангенциальных усилий  $T_{(k)}^{ij}$ , изгибающих и крутящих моментов  $M_{(k)}^{ij}$ , дополнительного изгибающего и крутящего момента  $L_{(k)}^{ij}$ , поперечных сил и дополнительных поперечных сил деформаций сдвига и обжатия  $Q_{(k)}^i, Q_{(k)}^3, L_{(k)}^i, M_{(k)}^{i3}$ , определяются выражениями:

$$T_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} dz; \quad M_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} z dz; \quad Q_{(k)}^3 = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{33} dz; \quad M_{(k)}^{i3} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} z dz;$$

$$L_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} \varphi^{(k)}(z) dz; \quad Q_{(k)}^i = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} dz; \quad L_{(k)}^{i3} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} \varphi^{(k)'}(z) dz, \quad (i, j = 1, 2). \quad (27)$$

Имея уравнения равновесия (21)-(22), граничные условия (25)-(26), физические и геометрические соотношения для каждого  $k$ -го слоя оболочки, несложно связать эти уравнения при помощи условий идеального контакта между слоями (13) по сопряженным лицевым поверхностям. Для оболочки вращения, которая включает в себя  $n$  слоев с соосными поверхностями вращения, разрешающая система уравнений в частных производных имеет вид

$$\frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_o^{(k)} \bar{Y}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + D_2^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)}^2 \partial \alpha_2^{(k)2}} + \bar{f}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

где

$$\bar{Y}^{(k)} = \left\{ T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, k_2^{(k)} M_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \right\}^T, \\ \bar{f}^{(k)} = \left\{ f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)} \right\} \quad D_0^{(k)}, D_1^{(k)}, D_2^{(k)} - \text{квадратные матрицы 14-го}$$

порядка. В качестве основных неизвестных функций принимаются величины, которые определяют граничные условия на боковом контуре  $k$ -го слоя оболочки. Из-за ограниченного объема статьи показать разрешающую систему уравнений, физические и геометрические соотношения в развернутой форме не представляется возможным.

Отдельно следует отметить, что в силу соотношений (27) величина момента  $M_{i3}^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ) равна нулю, поэтому восьмое уравнение равновесия (22) представляет собой недифференциальное тождество, которое выполняется при подстановке в него функций, являющихся решением системы уравнений (21).

В соответствии с общей и местной системами координат, введенной ранее для рассматриваемой многослойной оболочки (рис.1), кинематические условия идеального контакта (13) лицевых поверхностей  $k$ -го слоя и сопряженных с ними поверхностями  $k+1$  и  $k-1$ -го слоя позволяют перемещения срединной поверхности  $k$ -го слоя выразить через перемещения  $k+1$ ,  $k-1$ -го слоя оболочки:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left( \frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left( \frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}, \quad (i = 1, 2), \\ 2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}. \quad (29)$$

Выражения (29) несколько видоизменяются для первого и  $n$ -го слоев.

Используя обозначения (16) статические краевые условия на лицевых поверхностях  $k$ -го слоя (13) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+}, \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (30)$$

Используя геометрические и физические соотношения [8], статические

условия идеального контакта (30), можно записать при помощи деформаций сопряженных слоев.

Внося соотношения (29) в разрешающую систему уравнений (28), а также учитывая статические (25),(30) и геометрические (26) граничные условия, нетрудно получить полную систему уравнений решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Если между  $k$  и  $k + 1$  слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев  $S_z^{(k,k+1)}$  могут возникать неизвестные векторы усилий  $\vec{q}_{(k)}$ ,  $\vec{q}_{(k+1)}$  контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость:  $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$ . Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (10) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{u}_z^{(m)} dS. \quad (31)$$

Усилия контактного взаимодействия  $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$  возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (32)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (32) не выполняется при перемещении точек области  $S_z^{(k,k+1)}$  в процессе деформации, контактное давление  $\vec{q}_{(k)}$  в уравнениях (21),(22) принимает значение  $\vec{q}_{(k)} = 0$ . Статические и кинематические граничные условия на контуре области  $S_z^{(k,k+1)}$  имеют вид зависимостей (25),(26). Имея разрешающую систему уравнений (28) несложно с заданной точностью найти значение контактного давления на основе итерационного метода, предложенного в [6].

Таким образом, кинематические условия идеального контакта (13) лицевых поверхностей  $k$ -го слоя и сопряженных с ними поверхностями нижнего и верхнего слоя накладывают ограничения (29) на тангенциальные и нормальные перемещения  $k$ -го слоя. Аналогично статические условия идеального контакта (30) вносят изменения в характер распределения напряжений сдвига и обжатия в зонах контакта  $k$ -го слоя. Когда кинематические связи на каком-нибудь участке сопряженных лицевых поверхностей отсутствуют приведенные уравнения и граничные условия позволяют составить алгоритм для определения зоны контакта и величины контактного давления.

**Список литературы:** 1. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – №5. – С. 832-836. 2. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика



композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. **3. Пелех Б.Л., Лазько В.А.** Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **4. Паймушин В.И.** Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **5. Паймушин В.И.** Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочности // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. **6. Кантор Б. Я.** Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **7. Пискунов В.Г., Рассказов А.О.** Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. № 2. – С. 22-56. **8. Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **9. Галимов К.З.** Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З. Галимова. - Издательство Казанского университета, 1977. - С. 36–95.

*Поступила в редколлегию 11.05.04.*

УДК 539.3

**Э.Е.ГЕРМАН; В.А.КНЫШ;**

**Б.А.УШАМИРСКИЙ**, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

### **ОБ УПРУГОМ УДАРЕ**

У статті описана розробка інженерних методів розрахунку механічних систем при ударних діях. В основу дослідження покладено метод енергетичного балансу. Із закону збереження механічної енергії визначаються довго тривалість удару, максимальні контактні зусилля й напруження в тілах, що співударяються. Розглянуто пружний удар стержня і кулі об абсолютно жорстку перешкоду, а також ударна взаємодія двох рушійних стержнів. Запропонований підхід дозволяє отримати прості залежності, зручні для інженерного застосування. Проведено порівняння теоретичних результатів з експериментом, яке підтвердило правомірність введених теоретичних передумов. Запропонована в роботі модель пружного удару може бути застосована для невеликих швидкостей співудару.

This paper reports about development of engineering methods for mechanic systems by impingement attack. The base of investigation consists on energy balance method. Duration of shock, maximum contact efforts and strain items in impingement items define by law of conservation of mechanical energy. Elastic impact of rod and sphere on absolute stiff barrier and percussion interaction of two moving rod be described. Method proposed in this paper permits to get the simple compute dependent, convenient to engineering application. Theoretic results are compared with experiment and trust of entry theoretic prerequisites is supported. Model of elastic impact proposed in the paper can be used for not great speeds of item in the moment of impingement.

В литературе рассмотрение удара фиксируется большей частью на моментах «до» и «после», а собственно взаимодействие описывается лишь качественно. Такое положение может быть объяснено весьма разнообразным подходом к решению конкретных задач. Настоящая статья посвящена оценке величин, характеризующих упругий удар, на основе энергетического баланса.

1. Рассмотрим удар стержня о жесткую преграду. Длина  $L$ , поперечное сечение  $S$ , а модуль упругости  $E$ , плотность  $\rho$  материала стержня, а также начальная скорость  $W_0$  заданы. Известно, что удар состоит из двух симметрич-