experiment for the supersonic flutter of circular shell // Ibid.5. – № 10. – 1967. – PP. 1849-1856. **19.** *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal Modes and Localizations in Nonlinear Systems. – Wiley, New York, 1996.

Поступила в редколлегию 13.04.2006

УДК 539.3

Б.Я.КАНТОР, докт. техн. наук, ИПМаш НАН Украины;
Е.Ю.МИСЮРА, ХНЭУ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕОДНОРОДНО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Викладена методика чисельного розв'язання осесиметричних (зі скрутом та без нього) фізично та геометрично нелінійних задач для майже нестисливих кусково-однорідних неоднорідно трансверсально-ізотропних та ізотропних гіперпружних тіл обертання на основі варіаційного принципу можливих переміщень у прирощеннях, який реалізується кроковим алгоритмом методу скінченних елементів. Вірогідність результатів, що одержуються за допомогою цієї методики, підтверджена збігом чисельних і точних розв'язків лінійних (Ламе) і нелінійних (О.І.Лур'є) задач деформування порожнистих циліндра і сфери під внутрішнім тиском. Запропонована методика використана для вивчення НДС двох типів об'єктів: гумовотехнічних конструкцій (броньований шланг, різні види гумових опор і амортизаторів з обмеженням радіальних переміщень гумових блоків) та математичної моделі лівого шлуночка серця.

The numerical solution methodics of axisymmetric (with and without the torsion) physically and geometrically nonlinear problems for nearly incompressible piecewise-homogeneous nonhomogeneously transversely isotropic and isotropic hyperelastic bodies of revolution on the base of the variational principle of possible displacements in the increments which realized of the stepping algorithm of the finite element method was stated. The reliability of the results which received with the help of this methodics was confirmed by coincidence of numerical and analytic solutions of the linear (Lame) and nonlinear (A.I. Lurie) problems of deformation of the hollow cylinder and sphere loaded by the internal pressure. The proposed methodics was used for study of the stress-strain state of two types objects: the rubber-technical structures (armoured hose, different kinds of rubber support and shock-absorbers with restriction of the radial displacement of the rubber blocks) and mathematical model of the heart left ventricle.

Анализ НДС гиперупругих тел вращения сложной формы и неоднородной структуры в физически и геометрически нелинейной постановке является сложной прикладной проблемой механики деформируемого твердого тела. Интерес к этой области исследований вызван внутренними стимулами развития науки и запросами практики. Задачи деформирования гиперупругих тел являются физически и геометрически нелинейными. Большой вклад в их изучение внесли А.И. Лурье [1], К.Ф. Черных [2], И.Н. Снеддон и др. [3], Л.И. Седов [4] и др. Нелинейность обусловлена поведением материала и наличием больших деформаций. Кроме того, к существенному усложнению приводят неклассическая форма тела, неоднородность его механических свойств, анизотропия и т.п. В таких случаях необходимо использовать численные методы, основанные на вариационных принципах механики, в частности МКЭ.

Изложим методику решения осесимметричных (с кручением и без него) физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных неоднородно трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения на основе вариационного принципа возможных перемещений в приращениях, реализуемого шаговым алгоритмом МКЭ.

Отнесем тело к цилиндрической системе координат x_i (i = 1, 2, 3 соответствует r, φ, z). Тензор деформаций Коши-Грина имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{j,i} u_{j,k}\right), \qquad i, k = r, \varphi, z, \tag{1}$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора перемещений, матричный вид которого $\{\mathbf{u}\} = \left\{ u_r(r,z) \quad u_\varphi(r,z) \quad u_z(r,z) \right\}^{\mathrm{T}}$, $\qquad u_{2,2} = \dfrac{u_r}{r}$.

Производные от компонент v_i вектора приращений перемещений {v} по координатам следующие: $\{\mathbf{v}_{,j}\} = [l_i]\{\mathbf{v}\}$; $l_{1_{ij}} = \delta_{ij} \dfrac{\partial}{\partial r}$; $l_{2_{ij}} = \delta_{ij} \dfrac{1}{r}$, $l_{2_{ij}} = 0$ при $i = j = 2, 3$; $l_{3_{ij}} = \delta_{ij} \dfrac{\partial}{\partial z}$.

