

**Л.В.АВТОНОМОВА**, канд.техн.наук;  
**А.В.СТЕПУК**, канд.физ.-мат.наук; НТУ «ХПИ»

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ И ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ В МЕТАЛЛАХ

У роботі розглянута можливість локалізації енергії у металах при дифузії імпульсних магнітних полів. Досліджено характер розв'язання нелінійного параболічного рівняння при різних початкових і граничних умовах. Показано, що просторово-тимчасова локалізація енергії досягається в полях, що перевищують у 2-3 рази критичні, й при обмеженій швидкості наростання початкового магнітного поля.

It is considered the possibility for energy localization under the pulse magnetic field diffusion. The features of parabolic equation solutions under the vary initial and border conditions has been searched. It has been found that the energy time-space localization might be achieved in fields 2-3 times higher than critical ones and the limited time uprising for an initial magnetic field.

При воздействии на металл ИСМП с напряженностью магнитного поля, превышающей критическую,  $H \geq H_c = \sqrt{2/\mu_0\beta}$ , где  $\beta = \alpha_p/c_v\rho$ ;  $\alpha_p$  – температурный коэффициент сопротивления, диффузия магнитного поля становится существенной нелинейной. Уменьшение проводимости с ростом температуры  $\sigma = \sigma(T_0)/(1 + \alpha T)$  приводит в этом случае к появлению локального максимума плотности тока  $j = \sigma E$ , смещающегося в глубь проводника, так называемому "пик-эффекту" [1,2]. Однако непосредственно этот эффект не приводит к локализации, т.е. ограниченности в пространстве и во времени, ни магнитного поля, ни джоулева тепловыделения. Чтобы это показать, можно рассмотреть особенности распространения максимума плотности тока для наиболее простого случая – диффузии магнитного поля в полупространстве.

Система нелинейных параболических уравнений, включающая уравнения Максвелла и уравнение теплового баланса, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial E/\partial x &= -\partial H/\partial t; & \partial H/\partial t &= \partial[(\sigma\partial H/\partial x)/(1+\beta Q)]/\partial x; \\ \partial H/\partial x &= -j; \quad j = \sigma E/(1+\beta Q), \quad \text{или} & \partial j/\partial t &= \partial^2[j(1+\beta Q)/\sigma]/\partial x^2; \\ \partial Q/\partial t &= \sigma E/(1+\beta Q) & \partial Q/\partial t &= j^2(1+\beta Q)/\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

Используя далее разделение переменных  $1+Q = \varphi(t) \cdot \phi(x)$  и то, что  $\partial j/\partial x = 0$ ;  $j = j_m(t)$ , получим:

$$(\beta j_m^3/\sigma) dj_m/dt = j_m^2 \cdot d^2 j_m/dt^2 - (dj_m/dt)^2, \quad (2)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения относительно  $j_m$  после подстановки  $y = dj_m/dt$ ;  $d^2 j_m/dt^2 = y dy/dj_m$  получим в виде суммы общего и частного решений:

$$y = a j_m + \beta j_m^3/2\sigma; \quad j_m = \sqrt{2\sigma a / (\beta(e^{-2at} - 1))}, \quad \text{где } a < 0, \quad (3)$$

здесь при интегрировании по  $t$  пределы интегрирования взяты от  $\infty$  до  $t$ .

Как видно из найденного, амплитуда плотности тока быстро затухает со временем, причем наименьшая скорость затухания достигается при  $a = 0$ . Для по-

лучения решения выполним предельный переход  $a \rightarrow 0$ . Тогда,  $j_m = \sqrt{\sigma/\beta t}$ . Оценивая величину напряженности магнитного поля в области максимума плотности тока, воспользуемся тем, что глубина скин-слоя  $\delta = 2\sqrt{\chi t}$ , где  $\chi = 1/\sigma\mu_0$  – коэффициент диффузии магнитного поля [1]:  $H_m \approx j_m \delta = 2/\sqrt{\mu_0\beta} = \sqrt{2} \cdot H_c$ . В частности, для меди найдем:  $j_m \approx 2,2 \cdot 10^5/\sqrt{t}$  [мкс] [А/мм<sup>2</sup>] и  $H_m \approx 57 \cdot T$ . Интегрируя далее уравнение теплового баланса с учетом найденных зависимостей, определим время, в течение которого протекание тока "максимальной" плотности вызовет плавление металла:  $t = t_m \cdot (1 + \beta Q_n)/2$ , где  $Q_n$  – удельная теплота при плавлении, и, например, для меди  $t \approx 2t_m$ , где  $t_m$  – определяется из  $H_m(0, t_m) = H_c$ . Как правило, длительность воздействия импульсов СМП с амплитудой, большей критического поля, не превышает  $10^{-6} \dots 10^{-4}$  с. Поэтому влиянием "пик-эффекта" на процесс диффузии магнитного и теплового полей, в том числе плавление, можно пренебречь при  $H/H_m < 2 \dots 3$ .

