

может служить определение температурного удлинения цельнокованого ротора турбины с заменой дисков приведенными значениями коэффициентов теплоотдачи (см. [2], стр. 287).

Таблица 2 – Результаты сравнительных расчетов

z, мм	Вариант 1				Вариант 2			
	T	Θ , °C	t, °C	Δt , %	T	θ , °C	t, °C	Δt , %
0	0,254	415	417	0,48	0,844	799	798	0,13
75	0,238	405	406	0,26	0,840	796	795	0,13
150	0,193	375	377	0,53	0,823	785	787	0,25

Список литературы: 1. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.*, Теплопередача. – М.: Энергия, 1965. – 424 с. 2. *Шнез Я.И., Капинос В.М., Котляр И.В.* Газовые турбины. Том 1. – Киев: Вища школа, 1974. – 295 с.

Поступила в редколлегию 11.07.2005

УДК 539.3

Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;
А.В.БЕЛОЗЕРОВ; НТУ «ХПИ»

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ С ПОВОРОТНОЙ СИММЕТРИЕЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

У статті пропонуються методи аналізу чутливості та оптимізації скінченоелементних моделей циклічносиметричних систем з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на високі розмірності векторів перемінних стану і проектування. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарата.

Complicated finite-element models of cyclic symmetry structure with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis and optimization methods are given in this article. The methods have guiding to orientate on high dimensions of state and design variables. Computation stages of constructions gradients functional derivation are investigated. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Задача расчета регулярных конструкций, и как частный случай систем с циклической (поворотной) симметрией (ЦСК), неоднократно привлекала внимание исследователей [1-4]. Это обусловлено с одной стороны широким распространением таких конструкций в машиностроении и механике, с другой - спецификой расчетов статических и динамических характеристик симметричных систем, которая позволяет перейти от общих методов анализа конструкций к специальным, значительно меньшей размерности, что требует развития оригинальных теорий и численных методов. Задача достаточно хо-

рошо разработана и апробирована для случая симметричного нагружения конструкций, когда порядок симметрии нагрузки и геометрической структуры совпадают. Однако практически не исследованы особенности условий оптимальности и соотношений анализа чувствительности для конечноэлементных моделей систем с циклической симметрией[5].

Анализ чувствительности ЦСК характерен тем, что полный набор варьируемых параметров проектирования \bar{u} определяется набором, описывающим переменные проектирования одной секции, а функциональные производные находятся для всей конструкции. Принципиальной особенностью систем с циклической симметрией является кратный резонанс. Анализ чувствительности систем с кратным спектром принципиально осложняется недифференцируемостью кратной собственной частоты в произвольной окрестности «подозреваемой на оптимальность» точки полного пространства варьируемых параметров (в смысле Фреше), но дифференцируемостью по направлению (в смысле Гато). Соответствующий математический аппарат разрабатывается на примере кратности 2. Очевидна возможность распространения основных результатов на случаи более высокой кратности.

Пусть \bar{y}_1, \bar{y}_2 – два нормированных, взаимно ортогональных собственных вектора, соответствующих кратному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При этом пространство решений исходной задачи содержит два произвольных параметра $\bar{y} = \gamma_1 \bar{y}_1 + \gamma_2 \bar{y}_2 = A(\bar{y}_1 \cos \varphi + \bar{y}_2 \sin \varphi)$, характеризующих норму собственного вектора (A) и его поворот (φ) в подпространстве собственных форм. В силу этого для определенности \bar{y}_1, \bar{y}_2 наряду с условиями нормировки и ортогональности

$$\bar{y}_j^T M \bar{y}_i = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

необходимо зафиксировать «угловое» положение одной из форм

$$\bar{n}^T M \bar{y}_1 = 0. \quad (2)$$

Анализ возмущенного $(\bar{u} + \delta \bar{u})$ матричного уравнения $[K - \lambda M] \bar{y} = \bar{0}$ приводит к следующему уравнению «расщепления» кратного собственного значения

$$\delta \lambda_{1,2} = 0,5(\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + \alpha_{12}^2}); \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \bar{y}_i^T (\delta K - \lambda \delta M) \bar{y}_j; \quad \delta K_{r,s} = \delta \bar{u}^T \bar{\nabla}_u K_{r,s}, \quad \delta M_{r,s} = \delta \bar{u}^T \bar{\nabla}_u M_{r,s}.$$

Принципиальным результатом является сохранение однозначной линейной связи между $\delta \bar{y}, \delta \lambda$ и $\delta \bar{u}$ в подпространстве \bar{u} кратного резонанса

$$\delta \lambda_1 = \delta \lambda_2 = \delta \lambda. \quad (4).$$

Последнее накладывает на вариацию конструктивных параметров дополнительные ограничения $\alpha_{11} = \alpha_{22}; \alpha_{12} = 0$.