Приращение деформаций e_{ik} за один шаг по параметру нагрузки будет

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} v_{j,i} v_{j,k}, \quad \tilde{e}_{ik} = \frac{1}{2}\left[v_{j,i}\left(\delta_{jk} + u_{j,k}\right) + v_{j,k}\left(\delta_{ji} + u_{j,i}\right)\right], \quad i,j,k = r,\varphi,z. \tag{2}$$

где u_i – полные перемещения, накопленные на предыдущих шагах.

Представим (2) в матричном виде с помощью операторной матрицы $\left[\tilde{\mathrm{L}}\right]$

$$\{\tilde{\mathrm{e}}\} = \left[\tilde{\mathrm{L}}\right]\{\mathrm{v}\}, \tag{3}$$

$$\left[\tilde{\mathrm{L}}\right] = \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right)\dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \left(1 + \dfrac{u_r}{r}\right)\dfrac{1}{r} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial z} & \left(1 + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \left(1 + \dfrac{u_r}{r}\right)\dfrac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z} & \left(1 + \dfrac{u_r}{r}\right)\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} + \left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial u_r}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial}{\partial r} + \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) \end{bmatrix}.$$

Физический закон гиперупругого материала определяется потенциалом W

$$t^{ik} = \frac{1}{J}\sigma^{ik} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}, \tag{4}$$

где t^{ik} – тензор истинных напряжений (тензор Коши), $J = \sqrt{G/g}$ (G и g – третьи инварианты тензоров меры деформации Коши-Грина G_{ik} и метрического тензора среды до деформации g_{ik} соответственно), σ^{ik} – тензор напряжений Пиолы-Киргоффа; в общем случае $W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$, $\gamma_{ik} = 2\varepsilon_{ik}$, $i \neq k$.

Связь компонент приращений напряжений Пиолы-Киргоффа s^{ik} и деформаций e_{ik} есть

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} e_{lm}. \tag{5}$$

Заменяя индексы в векторах $\{\mathbf{e}\} = \{e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad \tilde{\gamma}_{12} \quad \tilde{\gamma}_{23} \quad \tilde{\gamma}_{31}\}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\gamma}_{ik} = 2e_{ik}$, $i \neq k$ и $\{\mathbf{s}\} = \{s^{11} \quad s^{22} \quad s^{33} \quad s^{12} \quad s^{23} \quad s^{31}\}^{\mathrm{T}}$ на 1,…,6 и вводя матрицу 6×6 касательных модулей упругости $[\tilde{\mathrm{E}}]$ с компонентами $\tilde{E}_{ik} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}$, запишем (5) в матричном виде $\{\mathrm{s}\} = [\tilde{\mathrm{E}}]\{\mathrm{e}\}$.

Приведем потенциалы гиперупругих материалов. Потенциал Муни-Ривлина

$$W = \mu(J_1 - 3) - \frac{\mu}{2}(J_2 - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{2}(J-1)^2, \tag{6}$$

где J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина.

Потенциал Джона (полулинейный материал)

$$W = \frac{1}{2}\left[\lambda(\lambda_r + \lambda_\varphi + \lambda_z)^2 + 2\mu\left(\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2\right)\right], \tag{7}$$

где $\lambda_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{kk}}$ – удлинения, $k = r$, φ, z (по k нет суммирования).

Для исследования поведения почти несжимаемых трансверсально-изотропных гиперупругих материалов обычно применяют потенциалы

$$W = \frac{1}{2}C[\exp(Q) - 1] + c_c (J-1)^2, \tag{8}$$

$$W = \frac{1}{2}C[\exp(Q) - 1] + c_c (J \ln J - J + 1), \tag{9}$$

$$Q = b_1 \varepsilon_{ff}^2 + b_2\left(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{cc}^2 + 2\varepsilon_{rc}^2\right) + 2b_3\left(\varepsilon_{fr}^2 + \varepsilon_{fc}^2\right),$$

где f – индекс оси изотропии, два других – индексы осей в нормальной к ней плоскости (плоскости изотропии). Вторые слагаемые в (8) и (9) являются функциями штрафа, пропорциональные квадрату объемной деформации при инфинитезимальных деформациях.