Возможность локализации тепловыделения и магнитного поля в ограниченной области проводящей среды (например, металла) представляет практический интерес с целью достижения высоких плотностей энергии. При анализе нелинейного скин-эффекта [1,3,4] обычно используются граничные условия типа экспоненциальной или степенной функций:  $H \approx t^\alpha$  или  $H \approx e^{\alpha t}$  для  $\alpha > 0$ . Это приводит к реализации HS-режима (High Speed) электромагнитного и теплового полей, при котором  $H(x,t)|_{t \rightarrow \infty} = \infty$ ;  $\forall x \in [0, \infty)$ . Однако, при определенных условиях возможно осуществление S и LS-режимов (Speed и Low Speed), для которых  $H(x,t)|_{t \rightarrow \infty} = \infty$ ;  $\forall x \in [0, x_s]$ , (здесь  $x_s$  – так называемая эффективная глубина локализации [5]). Для получения необходимых граничных условий и соответствующей глубины локализации можно воспользоваться приближенными автомодельными решениями (п.а.р.), которые асимптотически сходятся к точным, и теоремами сравнения (леммы Негумо) решений нелинейных параболических уравнений.

Рассмотрим систему уравнений (1). Известно, что, если для квазилинейного параболического уравнения  $u_t = (k(u)u_x)_x$  задан граничный режим без обострения, т.е.  $u(t,0) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , то для всех  $x \in [0, \infty)$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(t,x) \rightarrow \infty$  и локализация отсутствует (HS-режим). Поэтому далее в качестве граничного условия выберем режим с обострением  $\lim_{t \rightarrow \tau} u(t, x) = \infty$ . Тогда, если  $u \rightarrow \infty$  лишь при  $x = 0$ , то осуществляется LS-режим; если же для всех  $x \in [0, x_s]$ , то – S-режим. Зависимость проводимости от температуры, определяющая нелинейность процесса вплоть до плазменного состояния, является убывающей ограниченной функцией. Обычно полагают  $\sigma = \sigma_0/(1 + \beta Q)$ , где  $Q = c, \theta$  – теплосодержание, или  $\sigma = \sigma/(1 + H^2/H_c^2)$  [6]. Следовательно, можно приближенно считать, что нелинейная проводимость – это монотонно убывающая функция, ограниченная в пределах  $\sigma_0 = \sigma(0) \geq \sigma(Q) \geq \sigma(Q_{пл}) = \sigma_m$  или  $1/\mu\sigma_0 \leq k(u) \leq 1/\mu\sigma_m$  (здесь  $k(u)$  – коэффициент диффузии квазилинейного параболического уравнения  $u_t = (k(u)u_x)_x$ ).

Воспользуемся далее некоторыми свойствами решений таких уравнений [7]. Необходимым и достаточным условием финитности по  $x$  решения задачи Коши таких уравнений является сходимость интеграла  $\int_0^1 k(u)du/u < \infty$ . В данном случае

интеграл расходится и скорость распространения возмущения – электромагнитного и теплового – бесконечна. Эта особенность является следствием пренебрежения в уравнениях Максвелла токами смещения и незначительно влияет на распространение основного импульса СМП. В связи с этим строгая локализация магнитного поля и тепловыделения невозможна, так как для  $x > 0$  при  $t > 0$ ;  $u > 0$  (здесь  $u$  –  $H$  или  $Q$ ). Однако если множество  $\Omega = \{x > 0; \lim_{t \rightarrow \tau} u(t, x) = \infty\}$  ограничено, то может иметь место

эффективная локализация и  $x_s = \text{mes } \Omega$  называют эффективной глубиной локализации. Этот эффект достигается для любого граничного режима с обострением при выполнении условия  $\int_0^1 k(u)du/u < \infty$  согласно гипотезе, приведенной в [3]. В

частности для граничных условий  $U_0(1 - t/\tau)^n$ : – при  $k(u) = k_0 u^\zeta$  реализуется LS-режим, если  $n > -1/\zeta$ ; S – режим, если  $n = -1/\zeta$  и HS-режим (локализация отсутствует), если  $n < -1/\zeta$ . Глубина локализации ограничена величиной  $1 \leq x_s = \sqrt{2k_0 U_0 \zeta (2 + \zeta) / \zeta} \cdot \tau^{(1+n\zeta)/2}$  – при  $k(u) = k_0$ ,  $\zeta = 0$  реализуется LS-режим, если  $n < 0$ .