Совместная разрешимость исходной и сопряженных задач $[K - \lambda M] \bar{y}_{1,2} = \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_{1,2}}$ приводит к условиям $\bar{y}_i^T \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_j} = 0$, физический смысл которых – независимость резонансного функционала от нормы A и угла φ . При

использовании функционалов, для которых эти условия не выполняются автоматически, условия (1), (2) вводятся в структуру соотношений анализа чувствительности.

Полные соотношения для градиента ∇J в подпространстве кратных форм образуются суммированием одностипных выражений $\bar{\nabla}_u J = -\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \bar{\psi}^T M \bar{y}$ и обладают фильтрующим свойством по отношению к

общей части сопряженных решений: $\bar{\psi}_1 = \gamma_{11} \bar{y}_1 + \gamma_{12} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_1^*$, $\bar{\psi}_2 = \gamma_{21} \bar{y}_1 + \gamma_{22} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_2^*$.

Отклонения конструктивно-технологических параметров можно условно разделить на два вида: 1) при котором конструкция сохраняет свойства циклической симметрии (т.е. будучи повернутой относительно оси вращения на любой угол, кратный $360/N$, сохранит инвариантность своих геометрических и физических характеристик); 2) при котором нарушается свойство строгой циклической симметрии. Отклонениям могут способствовать и условия работы; окружная неоднородность статических деформаций. Отклонения реальных конструкций от строгой симметрии по вышеприведенным причинам чаще всего нестабильны, трудно уловимы и носят случайный характер. Отклонение от строгой симметрии у реальных конструкций может закладываться еще на этапе их проектирования и являться следствием удовлетворения тем или иным дополнительным требованиям, предъявленным к конкретной конструкции. Нарушения симметрии вызывают различные нецентральные отверстия в дисках, предназначенные, например, для транспортировки; постановка и снятие балансированных масс и т. п. Когда речь идет о технологических несовершенствах, разделяют регулярные и нерегулярные погрешности изготовления. Первые, возникающие, например, при литье колес в пресс-формы, изготовленные по идентичным вытеснителям, повторяются в каждом из циклов симметрии, нерегулярные - характеризуются нарушением симметрии. В этих случаях при анализе чувствительности собственных частот и вибрационных характеристик ЦСК, зависящих от собственных форм, существует принципиальная разница. В первом случае изменяются параметры повторяемого сектора ЦСК, соответствующие вариации K и M обладают квазициклической структурой, в силу чего выполняется условие (4) нерасщепления спектра и сохраняются соотношения для производных по Фреше. Второй случай характеризуется нарушением симметрии, расщеплением кратного спектра, «привязкой» форм в окружном направлении, нелинейными соотношениями для вариаций частот и форм колебаний (3) и эффектами перегрузки при вынужденных колебаниях.

С целью демонстрации предлагаемого подхода приведем примеры решенных задач. В качестве объекта исследования был выбран параболический отражатель спутниковой антенны диаметром 0,7 м. Отражатель представляет собой трехслойную оболочку с сотовым алюминиевым наполнителем и несущими слоями, изготовленными из стеклотекстолита. Отражатель жестко закреплен в центре по окружности радиусом 0,02 м. При исследовании использовались многослойные оболочечные конечные элементы (КЭ). Узловыми параметрами КЭ являются перемещения срединной поверхности оболочки, а также углы поворота.

Толщина несущих слоев изменяется линейно относительно радиуса. Технические характеристики стеклотекстолита следующие: модуль упругости – $3,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², плотность – $1,8 \cdot 10^3$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Производные по проектным переменным (коэффициенты чувствительности) характеризуют направление и скорость изменения функционалов качества изделия при изменении этих переменных. Распределение полей коэффициентов чувствительностей собственных частот к нормальным перемещениям точек поверхности взаимодействующих конструктивных элементов приведено на рис. 1 и 2.