Физический закон гиперупругого материала при $\varepsilon_{ik} \to 0$, i, k = 1, 2, 3 должен стремиться к закону Гука для анизотропного материала. Структура матриц, получаемых из (8) и (9), не отвечает указанному требованию.

Введем новый потенциал, лишенный указанного недостатка [5]

$$W = C\left\{\left[\exp(\alpha W_0) - 1\right]/\alpha + c_c (J-1)^2\right\}, \tag{10}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}\Big(c_1\varepsilon_{11}^2 + c_2\varepsilon_{22}^2 + c_3\varepsilon_{33}^2 + c_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + c_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} +$$
$$+ c_6\varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + c_7\gamma_{12}^2 + c_8\gamma_{23}^2 + c_9\gamma_{31}^2\Big),$$

где C – константа с размерностью напряжения; α, c_c и c_1 – c_9 – безразмерные.

Функция W_0 отличается от Q введением смешанных произведений линейных деформаций с коэффициентами c_4, c_5, c_6, что позволяет точно описать изотропный, трансверсально-изотропный или ортотропный материал. Множитель C определяет жесткость материала, показатель α управляет степенью нелинейности жесткости, рост c_c увеличивает степень несжимаемости материала. Напомним, что здесь деформации отнесены к правой материальной системе координат (ее оси совпадают с осями трансверсальной изотропии материала).

При расчетах НДС тел вращения, обладающих неоднородной трансверсальной изотропией, надо учитывать, что материальная («вмороженная») система координат не совпадает с исходной, цилиндрической. Установим связь между цилиндрической и материальной системами координат.

Так как аргументами потенциалов трансверсально-изотропного материалов являются компоненты тензора деформаций в материальной системе координат, на определенном этапе алгоритма необходимо преобразовывать тензор деформаций от цилиндрической системы к материальной. Свяжем направление меридиана со второй осью материальной системы координат x', y', z', а плоскость изотропии – с первой и третьей осями. Пусть угол между осью r и нормалью к меридиану стенки тела вращения есть ψ, а γ – угол между касательной ко второй (окружной) координате цилиндрической системы координат и второй координатой материальной системы координат. Тогда матрицы поворота [A₁] и [A₂] на углы γ и ψ, соответственно, будут [6]

$$[\mathrm{A}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \quad [\mathrm{A}_2] = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix},$$

а преобразование от цилиндрической к материальной системе координат будет выполняться умножением матрицы деформаций в цилиндрической системе координат на матрицу

$$[\mathrm{B}]=[\mathrm{A}_1][\mathrm{A}_2]=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & \sin\psi\\ -\sin\psi\sin\gamma & \cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma\\ -\sin\psi\cos\gamma & -\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma\end{bmatrix}.$$

Полученная матрица [B] ортогональна, ее определитель равен единице, обратная ей матрица – транспонированная. С точностью до обозначений матрица [B] совпадает с матрицей поворота, указанной в статье [7]. Заметим, что дифференцирование потенциала по компонентам тензора деформаций в материальной системе координат дает компоненты тензора напряжений в той же системе. Преобразование от материальной системы координат к цилиндрической выполняется с помощью матрицы, обратной к [B].

