

дочка сердца [15-17], которые связаны некой общностью, а именно: кусочной однородностью и гиперупругостью материала. Для исследования НДС резинотехнических изделий применялся потенциал Муни-Ривлина (6), для модели левого желудочка сердца – (10).

**Список литературы:** 1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: 1980. – 512 с. 2. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с. 3. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 219 с. 4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – 584 с. 5. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Потенциал почти несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 20. – С. 111-120. 6. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 279 с. 7. *Nielsen P.M.F., Le Grice L.J.* eds. Mathematical model of geometry and fibrous structure of the heart // *Am. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol. 29)* – 1991. – 260. – P. H1365 –H1378. 8. *Уилкинсон Р.* Линеинная алгебра: Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с. 9. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с. 10. *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с. 11. *Мисюра Е.Ю.* Численное решение геометрически нелинейной задачи для толстостенного цилиндра, выполненного из материала Джона // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №19. – С. 141–148. 12. *Мисюра Е.Ю.* Нелинейное деформирование бронированного шланга // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 47. – С. 107-112. 13. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Об управлении нелинейной жесткостью цилиндрических резиновых опор // Пробл. машиностроения. – 2005. – № 2, т. 8. – С. 50-56. 14. Патент 9984 Украина, МКИ<sup>3</sup> 7 F16F3/00. Амортизатор / Б.Я. Кантор, Г.И. Львов, Е.Ю. Мисюра (Украина); № u 2005 04269; Заявлено 04.05.2005; Опубл. 17.10.2005, Бюл. № 10. – 2005. – С. 4. 15. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и .... – 2004. – № 1(10). – С. 23–31. 16. *Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И., Мисюра Е.Ю.* Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №31. – С. 106-117. 17. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Нелинейное моделирование напряженно-деформированного состояния левого желудочка сердца в хронической стадии инфаркта миокарда // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 79–87.

*Поступила в редколлегию 03.04.2006*

УДК 539.3

*Л.В.КУРПА*, докт.техн.наук; *Г.Н.ТИМЧЕНКО*; НТУ «ХПИ»

## **ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Розглядається задача про нелінійні вільні коливання композитних багатощарових пластин складної форми, при різних способах закріплення. Математична постановка задачі розглядається в рамках теорії типу Тимошенко. Розв'язання задачі виконано за допомогою теорії R-функцій, варіаційних методів і метода Бубнова-Гальоркіна. Наведено порівняння одержаних результатів для композитної пластини, з відомими результатами, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.

The problem of nonlinear free vibrations of composite laminated plates with complex planform and different boundary conditions is considered. The mathematical statement of the task is carried out using the Timoshenko type theory. The problem was solved by the R-function theory, variational methods and the Bubnov-Galyorkin method. The comparison of obtained results for composite plate, with known results is carried out, that confirms effectiveness and reliability of the offered method.

Нахождение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и исследование их поведения при различных граничных условиях, для многослойных пластин является одной из актуальных проблем нелинейной динамики композитных пластин. Обзор литературы показывает, что для пластин сложной планформы этот вопрос изучен недостаточно. В настоящей работе для решения данной задачи предлагается алгоритм, который базируется на теории R-функций [1], вариационных методах и методе Бубнова-Галеркина. С помощью предложенного подхода изучено влияние геометрии, граничных условий, вида материала слоев пластины на АЧХ.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача о нелинейных колебаниях многослойных пластин постоянной толщины  $h$ , в рамках уточненной теории типа Тимошенко. В соответствии с этой теорией, уравнения движения [3] многослойной пластины представляются в виде:

$$L_{11}(C_{ij}, D_{ij})\psi_x + L_{12}(D_{ij})\psi_y + L_{13}(C_{ij})w = \frac{\gamma}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$L_{21}(D_{ij})\psi_x + L_{22}(C_{ij}, D_{ij})\psi_y + L_{13}(C_{ij})w = \frac{\gamma}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$L_{31}(C_{ij})\psi_x + L_{32}(C_{ij})\psi_y + L_{33}(C_{ij})w = -Nl_1(C_{ij}) + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (3)$$

$$L_{41}(C_{ij})u + L_{42}(C_{ij})v = -Nl_2(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$L_{51}(C_{ij})u + L_{52}(C_{ij})v = -Nl_3(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (5)$$

