

**К.В.АВРАМОВ**, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## МЕТОД РАСЧЕТА БИФУРКАЦИОННЫХ ЛИНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

У статті запропоновано метод розрахунку біфуркаційних кривих механічних систем, що здійснюють прихильні коливання. Приклад розрахунку силової передачі розглядається у статті.

The method for bifurcation curves of forced oscillations of mechanical system is suggested in this paper. The example of transmission calculations is given.

**Введение.** Математическая теория бифуркаций хорошо разработанная область прикладной математики [1,2]. Здесь уже открыты основные бифуркационные явления и изучены многие их свойства. Для исследования бифуркаций в динамических системах различной физической природы разработана группа численных методов [3,4]. Однако применение этих методов к механическим системам даже с малым числом степеней свободы требует чрезвычайно больших ресурсов компьютеров. Отметим, что исследования бифуркационного поведения механических систем чрезвычайно важная инженерная задача, так как бифуркации приводят к срывам колебаний, к возникновению почти периодических движений с большими амплитудами

В этой статье предлагается численный метод исследования бифуркаций на плоскости параметров системы, ориентированный на механические системы с конечным числом степеней свободы. В этой статье приводится пример расчета бифуркационных линий участка силовой передачи.

**Метод исследования бифуркаций.** Колебания механической системы опишем дифференциальными уравнениями относительно переменных состояния в векторной форме:

$$\dot{y} = f(y, t, \pi_1, \pi_2), \quad (1)$$

где  $f(y, t + T, \pi_1, \pi_2) = f(y, t, \pi_1, \pi_2) - T$  – периодическая функция по явно входящему времени;  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – вектор состояний динамической системы;  $n$  – размерность фазового пространства;  $\pi_1, \pi_2$  – управляющие параметры динамической системы. На плоскости этих управляющих параметров производится анализ бифуркаций. Периодические колебания системы (1) удовлетворяют граничным условиям:

$$y(0) = y(T). \quad (2)$$

Эти граничные условия отражают условия периодичности. Отметим, что установившиеся состояния могут быть периодическими, почти периодическими и хаотическими. Эти граничные условия выделяют из всего множества установившихся состояний только периодические.

Решение системы (1) при  $t = 0$  обозначим  $y_0 = y(0)$ , а решение в момент  $t = T - y_T(y_0)$ . В этой статье на плоскости параметров будут исследоваться бифуркационные линии, которые описываются мультипликатором  $\rho = 1$  (седло-

узловая бифуркация) и  $\rho = -1$  (бифуркация удвоения периода). Мультипликаторы определяются из уравнения

$$F(y_0, \pi_1, \pi_2) = \det \left[ \frac{\partial y_T}{\partial y_0} - \rho E \right] = 0, \quad (3)$$

где  $\partial y_T / \partial y_0$  матрица Якоби;  $E$  – единичная матрица. Отметим, что функция (3) в зарубежной литературе получила название функции ветвления. Граничные условия запишем в виде системы  $n$  нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора начальных состояний  $y_0$ :

$$y_T(y_0) - y_0 = 0. \quad (4)$$

Бифуркационные линии на плоскости параметров описываются системой  $n + 1$  нелинейных алгебраических уравнений (3,4). Предположим, что управляющий параметр  $\pi_1$  задается, а параметр  $\pi_2$  определяется из решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона [3]. Для реализации метода Ньютона рассчитывается матрица Якоби, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial \pi_2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial \pi_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial F}{\partial \pi_2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Как показали численные исследования, проведенные автором этой статьи, использование конечно-разностных формул для расчета матрицы (5) приводит к плохой сходимости метода Ньютона, поэтому в этом исследовании мы применяем другой подход, основанный на получении системы дифференциальных уравнений, решения которых описывают элементы матрицы Якоби.

Одна из подматриц, входящая в (3), описывается системой уравнений в вариациях:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) = Df(y, t, \pi_1, \pi_2) \left( \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_{t=0} = E. \quad (6)$$

Решения матричной системы (6) при  $t = T$  является элементами матрицы Якоби. Отметим, что  $n$  элементов матрицы Якоби удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \pi_2} \right) = Df(y, t, \pi_1, \pi_2) \left( \frac{\partial y}{\partial \pi_2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \pi_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \pi_2} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Элементы матрицы Якоби  $\frac{\partial F}{\partial y_{01}} \dots \frac{\partial F}{\partial \pi_2}$  содержат вторые производные

от вектора состояния  $y$ . В качестве примера приведем соотношения для  $\partial F / \partial \pi_2$ :