Для построения метода решения исходим из вариационного принципа возможных перемещений. В соответствии с ним в состоянии равновесия вариация полной энергии системы, состоящей из потенциальной энергии деформации U и работы A внешних сил, равна нулю

$$\delta(U+A)=0\,. \tag{11}$$

Запишем формулы для вариации U и A на m- и m+1-м шаге

$$\delta U_m=\int_{V_0}\sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}dV_0\,,\qquad \delta A_m=-\int_{S_m}q\delta u_n dS_m\,,$$

$$\delta U_{m+1}=\int_{V_0}(\sigma^{ik}+s^{ik})\delta(\varepsilon_{ik}+e_{ik})dV_0\,,$$

$$\delta A_{m+1}=-\int_{S_{m+1}}(q_m+\Delta q)\delta(u_n+v_n)dS_{m+1}\,,$$

где V_0 – объем тела до деформации, S_m – поверхность деформированного тела на m-ом шаге, q – внешнее давление, заданное на поверхности S_m, u_n – перемещение по нормали к поверхности S_m, Δq – приращение давления за шаг, v_n – приращение перемещения по нормали к поверхности S_{m+1}.

В состоянии равновесия $\delta\varepsilon_{ik}=\delta u_n=0$. Сохраняя лишь квадратичные относительно приращений перемещений слагаемые, преобразуем (11) так:

$$\int_{V_0}\left[\widetilde{D}^{iklm}\widetilde{e}_{lm}\delta\widetilde{e}_{ik}+\frac{1}{2}\sigma^{ik}\left(\delta v_{j,i}v_{j,k}+v_{j,i}\delta v_{j,k}\right)\right]dV_0-$$

$$-\int_{S_{m+1}}\Delta q\delta v_n dS_{m+1}+\delta R_{m+1}=0\,, \tag{12}$$

где $\delta R_{m+1}=\int_{V_0}\sigma^{ik}\delta\widetilde{e}_{ik}dV_0-\int_{S_m}q_m\delta v_n dS_m$.

При решении задач в контактной постановке в вариационный принцип (12) вводится дополнительное слагаемое $\dfrac{C_0E_0}{R}\displaystyle\int_{S_c}v_n\delta v_n\psi dS_c$, где C_0 – безразмерная константа, E_0 и R – характерные значения модуля упругости и радиуса резины, v_n – приращение перемещения по нормали к поверхности контакта S_c, функция $\psi = \frac{1}{2}\left[1 + \left(u_n(z) - d(z)\right)\right]$ равна единице в области контакта и нулю вне ее.

Для применения МКЭ представим (12) в матричном виде

$$\int_{V_0}\left[\{\delta \mathrm{v}\}^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathrm{L}}\right]^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathrm{E}}\right]\left[\widetilde{\mathrm{L}}\right]\{\mathrm{v}\} + \frac{1}{2}\left(\{\delta \mathrm{v}\}^{\mathrm{T}}[l_i]^{\mathrm{T}}\left[\sigma^{ik}\right][l_k]\{\mathrm{v}\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \{\delta \mathrm{v}\}^{\mathrm{T}}[l_k]^{\mathrm{T}}\left[\sigma^{ki}\right][l_i]\{\mathrm{v}\}\right)\right]dV_0 = \int_{S_{m+1}}\{\delta \mathrm{v}\}^{\mathrm{T}}\{\Delta \mathrm{Q}\}dS_{m+1} - \int_{S_{m+1}}\{\delta \mathrm{v}\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{R}\}dS_{m+1}, \quad (13)$$

где $[\sigma^{ik}]$ – матрица 3×3 компонент σ^{ik} тензора полных напряжений; первый и второй интегралы правой части – вектор-столбцы, отвечающие нагружению и корректирующей решение невязке.

Далее с помощью МКЭ проводим алгебраизацию принципа возможных перемещений в приращениях. Введем для определенности четырехугольный восьмиузловой конечный элемент (КЭ). Вектор перемещений его произвольной точки будет

$$\{\mathrm{u}\} = [\mathrm{N}]\{\widetilde{\mathrm{u}}\}, \qquad \{\widetilde{\mathrm{u}}\} = \left\{u_{r1} \quad u_{\varphi 1} \quad u_{z1} \quad \ldots \quad u_{r8} \quad u_{\varphi 8} \quad u_{z8}\right\}^{\mathrm{T}},$$

где $[\mathrm{N}]$ – матрица функций формы КЭ, $\{\widetilde{\mathrm{u}}\}$ – вектор узловых перемещений элемента. Тогда соотношения для v_i и $\widetilde{e}_{ik}$ будут

$$\{\mathrm{v}\} = [\mathrm{N}]\{\widetilde{\mathrm{v}}\}, \qquad \{\widetilde{\mathrm{e}}\} = \left[\widetilde{\mathrm{L}}\right][\mathrm{N}]\{\widetilde{\mathrm{v}}\}, \quad (14)$$

где $\{\widetilde{\mathrm{v}}\}$– вектор приращений узловых перемещений.