где  $u, v, w$  – перемещения точек координатной поверхности;  $\psi_x, \psi_y$  – углы поворота прямолинейного элемента [3], а дифференциальные операторы  $L_{ij}, Nl_i$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) имеют вид:

$$L_{11}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_5^2 C_{55}; \quad L_{22}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_4^2 C_{44};$$

$$L_{12}(D_{ij}) = L_{21}(D_{ij}) = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{13}(C_{ij}) = L_{31}(C_{ij}) = -k_5^2 C_{55} \frac{\partial}{\partial x};$$

$$L_{23}(C_{ij}) = L_{32}(C_{ij}) = -k_4^2 C_{44} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{33}(C_{ij}) = k_1^2 C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_4^2 C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{41}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{51}(C_{ij}) = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{42}(C_{ij}) = L_{52}(C_{ij}) = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$Nl_1(C_{ij}) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left\{ C_{22} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\};$$

$$Nl_2(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left( C_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\};$$

$$Nl_3(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left( C_{12} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\};$$

здесь  $C_{ij}, D_{ij}$  – приведенные жесткостные характеристики [2]  $k_i$  ( $i = 4, 5$ ) – коэффициенты сдвига.

Система дифференциальных уравнений (1) – (5) дополняется соответствующими граничными, а также начальными условиями вида:

$$w = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

**Метод решения.** На первом этапе выполняется решение линейной задачи о колебаниях многослойной пластины с помощью теории R-функций [1] и вариационных методов. Такой подход позволяет находить собственные функции в аналитическом виде, которые на последующих этапах используются как базисные.

Например, с помощью основного собственного вектора линейной задачи искомое решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y); & \psi_x(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{x1}(x, y); \\ \psi_y(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{y1}(x, y); & u(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot u_2(x, y); \end{aligned} \quad (7)$$

$$v(x, y, t) = y_1^2(t) \cdot v_2(x, y),$$

где  $\psi_{x1}(x, y), \psi_{y1}(x, y), w_1(x, y)$  – компоненты собственного вектора соответствующего основной собственной частоте  $\omega_L$ , а функции  $u_2(x, y), v_2(x, y)$  являются решением задачи теории упругости, в предположении, что силами инерции в уравнениях (4), (5) можно пренебречь. Вариационная постановка задачи теории упругости сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$\begin{aligned}
J(\vec{U}_2) = & \int_{\Omega} \left\{ C_{11} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} + C_{66} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
& + (N_2(C_{ij})w_1)u_2 + (N_3(C_{ij})w_1)v_2 \} d\Omega - \\
- & \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( (C_{11}l^2 + C_{12}m^2) \cdot \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) \cdot \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + 2C_{66} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} lm \right] U_{2n} + \right. \\
+ & \left. \left[ \frac{1}{2} \left( (C_{12} - C_{11}) \cdot \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (C_{22} - C_{12}) \cdot \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) lm + C_{66} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} (l^2 - m^2) \right] V_{2n} \right\} dS,
\end{aligned}$$

где  $U_{2n} = u_2 l + v_2 m$ ,  $V_{2n} = -u_2 m + v_2 l$ . При численной реализации направляющие косинусы  $l, m$  нормали к границе области  $\Omega$  удобно заменить как  $l = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$ , и  $m = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$ , где  $\omega(x, y) = 0$  – нормализованное до первого порядка [1] уравнение границы области.

Дискретизацию функционала будем осуществлять также с использованием метода Ритца и теории R- функций.

