

теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информативные показатели остаточного ресурса – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов с учетом снижения предела выносливости в виде произвольной функции времени, а также учитывать различные модели накопления повреждений и различные законов распределения накопленной меры повреждения в диагностируемый момент времени.

**Список литературы:** 1. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М. Машиностроение, 1984. – 312 с. 2. *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с. 3. *Жовдак В.А., Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. 4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. –М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. 5. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М. :Сов. радио,1977. – 488 с.

*Поступила в редколлегию 25.05.2005*

УДК 539.3

**О.О.ЗАМУЛА**, НТУ «ХП»

## **УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ У РОЗРАХУНКАХ НА ПОВЗУЧИТЬ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

В роботі надано метод розв'язування геометрично нелінійних початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання, що побудовані на базі методу скінченних елементів (МСЕ) та рівнянь стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. В оболонках враховано деформацію поперечного зсуву. Розглянуто приклад, за яким встановлено якісні відмінності розв'язків задач у геометрично лінійній і нелінійній постановках.

In article the method of the solution of the initial-boundary value problems of the creep theory of shells of revolution is given, which one are constructed on the basis of finite element method (FEM) and equations of state with allowance creep-damage process. The shells with deformation of transversal shift and geometrical nonlinearity are reviewed at final normal displacements. The example of geometrical nonlinearity calculation is given.

**Актуальність теми.** Тонкостінні оболонки є важливими елементами різноманітних конструкцій, що найбільш поширені у турбінобудуванні, космічній, авіаційній техніці. Тонкостінними оболонками є герметичні відсіки, баки, трубопроводи і багато інших конструкцій. У процесі їхньої тривалої експлуатації виникає явище повзучості, що є складною науковою проблемою. Методи розв'язування задач повзучості об'єктів, математичними моделями яких є оболонки обертання, добре відомі з літератури, наприклад [1-4]. Разом з цим, за аналізом публікацій можна зробити висновок, що залишаються недостатньо вивченими такі питання, як врахування деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійно-

сті в оболонках при повзучості з пошкоджуваністю. Ці питання є актуальними в механіці оболонок. В роботі запропоновано підхід щодо побудови розв'язувальних рівнянь повзучості оболонок обертання з урахуванням пошкоджуваності матеріалу, деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності. Дані рівняння побудовані із використанням методу скінченних елементів.

**Постановка проблеми.** У роботі розглядаються тіла у вигляді тонкостінних оболонок обертання (рис. 1), що деформуються в умовах осьосиметричного навантаження. Тут вісь  $x$  є віссю обертання,  $\theta$  – кут між дотичною до твірної і віссю обертання. Локальною системою координат є ортогональна система координат  $(z, s)$ , при цьому вісь  $z$  направлено по нормалі до твірної, а  $s$  – вздовж дотичної до твірної. Основні кінематичні і статичні рівняння теорії тонких оболонок сформульовано в роботі в межах гіпотез Тимошенка при скінченних нормальних прогинах [5]:

$$e_{ss} = \Omega_{ss} + z\chi_{ss}; \quad e_{\varphi\varphi} = \Omega_{\varphi\varphi} + z\chi_{\varphi\varphi}; \quad e_{sz} = \Omega_{sz}, \quad (1)$$

де  $e_{ss}$ ,  $e_{\varphi\varphi}$ ,  $e_{sz}$  – повні деформації – осьова, колова і зсувна, відповідно, у довільній точці оболонки;

$\Omega_{ss}$ ,  $\Omega_{\varphi\varphi}$  – деформації серединної поверхні, осьова і колова, відповідно;

$\chi_{ss}$ ,  $\chi_{\varphi\varphi}$  – зміни кривизн серединної поверхні оболонки.

Співвідношення для них мають вигляд [5]:

$$\Omega_{ss} = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u \cdot \sin\theta + w \cdot \cos\theta), \quad 2\Omega_{sz} = \gamma_{sz} + \frac{dw}{ds}, \quad (2)$$

$$\chi_{ss} = \frac{d\gamma_{sz}}{ds}, \quad \chi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left[ \gamma_{sz} \sin\theta + \frac{\cos\theta}{r} (u \cdot \sin\theta + w \cdot \cos\theta) \right],$$

де  $u$ ,  $w$  – переміщення точок серединної поверхні оболонки вздовж осей  $s$  і  $z$ , відповідно;

$\gamma_{sz}$  – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента під час деформування у напрямку  $s$ .

Підкресленою лінією в (2) позначено геометрично нелінійну складову.

Оболонку обертання апроксимуємо конічними оболонками, що з'єднані вздовж твірної, яка утворює серединну поверхню оболонки. Товщина стінки  $h$  є сталою в межах одного скінченного елемента. Елемент оболонки показано на рис. 2.