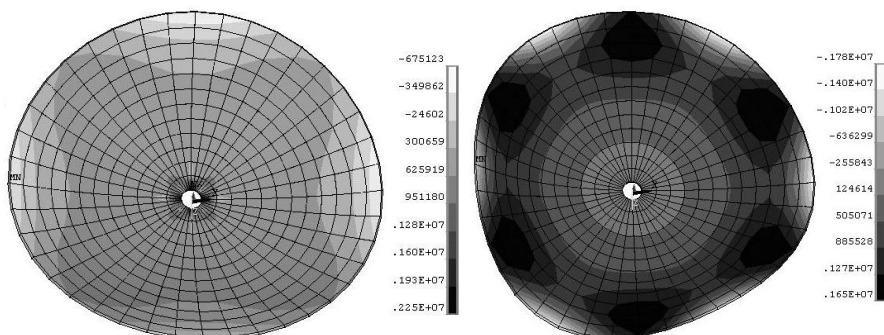


Рисунок 1 – Анализ чувствительности 3 и 5-ой собственных частот(кратных) параболического отражателя

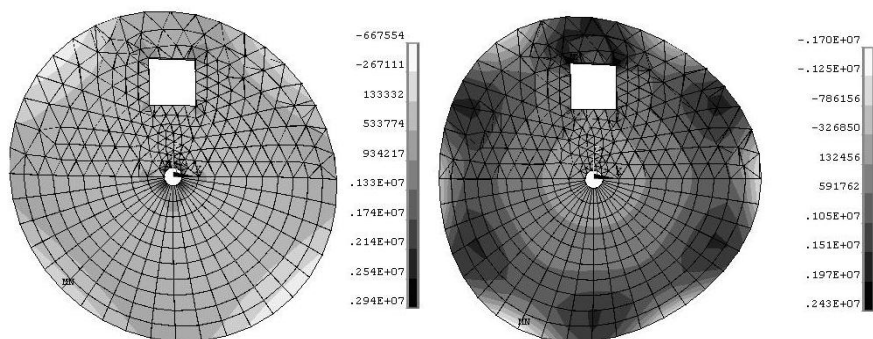


Рисунок 2 – Анализ чувствительности 3 и 5-ой собственных частот(некратных) параболического отражателя при изменении его формы

В работе предложены методы анализа чувствительности конечноэлементных моделей поворотносимметричных систем. Исследованы особенности вычисления градиентов кратных частот. Дальнейшим направлением исследований являются связанные проектно-технологические задачи ЦСК.

Список литературы: 1. *Бобылев Д.С.* Колебания циклически симметричных систем // Проблемы стрит. механики и прочн. летательных аппаратов. – М., Моск. авиац. ин-т. – 1990. – С. 4-7. 2. *Гуляр А.И.*

Ильченко Е.Н., Шалыгин С.А. Численная оценка сходимости традиционного и полуаналитического вариантов МКЭ при расчете циклически симметричных тел // Сопроотивление матер. и теория сооруж. 1989. – С. 40-42. 3. Qiu Chunhang, Wu Gaofeng Coupling analysis of substructures with different symmetries // Comput. and struct. – 1988. – № 30, Т. 4. – P. 861-863. 4. Dickens John M., Pool Kirby V. Dynamic response analysis of cyclic symmetry structure to periodic time domain loading // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Long Beach, Calif., 1990: Techn. Pap. Pt.1. – Washington (D.C.). – 1990. – P. 436-443. 5. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., Любецкая В.Б. Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НГУ «ХПИ». – 2003. – № 8, Т. 3. – С. 77-82.

Поступила в редколлегию 25.04.2006

УДК 539.3

Н.В.СМЕТАНКИНА, канд.техн.наук, **Е.В.СВЕТ**,
А.Н.ШУПИКОВ, докт.техн.наук; ИПМаш НАН Украины

РАСЧЕТ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Пропонується метод розв'язання задачі стаціонарної термопружності багат шарових пластин неканонічної форми в плані, контур яких складений із прямих і дуг кіл. Температурні навантаження одержані у результаті розв'язання задачі теплопровідності багат шарових пластин. Досліджено температурні напруження у п'ятишаровій пластині.

A method for solution of a stationary thermoelasticity problem of multilayer plates of non-canonical plan form which contour formed by straight lines and arches of circles is offered. Thermal loadings are obtained as result of solution of multilayer plate heat conduction problem. Thermal stresses in a five-layer plate are analyzed.

Введение. Широкое применение многослойных элементов конструкций в различных отраслях техники связано с необходимостью разработки методов их расчета при различных нагружениях, в том числе при тепловых воздействиях. Как показывает анализ литературных источников, наиболее исследованы однородные конструкции [1-5]. Задачи термоупругости многослойных пластин и оболочек чаще всего решаются для объектов канонической формы, а также, когда закон распределения температуры по толщине и поверхности конструкции задан, а не получен из решения задачи теплопроводности этих элементов конструкций [6-9].

В настоящей работе предлагается метод решения задачи термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане при воздействии температурных полей, которые определяются из решения задачи стационарной теплопроводности.

Основные соотношения. Рассматривается многослойная пластина, собранная из l слоев постоянной толщины и отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя. На коор-