С учетом ограниченности и непрерывности изменения проводимости можно положить, что для коэффициента диффузии справедливо ограничение:  $k_0 \leq k \leq k_m$ . По теореме сравнения [7], если функции удовлетворяют неравенствам  $\partial u_- / \partial t \leq A(u_-)$ ,  $\partial u_+ / \partial t \geq A(u_+)$  в области  $(0, T) \times \Omega$ , где  $A$  – нелинейный параболический оператор и, кроме того,  $u(0, x) \leq u_0(x) \leq u_+(0, x)$  и  $\forall x \in \Omega$  и  $u_-(t, x) \leq u_1(t, x) \leq u_+(t, x)$ ;  $\forall t \in [0, T]$  и  $x \in \delta\Omega$ , тогда:  $u_- \leq u \leq u_+$  в  $[0, T) \times \Omega$ . Следовательно, если  $u$  – решение уравнения  $k(u) = k_0 u^\zeta$ , а  $u_+$  – уравнения  $k(u) = k_m$ , то они также будут соответствовать нижнему и верхнему решениям уравнения  $k(u) = k$ . Отсюда же следует, что для граничного режима с обострением  $u(t, 0) = U_0(1 - t/\tau)^n$  при  $0 > n > -1/2$  для решений этих уравнений осуществляется локализация – LS-режим. Эффективная глубина локализации будет при этом ограничена величиной  $x_s = 2U_0 \sqrt{T/\mu \zeta_0}$ , а граничное значение – зависеть только от  $n$  и  $\zeta$ . Вводя в качестве параметра скорость возрастания граничного режима (логарифмическая производная), условия локализации для S- и LS-режимов можно представить следующим образом:  $0 < \partial u / \partial t; \partial t \leq 1/2(\tau - t)$ . Если используются граничные условия без обострения, например,  $U_0(t/\tau)^n$  для  $U_0 > 0$ ;  $n > 0$ ;  $t > 0$ , то автомодельное решение уравнения  $u_t = (k_0 u^\zeta u_x)_x$  представимо в виде  $u_a(t, x) = t^m \theta \left( x / \sqrt{t^{1+m\zeta}} \right)$ . Здесь неизвестная функция  $\theta$  находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка после подстановки автомодельного решения в параболическое уравнение с граничными условиями  $\theta(0) = 1$  и  $\theta(\infty) = 0$ . В этом случае глубина проникновения волны электромагнит-

ного и теплового поля  $x_{ef} = \xi \sqrt{t^{1+m\xi}}$ , где  $\theta(\xi) = 1/2$  и, соответственно, какая-либо локализация этих полей отсутствует.

На рис. 1 представлены качественные зависимости магнитного поля, плотности тока и тепловыделения от времени для граничных условий с обострением (а) и без обострения (б). Глубина эффективной локализации  $x_s$  и траектория движения магнитного или теплового возмущения по уровню 0,5 от амплитуды показаны светлыми линиями. "Выход" на автомодельные закономерности, как показывают численные расчеты для подобных задач [5], устанавливается при росте граничной функции  $u(t,0)$  в 5...10 раз по сравнению с начальным значением. Граничные режимы выявляют инерционность процесса диффузии магнитного и теплового полей, создавая и поддерживая соответствующие локализованные профили температуры и поля. В S-режиме скорость поступления энергии так согласована со свойствами среды, что поле распределяется по всему профилю. При более "медленном" подводе энергии поле сосредоточивается в основном вблизи границы, профиль получается более "вогнутым" и реализуется LS-режим.