После подстановки (7) в уравнение (3) и применения процедуры Бубнова-Галеркина задача сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению:

$$y_1''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^3(t) = 0. \quad (8)$$

Коэффициент  $\beta$  уравнения (8) определяется по формуле:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} (N_1(C_{ij}, u_2, v_2, w_1)) \cdot w_1 d\Omega}{\rho h \|w_1\|^2}.$$

Выражение  $N_1$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
N_1(C_{ij}) = & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + v_2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{22} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + v_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

На последнем этапе выполняется решение уравнения (2.1) с начальными условиями (1.6). Для этого использован метод Бубнова-Галеркина. В результате чего получена зависимость между отношением нелинейной частоты к линейной и амплитудой в следующем виде:

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta \cdot A^2}.$$

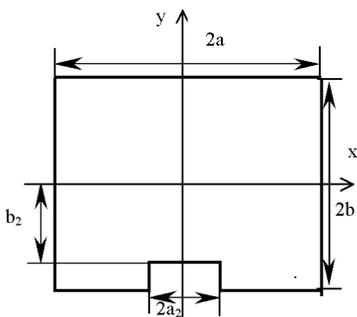


Рисунок 1

Геометрические характеристики  $b/a = 1$ ;  $h/2a = 0,001$ ;  $a_2/2a = 0,3$ . Предполагается, что пластина может быть изготовлена из материалов двух видов ( $G_{12} = G_{23} = G_{13}$ ):

- материал 1:  $E_1/E_2 = 10$ ;  $G_{12}/E_2 = 1/3$ ;  $\nu_{12} = 0,3$ ;
- материал 2:  $E_1/E_2 = 40$ ;  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ;  $\nu_{12} = 0,25$ .

При этом рассмотрены различные способы закрепления пластины:

1-й способ закрепления соответствует граничным условиям:

$w = 0$ ;  $M_n = 0$ ;  $\psi_\tau = 0$ , где  $n$  и  $\tau$  – нормаль и касательная к границе области  $\partial\Omega$ .

2-й способ –  $w = 0$ ;  $\psi_x = \psi_y = 0$ .

На рис. 2 приведены АЧХ для различных значений параметра  $b_2$ :  $b_2/2a = 1$  (кривая  $L_2$ ),  $b_2/2a = 0,49$  (кривая  $L_3$ ),  $b_2/2a = 0,45$  (кривая  $L_4$ ). На рисунке видно, что при уменьшении глубины вреза соответствующие кривые стремятся к кривой для квадратной пластины  $L_1$ . Данный факт, а также сравнение полученных результатов с известными [4] для квадратной пластины (кривая  $L_1$ ) использован для подтверждения достоверности предложенного метода.

На рис. 3 приведены АЧХ соответствующие второму типу укладки слоев и второму способу закрепления границы области. При этом рассмотрены два типа материала.

Кривая  $L_2$  соответствует значению  $b_2/2a = 0,45$  и материалу 1;  $L_3$  –  $b_2/2a = 0,45$ , материалу 1;  $L_5$  –  $b_2/2a = 0,45$ , материалу 2;  $L_6$  –  $b_2/2a = 0,45$ , материалу 2.

Как видно из рис. 3 при уменьшении глубины вреза  $b_2 \rightarrow b$  АЧХ стремятся к АЧХ для квадратной пластины (кривые  $L_1, L_4$ ), что и показано на рисунке. Этот факт также подтверждает достоверность предложенного метода.

**Закключение.** В работе впервые в рамках уточненной теории Тимошенко с помощью теории R-функций решены задачи о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пластин имеющих сложную форму плана и разные способы закрепления. С помощью данного метода проведено исследование влияния геометрии пластины на амплитудно-частотные характеристики.

**Численные результаты.** Численная реализация предложенного подхода выполнена в рамках системы POLE-RL [1]. Для проверки достоверности разработанного программного обеспечения было выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе. Ниже предложенный подход использован для исследования двухслойных пластин со сложной формой плана (рис. 1). Способ укладки слоев определяется отношением: 1 тип –  $(45^0/-45^0)$ ; 2 тип –  $(0^0/90^0)$ .

