2000. – Т. 1. – С. 883-888. **7.** *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. **8.** *Жовдак В.А, Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов: Монография. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. **9.** *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.

Поступила в редколлегию 29.05.2005

УДК 62-192.624.041

В.А.ЖОВДАК, докт.техн.наук, ***Л.Ф.ТАРАСОВА***, НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ПРИ УСТАЛОСТНЫХ ОТКАЗАХ

Запропоновано методику прогнозування залишкового ресурсу елементів конструкцій на основі використання кінетичних рівнянь для опису міри пошкодження і математичного апарату теорії марковських процесів. У результаті визначаються найбільш інформаційні показники залишкового ресурсу – ймовірність безвідмовної роботи й щільність імовірності відмовлень. Методика дозволяє враховувати випадковість процесу навантаження, зниження границі витривалості

The approach of the construction element's residual resource prediction, based on the use of kinetic equations for description of the measure of damage and the mathematical tool for Markoff's process theory is proposed. As the result, the most informative reliability characteristics, such as no-failure operation probability and probability density of failures, are determined. This approach allows take proper account of the random loading, fatigue point decrease.

На этапе проектирования различных конструкций, как правило, производится прогнозирование их ресурса. Это так называемый проектный ресурс должен быть обеспечен на этапах изготовления и эксплуатации путем соблюдения соответствующих регламентируемых норм. Однако, как показывает практика эксплуатации машиностроительных конструкций, проектный ресурс может существенно отличаться от фактического ресурса в силу недостоверности или неполноты исходной информации, используемой при проектировании о реальных условиях эксплуатации и свойствах материала конструкции. В связи с этим возникает актуальная проблема оценки остаточного ресурса различных конструкций после определенного срока эксплуатации.

В данной работе предлагается подход к прогнозированию остаточного ресурса элементов конструкций при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов.

Постановка задачи. Предполагается, что процесс нагружения $y(t)$ является узкополосным случайным процессом с огибающей $\lambda(t)$ и несущей частотой ω.

Введем меру накопления повреждений $z(t)$ в элементах конструкций при случайном воздействии и постепенных отказах, происходящих в результате накопления различного рода повреждений. В момент времени t_k $z(t_k) = z_0$, а в момент разрушения $t = t^*$ $z(t^*) = z^*$. Кинетическое уравнение повреждаемости (КУП), описывающее процесс накопления повреждений при постепенных отказах механического происхождения, в самом общем виде можно представить [1, 2]

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z(t), \lambda(t), y_m, R(t)], \tag{1}$$

здесь $F[\ldots]$ – детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция, $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметра нагруженения при гармоническом нагружении, y_m – среднее значение, $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности. Кинетические уравнения, описывающие скорость накопления повреждений, классифицируются в зависимости от модели, заложенной в них: линейные, нелинейные и автомодельные. В дальнейшем рассматривается автомодельная гипотеза накопления повреждений, для которой в правой части КУП можно выделить явную зависимость от функции меры повреждений [1, 2] и уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z, \lambda] = F_1[\lambda] F_2[z] = Cz\lambda^m, \quad \lambda \geq \sigma_{-1}, \tag{2}$$

где $C = \dfrac{\omega}{2\pi N_0 \sigma_{-1}^m}$; N_0, σ_{-1}^m, m – константы, определяемые по кривой Велера.

Процесс накопления повреждений $z(t)$ будем считать марковским процессом, условия применимости этой гипотезы обосновываются в работах [2,3]. В этом случае одномерная плотность вероятности $f(z,t)$ определенная в момент времени t на интервале $z \in [0, \ \Delta]$, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [5]

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}[A(z) f(z,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(z) f(z,t)] = -\frac{\partial}{\partial z} G(z,t), \tag{3}$$

где $G(z,t)$ – поток вероятности

$$G(z,t) = A(z) f(z,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}[B(z) f(z,t)]. \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\lim_{z \to 0,\Delta} G(z,t) = 0, \quad \text{или} \quad \lim_{z \to 0,\Delta} f(z,t) = 0. \tag{5}$$

Начальные условия:

$$\lim_{t \to 0} f(z,t) = f_0(z), \tag{6}$$

где $f_0(z) = f(z,t_k)$ – значение плотности меры повреждений в момент времени t_k.

Коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ уравнения (3) определяются в соответствии со стохастическим дифференциальным уравнением (1) при условии временной симметрии функции F и стационарности процесса $\lambda(t)$ по следующим формулам

$$A(z) = \langle F[...] \rangle + \frac{1}{4}\frac{dB(z)}{dz(z)} = A^*(z) + \frac{1}{4}\frac{dB(z)}{dz(z)}, \tag{7}$$

$$B(z) = 2\int_0^\infty K_{FF}(\tau)d\tau, \tag{8}$$

где $A^*(z) = \langle F[...] \rangle$ – среднее значение функции F, вычисленное при условии $z(t)$ = const, K_{FF} – корреляционная функция F.

При использовании КУП в виде (2) коэффициенты $A^*(z)$ и $B(z)$ в соответствии с соотношениями (7) и (8) определяются следующими выражениями

$$A^*(z) = C(2\sigma^2)^{m/2} z\left[\Gamma(m/2+1) - \Gamma^*(m/2+1)\right] = \tilde{A}z, \tag{9}$$

$$B(z) = \frac{C^2 z^2 (2\sigma^2)^m}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(k!)^2}\left[\Gamma(m/2+k+1) - \Gamma^*(m/2+k+1)\right]\right\}^2 = \tilde{B}z^2, \tag{10}$$

где $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1}\exp(-x)dx$ – гамма-функция, $\Gamma^*(m)$ – неполная гамма-функция, σ^2 – дисперсия процесса нагружения, α – коэффициент затухания корреляционной функции огибающей.

При получении соотношений (9), (10) предполагалось, что $y(t)$ - нормальный процесс, огибающая процесса – $\lambda(t)$ подчиняется релеевскому закону, а также использовалось разложение двумерной релеевской плотности вероятности в ряд по полиномам Лагера нулевого порядка.

Уровни динамических напряжений в элементах конструкций, как правило, ниже предела выносливости, несмотря на это, имеют место усталостные повреждения, причиной которых, как известно, является снижение в процессе эксплуатации прочностных характеристик материала, в частности снижение предела выносливости. Учет этого фактора осуществляется путем представления предела выносливости в виде убывающей функции времени

$$\sigma_{-1}(t) = \phi(t)\sigma_{-1}, \tag{11}$$

здесь $\phi(t)$ – убывающая функция времени.

Коэффициенты уравнения ФПК в этом случае также будут зависеть от времени

$$A(z,t) = \left(\frac{\tilde{A}}{\phi^m(t)} + \frac{\tilde{B}}{2\phi^{2m}(t)}\right)z = \overline{A}(t)z, \tag{12}$$

$$B(z,t) = \frac{\tilde{B}}{\phi^{2m}(t)}z^2 = \overline{B}(t)z^2. \tag{13}$$

Метод решения. Для решения уравнения ФПК используется метод характеристических функций [3]. В соответствии с используемым методом умножим соотношение (2) на $e^{i\varpi z}$ и проинтегрируем по z в пределах $z \in [0, \Delta]$. Произведя интегрирование по частям в правой части уравнения (2) с учетом удовлетворения граничных условий (4), получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega,t)}{\partial t} = i\omega \int_0^\Delta A(z,t) f(z,t) e^{i\omega z} dz - \frac{\omega^2}{2} \int_0^\Delta B(z,t) f(z,t) e^{i\omega z} dz . \qquad (14)$$

Плотность вероятности может быть выражена через значения характеристической функции в дискретном ряде точек $\Theta(\omega_k,t)$ [4]

$$f(z,t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^{N} \Theta(\omega_k,t)\, e^{-i\omega_k z} , \qquad (15)$$

$$\omega_k = 2\pi k/\Delta. \qquad (16)$$

Используя выражение (15) уравнение (14) можно представить

$$\frac{\partial \Theta(\omega,t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^{N} \Theta(\omega_k,t) \left[i\omega \int_0^\Delta A(z,t) e^{i\omega z} e^{-i\omega_k z} dz - \frac{\omega^2}{2} \int_0^\Delta B(z,t) e^{i\omega z} e^{-i\omega_k z} dz \right]. \qquad (17)$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial \Theta(\omega,t)}{\partial t} = \sum_{k=-N}^{N} d_k(\omega,t) \Theta(\omega_k,t) , \qquad (18)$$