Кожний вузол має шість степенів вільності (рис. 2). У локальній системі координат елемента у якості степенів вільності виступають компоненти вектору  $v$ :

$$v^T = \{u, w, \gamma_{sz}\} \quad (3)$$

та їхні похідні за координатою  $s$  у відповідному вузлі:

$$q_i^T = \{q_1, q_2, \dots, q_6\} = \{u(0), u'(0), w(0), w'(0), \gamma_{sz}(0), \gamma'_{sz}(0)\},$$

$$q_j^T = \{q_7, q_8, \dots, q_{12}\} = \{u(L), u'(L), w(L), w'(L), \gamma_{sz}(L), \gamma'_{sz}(L)\}. \quad (4)$$

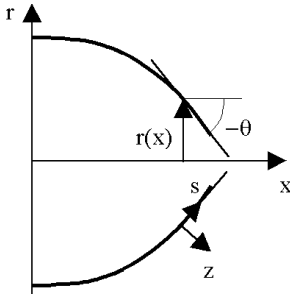


Рисунок 1

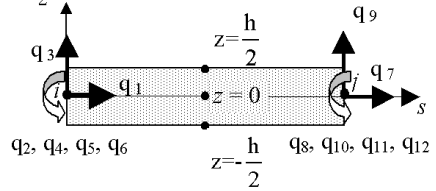


Рисунок 2

Використання такої кількості узагальнених координат (3) потребує апроксимації компонент (3) кубічними поліномами. Внаслідок того, що більш зручними у процесі розв'язування задачі є нормовані координати, зроблено перехід від  $s \in [0, L]$  до  $\xi \in [-1; 1]$ . Тоді:

$$\begin{aligned} u &= q_1 N_1 + \frac{L}{2} q_2 N_2 + q_7 N_3 + \frac{L}{2} q_8 N_4, \\ w &= q_3 N_1 + \frac{L}{2} q_4 N_2 + q_9 N_3 + \frac{L}{2} q_{10} N_4, \\ \gamma_{sz} &= q_5 N_1 + \frac{L}{2} q_6 N_2 + q_{11} N_3 + \frac{L}{2} q_{12} N_4, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $N_i$  – ермітові поліноми третього порядку:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)^2 (2+\xi)/4, \quad N_2 = (\xi-1)(\xi^2-1)/4, \\ N_3 &= (1+\xi)^2 (2-\xi)/4, \quad N_4 = (\xi-1)(\xi+1)^2/4. \end{aligned} \quad (6)$$

При розв'язуванні задачі методом скінченних елементів на базі принципу мінімуму потенціальної енергії за основу приймається повна потенціальна енергія скінченного елемента, яка визначається різницею енергії пружної деформації  $U$  і роботи зовнішніх сил  $A$ :

$$\Pi = U - A. \quad (7)$$

Функціонал енергії пружної деформації оболонки як тривимірного тіла має вигляд інтеграла за об'ємом  $V$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV. \quad (8)$$

Вектор напруження в оболонці  $\sigma$  визначено за законом Гука:

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (9)$$

де  $D$  – матриця пружних констант матеріалу,

Вектор пружної деформації  $\varepsilon$  можна записати як різницю повної деформації  $\varepsilon$  і деформації повзучості  $c$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon} - c. \quad (10)$$

У рівності (10) враховано, що у вектору повної деформації  $e = \varepsilon + c$ , де  $c^T = \{c_{ss}, c_{\varphi\varphi}, 2c_{sz}\}$ , відокремлено лінійну та нелінійну складові, відповідно до (2):

$$\varepsilon_L^T = \{\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, 2\varepsilon_{sz}\}, \quad \tilde{\varepsilon}^T = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \quad 0 \quad 0 \right\}, \quad (11)$$

У подальшому для стислості, якщо у задачі не враховується геометрично нелінійна складова (11) використовуватимемо позначення  $\tilde{\varepsilon} = 0$ , у протилежному випадку  $\tilde{\varepsilon} \neq 0$ .

Робота зовнішніх сил  $p$ , які прикладені до серединної поверхні оболонки  $S$ , має вигляд скалярного добутку цих сил на спричинені ними переміщення  $v$ :

$$A = \int_S v^T p dS. \quad (12)$$

Рівновага одного скінченного елемента оболонки в довільний час відбувається за умов мінімуму повної потенційної енергії  $\Pi$  за відомих для цього часу деформацій повзучості [5]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{\partial (U - A)}{\partial q} = 0. \quad (13)$$

З урахуванням (8)-(10), (12) функціонал (7) запишеться відносно векторів деформацій (11) та вектору переміщення (3):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_L^T D \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}^T D \tilde{\varepsilon} + c^T D c) dV + \\ & + \int_V (\tilde{\varepsilon}^T D \varepsilon_L - \varepsilon_L^T D c - \tilde{\varepsilon} D c) dV - \int_S v^T p dS. \end{aligned} \quad (14)$$