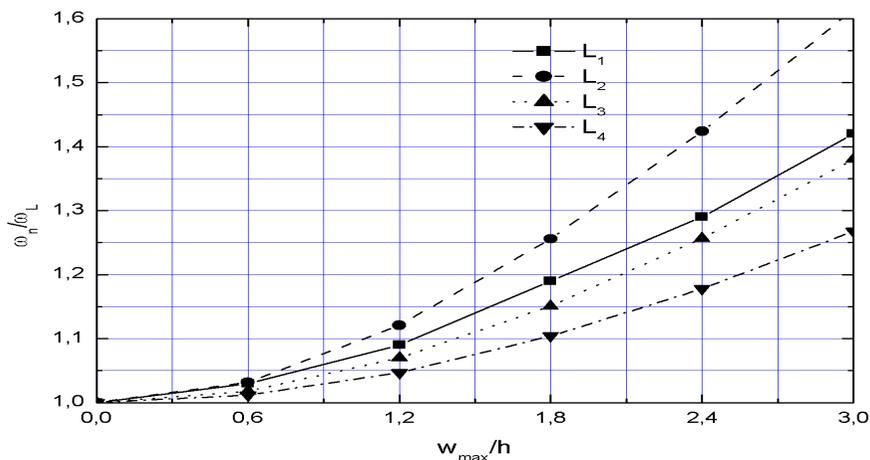


Рисунок 2 – АЧХ соответствующие граничным условиям 1, типу материала 1, способу укладки слоев 1

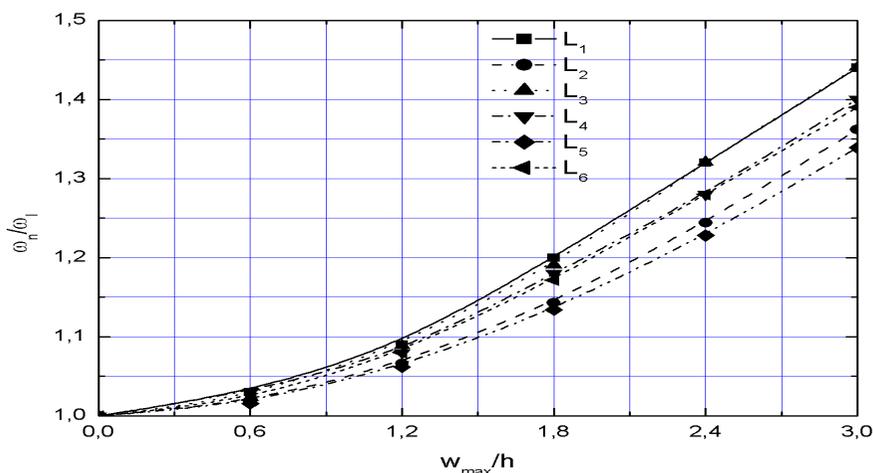


Рисунок 3 – АЧХ соответствующие граничным условиям 2, способу укладки слоев 2

**Список литературы:** 1. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. – 176 с. 2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с. 3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 4. Reddy J.N., Chao W.C. Nonlinear Oscillations of Laminated, Anisotropic, Rectangular Plates // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 104. – PP. 396-401. 5. Курпа Л.В., Чистилина А.В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане. – Киев, 2003. – № 2. – С. 112-125. 6. L.Kurpa, O.Onufrienko, T.Smatko Researcher of nonlinear vibration of orthotropic plates with arbitrary form by the R-function method //Work of 2 international conference of «Research and Education». – Miskolsi Egyetem Sokszorosito Üzeme Press number: – 2004 GT-239; GD- 240.ME. – PP.109-114.

Поступила в редколлегию 04.05.2006