где
$$d_k(\omega,t) = \frac{1}{\Delta} \left[i\omega a_k(\omega,t) - \frac{\omega^2}{2} b_k(\omega,t) \right], \qquad (19)$$

$$a_k(\omega,t) = \int_0^\Delta A(z,t) e^{iz(\omega-\omega_k)} dz , \quad b_k(\omega,t) = \int_0^\Delta B(z,t) e^{iz(\omega-\omega_k)} dz . \qquad (20)$$

Для любого значения $\omega = \omega_m = 2\,\pi\, m\,/\Delta$ можно записать уравнение (18). Варьируя $m = \overline{1, 2N+1}$, получим систему $2N+1$ дифференциальных уравнений. Запишем полученную систему в матричном виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Theta} , \qquad (21)$$

где $\boldsymbol{\Theta}$ – вектор с элементами $\Theta(\omega_m,t)$, $\boldsymbol{D}$ – матрица с элементами $D_{mk} = d_k(\omega_m,t)$. Система дифференциальных уравнений (21) решается численно. В случае независимости матрицы $\boldsymbol{D}$ от времени существует аналитическое решение уравнения (21)

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0 \exp(\boldsymbol{Dt}) , \qquad (22)$$

где $\boldsymbol{\Theta}_0$ – вектор начальных условий.

Определение основных показателей надежности. Полученные значения характеристической функции в дискретном ряде точек $\Theta(\omega_m,t)$, позволяют получить плотность вероятности меры повреждений $f(z,t)$, по которым определяются на отрезке времени $[t_k, t]$ основные показатели надежности для кумулятивных моделей накопления повреждений [1, 3]: вероятность безотказной работы (ВБР)

$$P(t)=\int_0^{z_{np}} f(z,t)dz\,, \qquad t\in[t_k,t] \tag{23}$$

и плотность вероятности отказов (ПВО)

$$q(t)=-\frac{dP(t)}{dt}\,, \qquad t\in[t_k,t]\,. \tag{24}$$

Получим соотношение для ВБР через значения характеристической функции в дискретном ряде точек. Для этого воспользуемся соотношением для плотности вероятности повреждаемости (15), в суммировании выделим особую точку $k=0$, учитывая, что $\Theta(0)=1$ и производя интегрирование, имеем

$$P(t)=\frac{1}{\Delta}\left\{z_{np}+\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}\Theta(\omega_k,t)\left(\frac{1-e^{-i\omega_k z_{np}}}{i\omega_k}\right)\right\}, \qquad t\in[t_k,t]\,. \tag{25}$$

Используя полученное соотношение (25) и уравнение (18) запишем соотношение для ПВО

$$q(t)=-\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}\sum_{m=-N}^{N}d_k(\omega_m)\Theta(\omega_k,t)\left(\frac{1-e^{-i\omega_k z_{np}}}{i\omega_k}\right), \qquad t\in[t_k,t]\,. \tag{26}$$

Таким образом, полученные соотношения позволяют определять основные характеристики надежности системы.

Численные исследования Соотношения (12), (13) позволяют получить аналитические выражения для $a_k(\omega)$, $b_k(\omega)$ путем интегрирования (20)

$$a_k(\omega,t)=\begin{cases}\dfrac{\Delta}{i(\omega-\omega_k)}\overline{A}(t), & \omega\neq\omega_k\\[2ex] \dfrac{\Delta^2}{2}\overline{A}(t), & \omega=\omega_k\end{cases}, \tag{27}$$

$$b_k(\omega,t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\Delta^2}{i(\omega-\omega_k)}+\dfrac{2\Delta}{(\omega-\omega_k)^2}\right]\overline{B}(t), & \omega\neq\omega_k\\[2ex] \dfrac{\Delta^3}{3}\overline{B}(t), & \omega=\omega_k\end{cases}. \tag{28}$$