Виконуючи перетворення в (14), шляхом підстановки до нього (11) з урахуванням співвідношень (1), (2), (5), отримуємо варіацію за узагальненими незалежними координатами цього функціонала для оболонки в цілому. З умови мінімуму повної потенційної енергії (13) із функціоналу (14) одержимо розв'язувальне рівняння МСЕ відносно глобальних координат, яке буде нелінійним відносно вектора  $q$ , складеного з узагальнених координат в точках твірної оболонки, де елементи з'єднані:

$$\tilde{K}(q, c) + Kq = P + P_c, \quad (15)$$

де  $\tilde{K}(q, c)$  – нелінійно залежна від  $q$  вектор-функція;

$P$  – вектор зведених до вузлів узагальнених сил, що діють на оболонку;

$P_c$  – вектор фіктивних сил, що пов'язаний з повзучістю.

$K$  – матриця, яка у випадку  $\tilde{\varepsilon} = 0$  є глобальною матрицею жорсткості системи  $Kq = P + P_c$ .

Розв'язувальне рівняння (15) повинно доповнитися рівняннями стану матеріалу оболонки при повзучості з пошкоджуваністю для визначення вектору деформацій повзучості  $c$  на кожному кроці у часі:

$$\dot{c}_{ss}(\sigma_i, \omega) = \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \left( \sigma_{ss} - \frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi} \right), (s \leftrightarrow \varphi); \quad 2\dot{c}_{sz}(\sigma_i, \omega) = \frac{3B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \sigma_{sz},$$

$$\dot{\omega}(\sigma_e, \omega) = \frac{A(\alpha \times \max\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\} + (1-\alpha)\sigma_i)^k}{(1-\omega^r)^p}, \quad \omega(0)=0, \quad \omega(t_*)=\omega_*, \quad (16)$$

де  $c_{ss}$ ,  $c_{\varphi\varphi}$ ,  $c_{sz}$ ,  $\sigma_{ss}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{sz}$  – компоненти тензорів деформацій повзучості та напружень;

$\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  – еквівалентні за Мізесом та головні напруження;

$\omega$ ,  $t_*$  – параметр пошкоджуваності та час до руйнування.

Різні матеріали оболонки можна конкретизувати прийняттям значень для матеріальних сталей  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $k$ ,  $\alpha$ , що отримали назву констант повзучості, та, зазвичай,  $E$ ,  $\nu$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Метод розв'язування системи (15) надано у роботі [6]. Для розгляду процесу повзучості у запропонованому методі використано схему покроково-го подовження у часі за параметром вектора деформацій повзучості, за допомогою чисельного інтегрування рівнянь стану на кроці методом Рунге-Кути-Мерсона [3, 7].

**Приклад.** Розглянемо повзучість циліндричної оболонки, розрахункову схему якої подано на рис. 3. Навантаження здійснюється осьовою силою на краю з рухомим шарніром. Величина цієї сили за модулем  $|T| = 174,3$  кН/м. Товщина стінки є сталюю і становить  $h = 0,4$  см. Інші геометричні параметри:  $R = 1$  м,  $L = 0,5$  м. Пластина виготовлена з ізотропного матеріалу D16AT, пружні характеристики якого такі: модуль пружності  $E = 65$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; а константи повзучості матеріалу, що входять до рівнянь стану (16), при температурі  $300$  °С мають наступні значення:  $B = 0,34 \cdot 10^{-7}$  МПа<sup>-n</sup>/год,  $A = 1,9 \cdot 10^{-7}$  МПа<sup>-k</sup>/год,  $r = 1,379$ ,  $\alpha = 0$ ,  $n = m = k = p = 2,93$ .

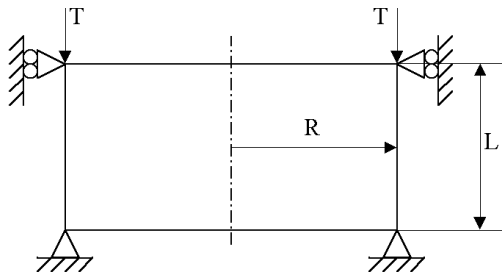


Рисунок 3 – Розрахункова схема

Розрахунки проводились для двох випадків:  $\tilde{\epsilon}=0$  і  $\tilde{\epsilon} \neq 0$ . У кожному з них розглядалася задача, у якій сила  $T$  прикладена як розтягувальна

( $T = 174,3$  кН/м) і як стискувальна ( $T = -174,3$  кН/м), тобто сили є однаковими за модулем. При розв'язуванні задачі було виявлено такі закономірності: у випадку, коли геометрично нелінійна складова не враховується ( $\tilde{\epsilon}=0$ ), при прикладенні різних за знаками але однакових за модулем сил отримано однаковий час до руйнування. При врахуванні геометричної нелінійності ( $\tilde{\epsilon} \neq 0$ ) у задачі, де діє стискувальна сила, час до руйнування є значно меншим, а у задачі, де діє розтягувальна сила, час до руйнування є більшим від того значення, що отримано при  $\tilde{\epsilon}=0$ . У таблиці наведено результати цих розрахунків.

Характер зростання у часі максимальних прогинів  $w_{\max}$  до моменту руйнування  $t_*$  для цих чотирьох випадків приведено на рис. 4. Графіки побудовано у нормованих координатах. Штриховими лініями позначено результати, що отримані при  $\tilde{\epsilon}=0$ , суцільними – при  $\tilde{\epsilon} \neq 0$ . Криві 1, що лежать вище осі абсцис, отримані у задачі, де діє стискувальна сила. Нижні криві 2 отримані у задачі, де осьова сила є розтягувальною.

Час до руйнування, год		
	T, кН/м	
	174,3	-174,3
$\tilde{\epsilon}=0$	27,62	27,62
$\tilde{\epsilon} \neq 0$	39,58	1,67

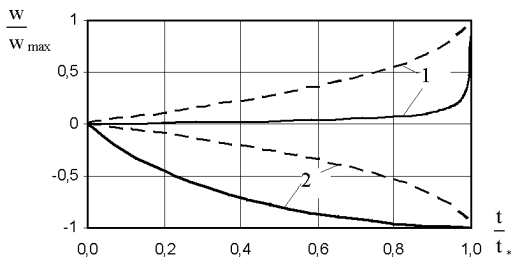


Рисунок 4 – Зростання максимальних прогинів у часі

Як це видно із рис. 4, врахування геометричної нелінійності у задачі призводить не лише до кількісно, але і до якісно інших розв'язків. Так, при  $\tilde{\epsilon}=0$  отримуємо симетричні графіки відносно осі абсцис, тоді як при врахуванні геометричної нелінійності графіки 1 і 2 суттєво відрізняються один від одного. Очевидно, це пояснюється тим, що дія стискувальної сили призводить до підвищеного моментного стану у оболонці. Внаслідок цього процес повзучості відбувається інтенсивніше, ніж при розтязі.

**Висновок.** У багатьох роботах, наприклад, [5,7] було встановлено, що нехтування геометричною нелінійністю у задачах теорії пружності може при-

звести до спотворених результатів. Розв'язки, що отримано для розглянутого у статті прикладу, наочно ілюструють важливість врахування геометричної нелінійності і у задачах на повзучість для наближення математичної моделі об'єкту до його реального змісту.

**Список літератури:** 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 752 с. 2. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep life-time estimations // *Tech. Mech.*, 20, (2000). – P. 215-226. 3. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep - damage conditions // *Arch. Appl. Mech.*, 67, (1997). – P. 339-352. 4. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с. 5. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с. 6. *Морачковский О.К., Замула О.О.* Метод розв'язування задач повзучості геометрично нелінійних оболонок обертання // *Вісник НТУ «ХП»*. Збірка наукових праць. Харків: – 2004. – Вип.31. – С. 123-127. 7. *Мяченко В.И., Фролов А.Н., Кармишин А.В. и др.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

*Надійшла до редколегії 30.06.2005*

УДК 539.3

**С.П.ИГЛИН**, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков, Украина  
**А.Е.КУЛАЧЕНКО**, Ph. D., Mid Sweden University, Sundsvall, Sweden  
**А.М.СЯРОВ**, канд.техн.наук, Экономический университет, Варна, Болгария

## **СЖАТИЕ ГИБКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ДУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ**

Розв'язана задача про стиснення абсолютно гнучкої сферичної оболонки, накачаної газом, між двома площинами. Враховуються великі прогини, зменшення товщини оболонки при її розтягненні та нелінійні фізичні співвідношення. Початковий радіус надутої оболонки знаходиться з розв'язання системи нелінійних рівнянь. Процес стискання проводиться крок за кроком, з лінеаризацією рівнянь на кожному кроці. Наведений числовий приклад.

The problem about tightening between two plains of an absolutely flexible spherical shell, pumped by gas, is decided. The large displacements, decrease of a shell thickness in an process of its tension and non-linear physical ratios are allowed. Primary radius of a pumped shell receives from a solution of a system of non-linear equations. The compression process is carried out step by step, with a linearization of equations on each step. The numerical example is presented.

### **1. Постановка задачи**

Предметом исследования в данной статье является абсолютно гибкая сферическая оболочка, толщина которой в ненагруженном состоянии постоянна. Ее материал воспринимает только растягивающие усилия и не работает на сжатие, изгиб и сдвиг. Вначале она накачивается газом и находится под внутренним давлением. Затем оболочка сжимается между двумя плоскостями. Исследуется поведение такой оболочки в процессе сжатия. Целью иссле-