Подставляя (14) в уравнение (13), получим

$$\{\delta\widetilde{\mathrm{v}}\}^{\mathrm{T}}\left\{\int_{V_0^e}\left[[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathrm{L}}\right]^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathrm{E}}\right]\left[\widetilde{\mathrm{L}}\right][\mathrm{N}] + \frac{1}{2}\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[l_i]^{\mathrm{T}}\left[\sigma^{ik}\right][l_k][\mathrm{N}] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[l_k]^{\mathrm{T}}\left[\sigma^{ki}\right][l_i][\mathrm{N}]\right)\right]dV_0^e\right\}\{\widetilde{\mathrm{v}}\} =$$

$$= \{\delta\widetilde{\mathrm{v}}\}^{\mathrm{T}}\int_{S_{m+1}}[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\{\Delta \mathrm{Q}\}dS_{m+1} - \{\delta\widetilde{\mathrm{v}}\}^{\mathrm{T}}\int_{S_{m+1}}[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\{\mathrm{R}\}dS_{m+1}. \quad (15)$$

Суммируя (15) по всем КЭ и приравнивая нулю множители при $\{\delta\widetilde{v}\}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[\mathrm{K}]\{\widetilde{\mathrm{v}}\} = \{\mathrm{Q}\} - \{\mathrm{R}\}, \quad (16)$$

где [K] – матрица жесткости; {Q} и {R} – векторы-столбцы приращений нагрузок и невязок уравнений равновесия.

Кинематические граничные условия вводим в (16) путем замены диагональных компонент [K], отвечающих равным нулю компонентам вектора перемещений, значениями существенно большими, чем другие компоненты матрицы, а также аннулируя соответствующие элементы вектора правой части.

Основные этапы алгоритма численного решения вариационной задачи МКЭ состоят в следующем. По исходной информации о форме и размерах поперечного сечения тела и числе КЭ строится сетка КЭ. При этом образуется информационный массив, указывающий на уровень жесткости материала элемента (он необходим для расчета кусочно-однородных тел). Так как расчет выполняется шаговым методом по параметру нагрузки, на каждом шаге имеем линеаризованную задачу МКЭ относительно приращений узловых перемещений. Исходное состояние тела считаем свободным от нагрузки (недеформированным). Далее в соответствии с (15) численным интегрированием по Гауссу вычисляются элементы матриц жесткости КЭ и производится их накопление в матрицу жесткости тела. На следующем этапе подсчитываются элементы вектора правой части СЛАУ, отвечающего заданному приращению давления на нагруженной поверхности тела. Затем вводятся кинематические граничные условия – условия закрепления тела, т. е. равенства нулю узловых перемещений в определенных узлах. Таким образом, приходим к СЛАУ. Матрица полученной системы симметричная, положительно определенная и имеет ленточную структуру, поэтому хранится в виде верхней правой полуленты. Для ее решения применяем метод Холецкого [7]. Для уточнения решения используем итеративный процесс метода Ньютона-Рафсона [9]. Полное решение СЛАУ выполняется только на первой итерации, на последующих – лишь обратный ход. Указанные вычисления повторяются заданное число шагов по нагрузке, что дает возможность проследить за НДС тела на протяжении всего процесса нагружения.

Полученные приращения компонент вектора узловых перемещений прибавляются к массиву накопленных на предыдущих шагах (полных) перемещений, что позволяет вычислять новые координаты узлов деформированной сетки КЭ. Полные деформации в узлах определяются как произведение модифицированной введением коэффициентов 1/2 матрицы $\left[\widetilde{L}\right]$ (3), умноженной на вектор узловых значений полных перемещений. При этом реализуется точная формула (1). Компоненты тензора напряжений в узлах сетки определяются из (4), а затем – физические компоненты тензора напряжений Коши.

Для проверки достоверности результатов, получаемых предложенным методом, были решены линейная и нелинейная задачи деформирования толстостенного цилиндра и полой сферы под действием внутреннего давления. Результаты решения линейных задач сравнивались с точными решениями задач Ламе [10], а нелинейной – с точными решениями А.И. Лурье [1] для цилиндра [11] и сферы, выполненных из полулинейного материала Джона (7). Численные решения линейной и нелинейной задач совпали с точными с относительной погрешностью 10^{-4} при пяти итерациях по методу Ньютона-Рафсона.

Предложенная методика численного решения задач использована для изучения НДС двух типов объектов: резинотехнических изделий (бронированный шланг [12], опоры [13] и амортизаторы [14] с ограничением радиальных перемещений резиновых блоков) и математической модели левого желудочка сердца [15-17], которые связаны некой общностью, а именно: кусочной однородностью и гиперупругостью материала. Для исследования НДС резинотехнических изделий применялся потенциал Муни-Ривлина (6), для модели левого желудочка сердца – (10).

Список литературы: **1.** *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: 1980. – 512 с. **2.** *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с. **3.** *Снеддон И.Н.*, *Берри Д.С.* Классическая теория упругости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 219 с. **4.** *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – 584 с. **5.** *Кантор Б.Я.*, *Мисюра Е.Ю.* Потенциал почти несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 20. – С. 111-120. **6.** *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 279 с. **7.** *Nielsen P.M.F.*, *Le Grice L.J.* eds. Mathematical model of geometry and fibrous structure of the heart // Am. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol. 29) – 1991. – 260. – P. H1365 –H1378. **8.** *Уилкинсон Р.* Линейная алгебра: Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с. **9.** Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с. **10.** *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с. **11.** *Мисюра Е.Ю.* Численное решение геометрически нелинейной задачи для толстостенного цилиндра, выполненного из материала Джона // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №19. – С. 141–148. **12.** *Мисюра Е.Ю.* Нелинейное деформирование бронированного шланга // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 47. – С. 107-112. **13.** *Кантор Б.Я.*, *Мисюра Е.Ю.* Об управлении нелинейной жесткостью цилиндрических резиновых опор // Пробл. машиностроения. – 2005. – № 2, т. 8. – С. 50-56. **14.** Патент 9984 Украина, МКИ^3 7 F16F3/00. Амортизатор / Б.Я. Кантор, Г.И. Львов, Е.Ю. Мисюра (Украина); № u 2005 04269; Заявлено 04.05.2005; Опубл. 17.10.2005, Бюл. № 10. – 2005. – С. 4. **15.** *Кантор Б.Я.*, *Мисюра Е.Ю.* Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и …. – 2004. – № 1(10). – С. 23–31. **16.** *Кантор Б.Я.*, *Яблучанский Н.И.*, *Мисюра Е.Ю.* Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №31. – С. 106-117. **17.** *Кантор Б.Я.*, *Мисюра Е.Ю.* Нелинейное моделирование напряженно-деформированного состояния левого желудочка сердца в хронической стадии инфаркта миокарда // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 79–87.

Поступила в редколлегию 03.04.2006

УДК 539.3

Л.В.КУРПА, докт.техн.наук; ***Г.Н.ТИМЧЕНКО***; НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглядається задача про нелінійні вільні коливання композитних багатошарових пластин складної форми, при різних способах закріплення. Математична постановка задачі розглядається в рамках теорії типу Тимошенко. Розв'язання задачі виконано за допомогою теорії R-функцій, варіаційних методів і метода Бубнова-Гальоркіна. Наведено порівняння одержаних результатів для композитної пластини, з відомими результатами, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.