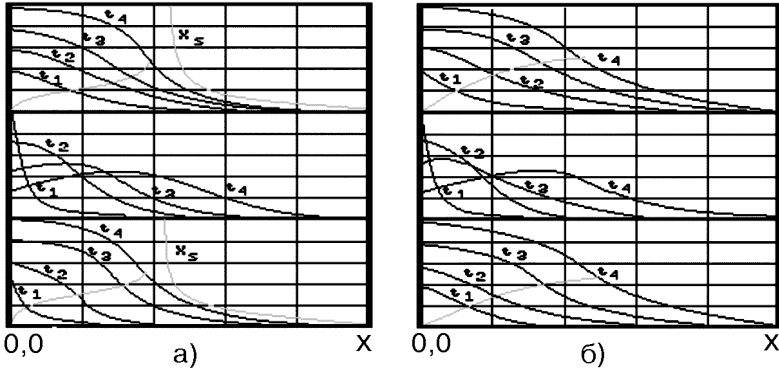


Рисунок 1 – Эволюция автомодельных решений нелинейного скин-эффекта ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ ) для граничных режимов: а) без обострения –  $H(0,t) = t^n$ ;  $n > 0$ ; HS-режим; б) с обострением –  $H(0,t) = (\tau-t)^{-n}$ ;  $n > 0$ ; LS-режим

Формирование инерционных профилей происходит на глубине локализации, определяемой параметрами задачи. С приближением волны поля к границе области локализации выпуклый распространяющийся профиль перестраивается на вогнутый, что видно на рис. 1а. С этого момента проявляется эффект локализации: размер области с максимальной энергией изменяется весьма незначительно, полуширина постоянна или сокращается, тепловая и магнитная волны фактически не проникают за глубину локализации. При вводе энергии ИСМП в более быстром темпе, чем в случае S-режима, образуется выпуклый профиль напряженности магнитного поля и температуры, область, занятая волной поля, увеличивается, локализация отсутствует и реализуется HS-режим. Следует отметить, что действие граничных режимов без

обострения всегда создает выпуклые профили и локализация отсутствует.

Таким образом, эффект локализации электромагнитного и теплового полей связан не только со скоростью протекания процесса. Соотношение между темпом нагрева и поступления энергии магнитного поля, а также свойствами среды определяет характер формирующихся профилей поля – инерционных или не обладающих этим свойством. Локализация (инерция) тепла и магнитного поля дает возможность достижения высоких температур и высоких концентраций энергии в ограниченной части среды и удержания их в течение конечного времени практически без распространения из области локализации. Это свойство инерционности процесса диффузии при нелинейном скин-эффекте может быть использовано во многих приложениях.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

– локализация плотности тока на фронте распространяющегося ИСМП ("пик-эффект") достигается в полях, превышающих критическую напряженность поля  $H_c$ , причем ее максимум по мере проникновения в глубину проводящей среды затухает пропорционально  $\sqrt{t}$ ;

– влияние пик-эффекта на плавление металла достигается в ИСМП, не менее чем в 2-3 раза превышающих  $H_c$ ;

– при воздействии ИСМП с обострением  $\lim_{t \rightarrow \tau} H(t,0) = \infty$  на металл воз-

можно достижение локализации магнитного поля и джоулева тепловыделения в ограниченной приповерхностной области  $H_j, Q(x,t)$ ;

– для достижения локализации за конечное время необходимо ограничить скорость нарастания ИСМП  $\partial H(t,0)/H(0,0)\partial t \leq 1/2(\tau - t)$ , при этом глубина эффективной локализации  $x_s = 2H(0,0)\sqrt{\tau}/\sigma\mu$ , а  $H(t,x_s) = G$ , где  $G$  – постоянная, зависящая только от  $n$  для граничного режима  $H(t,0) = H_0(1 - t/\tau)^n$ ;

– верхний предел локализованной энергии и температуры в рассматриваемом приближении ограничен плотностью энергии испарения, поскольку при кипении металла в ИСМП уже необходим учет эффектов магнитной гидро- и газодинамики, кинетики испарения.

**Список литературы:** 1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона. – М.: Мир, 1972. – 391 с. 2. *Miuro N., Herlach F.* Pulsed and Ultrastrong Magnetic Fields. – In [9]. – P. 247-349. 3. Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 200 с. 4. Биченков Е.И., Войтенко А.Е. Автомодельный электрический скиновый взрыв проводника. – ПМТФ, 1969. – № 3. – С.21-26. 5. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.Д.Самарский, В.А.Галактионов, С.И.Курдюмов, А.П.Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 480 с. 6. *Herlach F.* Megagauss Generators for Application to Solidstate Experiments. – In [63]. – P. 84-119. 7. Альтшулер Л.В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // УФН, 1965. – Т. 85, Вып. 2. – С. 197-258. 8. Сахаров А.Д. Взрывомагнитные генераторы // УФН, 1966. – Т. 88, Вып. 4. – С. 725-734.

Поступила в редколлегию 30.04.04