Подставляя соотношения (27), (28) в (19) и произведя соответствующие преобразования с учетом (16), получим

$$D_{km}=\begin{cases}\dfrac{m}{m-k}\overline{A}(t)-\left(\dfrac{\pi m^2}{i(m-k)}+\dfrac{m^2}{(m-k)^2}\right)\overline{B}(t), & m\neq k\\[2ex] i\pi m\,\overline{A}(t)-\dfrac{2}{3}\pi^2 m^2\overline{B}(t), & m=k\end{cases}. \tag{29}$$

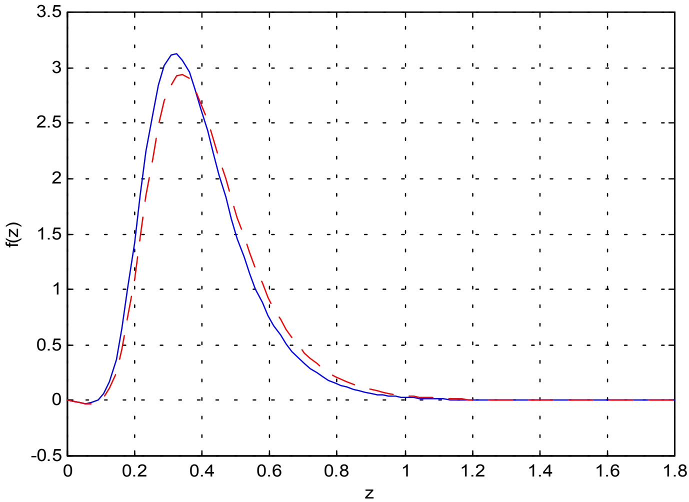

Рисунок 1– Плотности вероятности меры повреждений

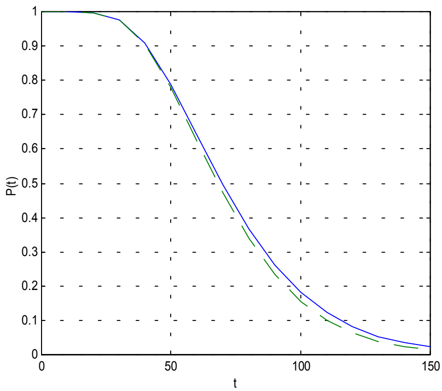

Рисунок 2 – ВБР

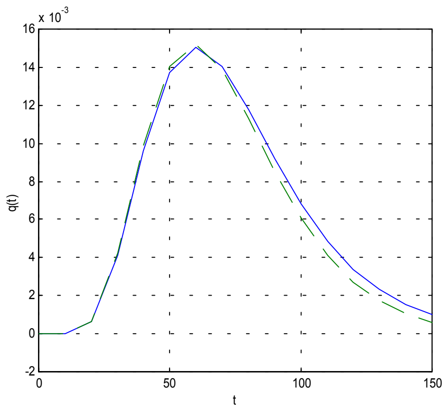

Рисунок 3 – ПВО

Дальнейший алгоритм реализован численно в системе MATLAB 5.2. Численное интегрирование уравнения (21) осуществлялось методом Рунге-Кутта, начальные условия задавались нормальным законом со следующими значениями параметров: $m_0 = z_0 = 0{,}1$; $\sigma_{z_0}^2 = 0.0001$. Зависимость от времени коэффициентов ФПК задавалась в следующем виде $\overline{A}(t) = 0.01 + k_a t$, $\overline{B}(t) = 0.001 + k_b t^2$. Расчеты производились для двух вариантов значений k_a, k_b. Полученные в результате численных исследований плотности вероятности меры повреждений, ВБР, ПВО приведены на рис. 1-6. Пунктирные линии соответствуют расчетам с учетом снижения предела выносливости, сплошные – соответствуют расчетам с постоянным пределом выносливости. На рис. 1-3 приведены результаты расчетов при следующих значениях $k_a = 7 \cdot 10^{-6}$, $k_b = 6 \cdot 10^{-10}$.

Аналогично на рис. 4-6 приведены результаты расчетов при следующих значениях $k_a = 2 \cdot 10^{-5}$, $k_a = 7 \cdot 10^{-6}$.