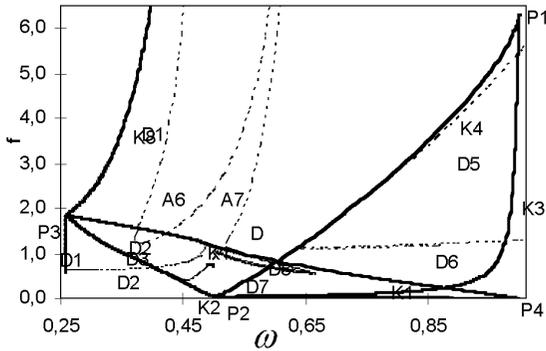


Рисунок 1 – Бифуркационные линии

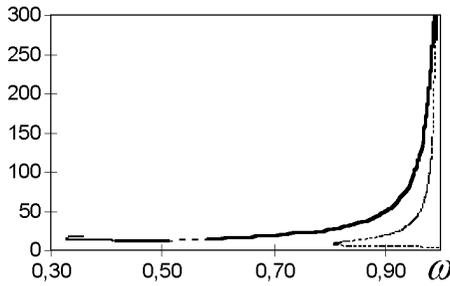


Рисунок 2 – АЧХ механической системы

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_2} = \frac{\partial}{\partial \pi_2} \det \left[ \frac{\partial y_T}{\partial y_0} - \rho E \right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_T^{(1)}}{\partial \pi_2 \partial y_0} & \dots & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y_T^{(n)}}{\partial \pi_2 \partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{0n}} - \rho \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} - \rho & \dots & \frac{\partial^2 y_T^{(1)}}{\partial \pi_2 \partial y_{0n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial^2 y_T^{(n)}}{\partial \pi_2 \partial y_{0n}} \end{bmatrix}.$$

Для определения этих производных составим системы дифференциальных уравнений, решения которой являются этими производными. Для получения этих систем (6, 7) дифференцируются относительно  $y_0$  и  $\pi_2$ . В результате получаем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l}} = Df(y, t) \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l}} + D^2 f(y, t) \left( \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0l}^2} \right)^2; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l} \quad t=0} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} = D_y f(y, t) \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} + D_{y^2} f(y, t) \frac{\partial y}{\partial y_{0l}} \frac{\partial y}{\partial \pi_2} + D_{\pi_2 y}^2 f \frac{\partial y}{\partial y_{0l}}; \quad \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} = 0; \quad (9)$$

Используя решения уравнений (8) и (9) при  $t = T$  и правило дифференцирования определителя получаем недостающие элементы матрицы Якоби. После расчета матрицы Якоби с помощью метода Ньютона определяем точку бифуркационной линии.

Для расчета всей бифуркационной линии воспользуемся алгоритмом продолжения, который изложен в статье работе [5].

**3. Бифуркационные линии силовой передачи ДВС.** Рассмотрим участок силовой передачи шестицилиндрового двигателя, который описывается дифференциальным уравнением с безразмерными параметрами и относительно безразмерных переменных:

$$\omega^2 \ddot{x} + 2\alpha\omega \dot{x} + H(x) = f \sin(t); \quad (10)$$

$$H(x) = \begin{cases} x + c(x + 1), & x > -1; \\ -1, -2\lambda - 1 < x < -1; \\ x + 2\lambda + c(x + 2\lambda + 1), & x < -2\lambda - 1, \end{cases}$$

где  $x$  – обобщенная координата, описывающая угол поворота коленчатого вала;  $m$  – момент инерции коленчатого вала;  $\lambda$  – величина зазора в шлицевом соединении. Возмущающая сила описывает крутящий момент, действующий на коленчатый вал. Безразмерные переменные имеют следующие значения:  $\alpha = 0,005$ ;  $\lambda = 5$ ;  $c = 1$ . Результаты расчетов бифуркационных линий представлены на рис. 1, а АЧХ, соответствующая этим бифуркационным линиям на рис. 2. На рис. 2 устойчивые колебания показываются сплошной линией, а неустойчивые пунктирной.

**Заключение.** В статье предложен метод для расчета бифуркационных линий в механической системе с произвольным, конечным числом степеней свободы. Приведен пример использования этого метода для исследования нелинейных колебаний участка силовой передачи.

**Список литературы:** 1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М., 2002. – 600 с. 2. *Kuznetsov Y.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. – New York, 1996. – 643 P. 3. *Doedel E., Keller H., Kernevez J.* Numerical Analysis and Control of bifurcation problems: (I) Bifurcation in finite dimensions // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1. 4. *Doedel E., Keller H., Kernevez J.* Numerical Analysis and Control of bifurcation problems: (II) Bifurcation in infinite dimensions // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1. 5. *Seydel R.* Tutorial on continuation // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1

Поступила в редколлегию 30.04.04