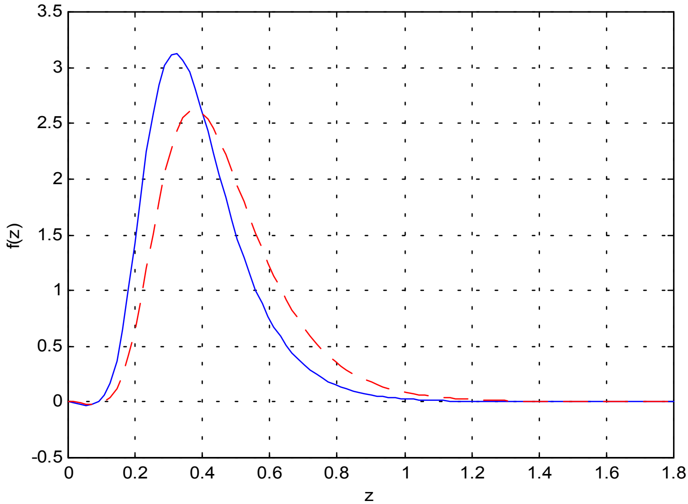

Рисунок 4 – Плотности вероятности меры повреждений

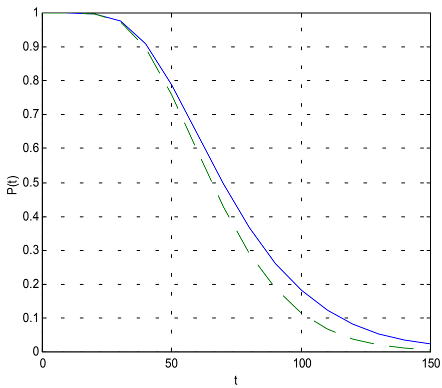

Рисунок 5 – ВБР

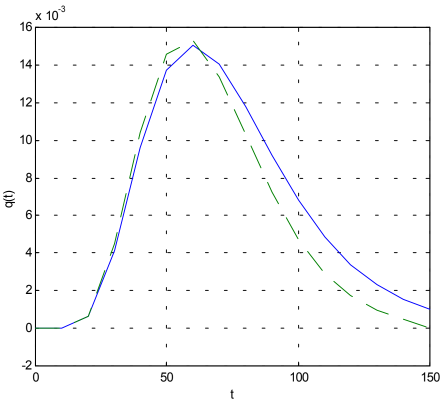

Рисунок 6 – ПВО

Выводы. Решена задача прогнозирования остаточного ресурса при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информационные показатели остаточного ресурса – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов с учетом снижения предела выносливости в виде произвольной функции времени, а также учитывать различные модели накопления повреждений и различные законов распределения накопленной меры повреждения в диагностируемый момент времени.

Список литературы: 1. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М. Машиностроение, 1984. – 312 с. **2.** *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с. **3.** *Жовдак В.А., Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. **4.** *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. –М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **5.** *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М. :Сов. радио,1977. – 488 с.

Поступила в редколлегию 25.05.2005

УДК 539.3

О.О.ЗАМУЛА, НТУ «ХПІ»

УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ У РОЗРАХУНКАХ НА ПОВЗУЧІСТЬ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

В роботі надано метод розв'язування геометрично нелінійних початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання, що побудовані на базі методу скінченних елементів (МСЕ) та рівнянь стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. В оболонках враховано деформацію поперечного зсуву. Розглянуто приклад, за яким встановлено якісні відмінності розв'язків задач у геометрично лінійній і нелінійній постановках.

In article the method of the solution of the initial-boundary value problems of the creep theory of shells of revolution is given, which one are constructed on the basis of finite element method (FEM) and equations of state with allowance creep-damage process. The shells with deformation of transversal shift and geometrical nonlinearity are reviewed at final normal displacements. The example of geometrically nonlinearity calculation is given.

Актуальність теми. Тонкостінні оболонки є важливими елементами різноманітних конструкцій, що найбільш поширені у турбінобудуванні, космічній, авіаційній техніці. Тонкостінними оболонками є герметичні відсіки, баки, трубопроводи і багато інших конструкцій. У процесі їхньої тривалої експлуатації виникає явище повзучості, що є складною науковою проблемою. Методи розв'язування задач повзучості об'єктів, математичними моделями яких є оболонки обертання, добре відомі з літератури, наприклад [1-4]. Разом з цим, за аналізом публікацій можна зробити висновок, що залишаються недостатньо вивченими такі питання, як врахування деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійно-