

$I_2 = 0,2\lambda_2$ ,  $p_2 = 0,05(\lambda_2 + 2\mu_2)$  (рис. 1,в). При этом плотность и коэффициенты Ламе среды линзы оставались постоянными.

**Список литературы:** 1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – Г., Наука, 1980. – 304 с. 2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград, Наука, 1980. – 280 с. 3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К., Наукова думка, 1988. – 220 с. 4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 3.– С. 394-402. 5. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

*Поступила в редколлегию 27.12.2005*

УДК 534; 629.7

***Е.А.КУРИЛОВ***, НТУ «ХПИ»

## **ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

Розглядається аеропружність стійкості циліндричної оболонки з приєднаними масами в надзвуковому потоці газу. Рівняння теорії пологих оболонок Донела-Муштари-Власова використано для аналізу динаміки оболонки. Взаємодію потоку та оболонки описано за допомогою лінійної поршневої теорії. Дискретизацію проведено за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. Проаналізовано ефект віброгасіння.

The aeroelastic stability of simply supported cylindrical shell with localized masses in supersonic flow is investigated. The Donnell-Mushtari-Vlasov nonlinear shallow-shell theory is used to describe the shell dynamics. Linear piston theory is applied to describe the fluid-structure interaction. The system is discretized by the Bubnov-Galerkin procedure. The dumping effect is analyzed.

**Введение.** На протяжении последних десятилетий существует повышенный интерес к проблемам динамики цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Причина этого заключается в том, что упругие оболочки являются важнейшими несущими элементами в конструкциях летательных аппаратов или других технических объектов, находящихся под действием интенсивных аэродинамических сил. Подавляющее большинство работ посвящено исследованию оболочек идеальной формы. Однако анализ динамического поведения реальных тонкостенных конструкций при обтекании их сверхзвуковым потоком свидетельствует о существенном влиянии на их устойчивость и прочность локальных неоднородностей типа присоединенных масс, представляющих собой в реальной конструкции различные датчики и другие элементы. При определенных условиях действие этих элементов экви-

валентно действию динамических гасителей колебаний [2]. Таким образом, проблема распределения элементов конструкции по несущей поверхности а также (при необходимости) добавление в конструкцию новых элементов является важнейшей задачей проектирования летательных аппаратов.

В данной работе поведение оболочки с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке газа рассматривается с использованием нелинейной теории пологих оболочек и так называемой «поршневой теории» [7,8], которая применяется для описания аэроупругих взаимодействий. Такой подход обеспечивает достаточную точность анализа в широком диапазоне внешних нагрузок и амплитуд колебаний, а также позволяет выделить важные режимы движения упругой системы.

**1. Постановка задачи.** Общая постановка задачи нелинейных колебаний упругих цилиндрических оболочек с присоединенными массами, обтекаемых потоком газа, довольно сложная. Это связано с необходимостью рассмотрения связанной динамической системы типа «оболочка – абсолютно твердое тело (жестко или упруго присоединенное к оболочке) – газовый поток», непрерывно изменяющей свои динамические характеристики. Задача флаттера по своей природе является существенно нелинейной.

В качестве исходных разрешающих уравнений оболочки используются хорошо известные уравнения Доннелла-Муштари-Власова [6-8,12,14]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{P}{h} - \left[ \rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(x - x_i, y - y_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $w$  – динамический прогиб;  $\Phi$  – функция напряжений в срединной поверхности;  $x, y$  – продольная и окружная координаты срединной поверхности соответственно;  $L(w, \Phi)$  и  $\nabla^4$  – хорошо известные дифференциальные операторы;  $h$  – толщина оболочки;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $\rho$  – плотность материала;  $R$  – радиус оболочки. Связь между усилиями, действующими в срединном слое оболочки, и перемещениями имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}; \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}; \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Аэродинамическое давление  $P$  аппроксимируется следующим выраже-

нием в соответствии с линейной «поршневой теорией» [6,16]:

$$P = \chi P_\infty \left[ \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (1.2)$$

где  $\chi$  – показатель политропы;  $P_\infty, a_\infty$  – давление и скорость в невозмущенном потоке;  $M_\infty$  – число Маха в невозмущенном воздушном потоке.

Линейная «поршневая теория» (или «закон плоских сечений») – наиболее простой вариант приближенных теорий определения зависимости аэродинамических сил от возмущений обтекаемой поверхности. При достаточно больших сверхзвуковых скоростях поршневая теория дает вполне приемлемые результаты, согласующиеся с экспериментальными данными [3-5,17,18].

Взаимодействие оболочки с жестко присоединенными осцилляторами описывается с помощью двумерного оператора Дирака  $\delta(x-x_i, y-y_i)$  [1], где  $x_i, y_i$  – координаты точек крепления осцилляторов на поверхности оболочки; в уравнениях (1.1)  $\mu_i$  представляет собой массу  $i$ -го осциллятора,  $N$  – количество осцилляторов.

Уравнения Доннелла-Муштари-Власова дают приемлемый результат только при выполнении условия  $h \ll R$ . Перемещения в плоскости должны быть малы, т.е.  $|u| \ll h, |v| \ll h$ , тогда как прогиб  $w$  может иметь тот же порядок что и толщина оболочки,  $|w| = O(h)$ .

Если пользоваться гипотезой прямых нормалей, то для каждой точки контура необходимо удовлетворить четырем граничным условиям.

В данной работе рассматриваются бесконечно длинные периодически опертые оболочки, и во внимание берется область оболочки длины  $L$ , лежащая между двумя опорами. В этом случае на концах оболочки должны быть удовлетворены следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $M_x$  – изгибающий момент. Два других условия имеют вид:

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (1.4)$$

Более того,  $u, v, w$  должны быть непрерывны по координате  $y$ .

**2. Дискретизация задачи.** В общем случае точное аналитическое решение сформулированной задачи пока не получено. Как и при решении задач нелинейной динамики оболочек с присоединенными массами в покоящейся среде, приходится прибегать к использованию различных приближенных подходов. Как правило, на первом этапе задача с распределенными параметрами сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Чаще всего для этого применяется метод Бубнова-Галеркина.

Для расчета колебаний оболочки в потоке газа ограничимся учетом четырех форм изгибных колебаний [8]:

$$w = f_1 \sin rx \sin sy + f_2 \sin rx \cos sy + f_3 \sin 2rx \sin sy + f_4 \sin 2rx \cos sy + f^*(x, t) \quad (2.1)$$

Здесь  $s = n/R$ ,  $r = m\pi/L$ , причем  $m = 1$ .  $n$  представляет собой число полных волн по окружности,  $m$  – число полуволн по области оболочки длины  $L$ . Функция  $f^*$  отражает вклад нелинейных факторов в динамический прогиб. Для ее определения используем условие непрерывности (замкнутости) окружных перемещений по контуру [6-8]:

$$\int_0^{2\pi R} \left( -\frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dy = 0. \quad (2.2)$$

В результате приходим к зависимости

$$f^*(x, t) = \frac{n^2}{4R} [(f_1 \sin rx + f_3 \sin 2rx)^2 + (f_2 \sin rx + f_4 \sin 2rx)^2]. \quad (2.3)$$

Следует отметить неслучайность выбора четырехмодовой аппроксимации функции прогиба. В предшествующих работах было показано [8], что учет меньшего числа форм изгибных колебаний не позволяет достоверно исследовать связанную систему «упругая оболочка – газовый поток». Использование же большего числа членов ряда приводит к заметному усложнению аналитического исследования системы, не оказывая при этом существенного влияния на результаты исследования.

Очевидно, что колебания с наибольшими амплитудами реализуются по первой форме, и, следовательно, эта форма представляет наибольший в плане ее гашения интерес. В связи с этим в качестве точки крепления осцилляторов по продольной координате примем  $x_i = L/2$ , что также существенно облегчит дискретизацию задачи. В тоже время координаты крепления осцилляторов по окружности (а также их количество) примем произвольным.

Применяя метод Бубнова-Галеркина к системе (1.1), получаем уравнения движения, связывающие неизвестные функции  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_1) \ddot{f}_1 + \gamma_3 \ddot{f}_2 + \omega_1^2 f_1 + \alpha \dot{f}_1 - \beta f_3 &= Z_1; \\ (1 + \gamma_2) \ddot{f}_2 + \gamma_3 \dot{f}_1 + \omega_2^2 f_2 + \alpha \dot{f}_2 - \beta f_4 &= Z_2; \\ \ddot{f}_3 + \omega_2^2 f_3 + \alpha \dot{f}_3 + \beta f_1 &= Z_3; \\ \ddot{f}_4 + \omega_2^2 f_4 + \alpha \dot{f}_4 + \beta f_2 &= Z_4. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\omega_i$  – собственные частоты линейных колебаний оболочки;

$$\alpha = \frac{\chi P_\infty}{\rho h a_\infty}; \quad \beta = \frac{8}{3} \frac{\chi P_\infty M_\infty}{L h \rho}; \quad (2.5)$$

$Z_i$  – нелинейные относительно обобщенных перемещений  $f_i$  и их производных функции ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Явные выражения для этих функций здесь не представлены из-за их громоздкости.

Коэффициенты  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  представляют собой вклад сосредоточенных масс в линейную часть системы:

$$\gamma_1 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \sin^2 \left( \frac{y_i}{R} \right);$$

$$\gamma_2 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \cos^2 \left( \frac{y_i}{R} \right);$$

$$\gamma_3 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \sin \left( \frac{y_i}{R} \right) \cos \left( \frac{y_i}{R} \right),$$

где  $M_0 = 2\pi R L h \rho$  – масса незагруженной оболочки. В данной работе отношение  $\mu_i/M_0$  принималось порядка 0,1-0,2 % с суммарной массой всех осцилляторов не превышающей 2 % от массы незагруженной оболочки.

**3. Граница устойчивости.** Для нахождения линейной границы устойчивости положения равновесия системы (2.4) линеаризуем систему и полагаем  $f_i \sim e^{kt}$ . Решая задачу на собственные значения

$$\begin{vmatrix} (1 + \gamma_1)k^2 + \omega_1^2 + k\alpha & \gamma_3 k^2 & -\beta & 0 \\ \gamma_3 k^2 & (1 + \gamma_2)k^2 + \omega_1^2 + k\alpha & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & k^2 + \omega_2^2 + k\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & k^2 + \omega_2^2 + k\alpha \end{vmatrix} = 0$$

и рассматривая все возможные случаи, когда их вещественная часть становится положительной, строим границу флаттера.

При численном расчете физические и геометрические параметры системы были приняты постоянными,

$$\rho = 8905,37 \text{ кг/м}^3; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \mu = 0,35; \quad n = 21; \quad \chi = 1,4;$$

$$M_\infty = 3; \quad a_\infty = 213 \text{ м/с}; \quad R = 0,2 \text{ м}; \quad L = 0,4 \text{ м}; \quad h = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Следует отметить, что выбранное здесь число волн в окружном направлении  $n = 21$  не является случайным. Для выбранных параметров системы оно соответствует нижней границе появления флаттера для гладкой оболочки [9].

Для простоты расчетов в данной работе все  $\mu_i$  приняты одинаковыми. Крепление осцилляторов по окружности контура – симметричное, на равном расстоянии друг от друга.

На рис. 3.1 приведены критические значения аэродинамического давления (при котором тривиальное положение равновесия становится неустойчивым и возбуждаются автоколебания) для различного числа осцилляторов  $N$  (от 1 до 6). Как показывают расчеты, для системы с сосредоточенными массами количеством от 1 до 3 граница устойчивости практически не различается и близка к границе для гладкой оболочки. Начиная же с  $N = 4$  граница начинает существенно повышаться. Причем, как показывает прямое численное интегрирование нелинейной системы (2.4), как и в случае гладкой оболочки, полученная линейная граница возникновения флаттера оказывается завышенной. В линеаризованной системе при докритических (дофлаттерных) значениях давления набегающего потока движение системы будет носить затухающий характер, при закритических наступает динамическая неустойчивость. В случае же, когда нелинейные члены  $Z_i$  учтены, колебания в области флаттера перестают носить периодический характер. А именно,

на достаточно большом промежутке времени возникающий предельный цикл становится неустойчивым и в системе реализуется переход от этого предельного цикла к колебаниям типа биений.

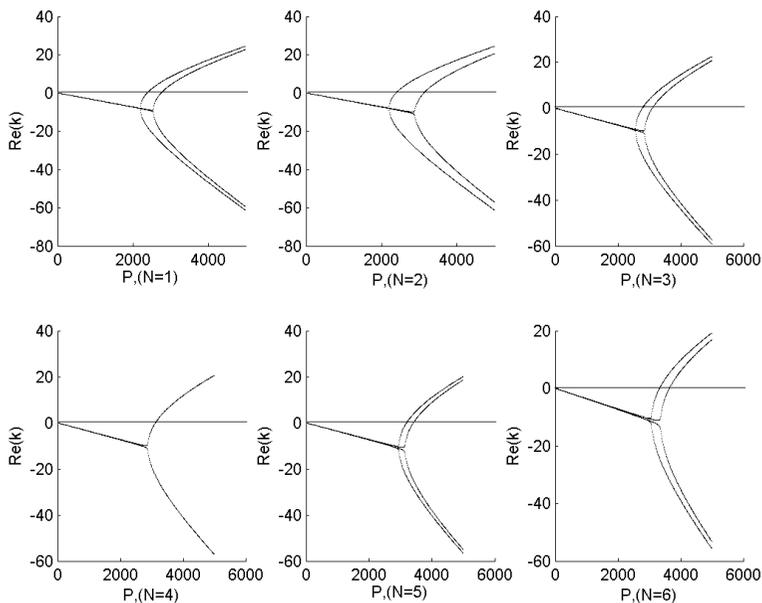


Рисунок 3.1

Как видно из рис. 3.1, с ростом числа сосредоточенных масс растет и граница возникновения флаттера. Однако в данном случае рост числа осцилляторов означает и рост их суммарной массы, что может быть недопустимо при проектировании реальной конструкции с точки зрения экономичности. В связи с этим встает вопрос о поиске некоего оптимального отношения «число осцилляторов – суммарная масса».

На рис. 3.2 приведены значения критического аэродинамического давления для систем, несущих различное количество присоединенных масс в случае, когда их суммарная масса остается неизменной (в данном случае составляющая 1% от массы незагруженной оболочки).

Из рисунка видно, что наилучший эффект «поднятия» границы возникновения флаттера дает случай, когда число осцилляторов  $N = 4$ , т.е. минимальное для достижения эффекта виброгашения число осцилляторов в то же время является и оптимальным.

**Выводы.** Была проведена дискретизация исходной модели нелинейных колебаний цилиндрической оболочки с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке, в результате чего задача была сведена к анализу системы с

четырьмя степенями свободы. Получены границы флаттера для оболочек с различным числом осцилляторов. Определено оптимальное для виброгашения число осцилляторов  $N$ .

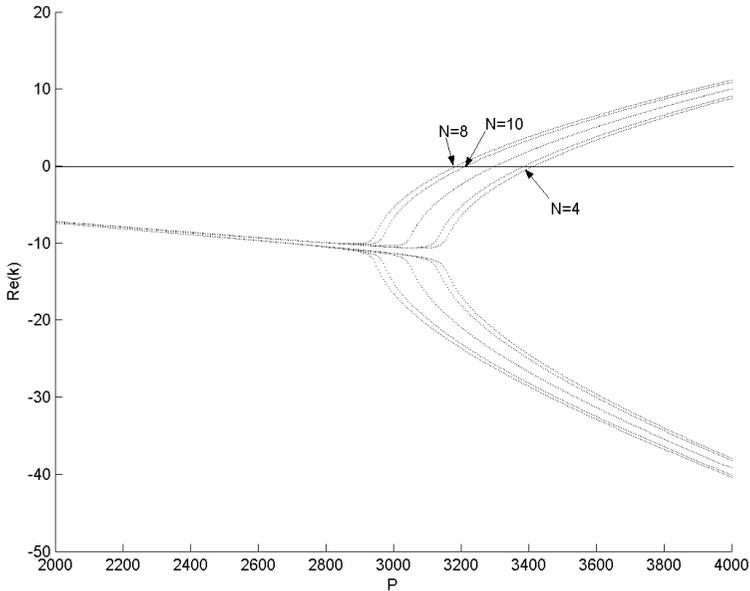


Рисунок 3.2

**Список литературы:** 1. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с. 2. Бидерман В.И. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1977. – 488 с. 3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с. 4. Болотин В.В. Нестационарный флаттер пластин и пологих оболочек в потоке газа // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 106-114. 5. Болотин В.В. Эффекты стабилизации и дестабилизации в задачах устойчивости упругих систем. – Новосибирск: Наука, 1977. – С. 7-18. 6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 7. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. – М.: Наука, 1976. – 410 с. 8. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснополянская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наукова думка, 1984. – 220 с. 9. Курилов Е.А. Аэроупругая устойчивость и нелинейные нормальные колебания цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Вестник НТУ «ХПИ». – № 20. – 2004. – С. 29-38. 10. Малкин И.Г. Некоторые проблемы теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с. 11. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. 12. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1978. – Т. 11. – С. 67-122. 13. Тонкостенные оболочечные конструкции / Под ред. Э.И.Григолоука. – М.: Машиностроение, 1980. – 608 с. 14. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с. 15. Amabili M., Pellicano F. Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells // AIAA Journal. – Vol. 39, No. 4. – April 2001. – P. 564-572. 16. Matsuzaki Y., Kobayashi S. Nonlinear analysis of supersonic panel flutter of circular cylindrical shells // Ibid. – № 18. – P. 103-111. 17. Olson M.D., Fung Y.C. Supersonic flutter of circular shells subjected to internal pressure and axial compression // Ibid.4. – № 4. – 1966. – P. 858-864. 18. Olson M.D., Fung Y.C. Comparing theory and

experiment for the supersonic flutter of circular shell // *Ibid.*5. – № 10. – 1967. – PP. 1849-1856. **19.** *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal Modes and Localizations in Nonlinear Systems. – Wiley, New York, 1996.

*Поступила в редколлегию 13.04.2006*

УДК 539.3

**Б.Я.КАНТОР**, докт. техн. наук, ИПМаш НАН Украины;  
**Е.Ю.МИСЮРА**, ХНЭУ

### **МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕОДНОРОДНО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ**

Викладена методика чисельного розв'язання осесиметричних (зі скрутом та без нього) фізично та геометрично нелінійних задач для майже нестисливих кусково-однорідних неоднорідно трансверсально-ізотропних та ізотропних гіперупругих тіл обертання на основі варіаційного принципу можливих переміщень у приращеннях, який реалізується кроковим алгоритмом методу скінченних елементів. Вірогідність результатів, що одержуються за допомогою цієї методики, підтверджена збігом чисельних і точних розв'язків лінійних (Ламе) і нелінійних (О.І.Лур'є) задач деформування порожнистих циліндра і сфери під внутрішнім тиском. Запропонована методика використана для вивчення НДС двох типів об'єктів: гумовотехнічних конструкцій (броньований шланг, різні види гумових опор і амортизаторів з обмеженням радіальних переміщень гумових блоків) та математичної моделі лівого шлуночка серця.

The numerical solution methodics of axisymmetric (with and without the torsion) physically and geometrically nonlinear problems for nearly incompressible piecewise-homogeneous nonhomogeneously transversely isotropic and isotropic hyperelastic bodies of revolution on the base of the variational principle of possible displacements in the increments which realized of the stepping algorithm of the finite element method was stated. The reliability of the results which received with the help of this methodics was confirmed by coincidence of numerical and analytic solutions of the linear (Lame) and nonlinear (A.I. Lurie) problems of deformation of the hollow cylinder and sphere loaded by the internal pressure. The proposed methodics was used for study of the stress-strain state of two types objects: the rubber-technical structures (armoured hose, different kinds of rubber support and shock-absorbers with restriction of the radial displacement of the rubber blocks) and mathematical model of the heart left ventricle.

Анализ НДС гиперупругих тел вращения сложной формы и неоднородной структуры в физически и геометрически нелинейной постановке является сложной прикладной проблемой механики деформируемого твердого тела. Интерес к этой области исследований вызван внутренними стимулами развития науки и запросами практики. Задачи деформирования гиперупругих тел являются физически и геометрически нелинейными. Большой вклад в их изучение внесли А.И. Лурье [1], К.Ф. Черных [2], И.Н. Снеддон и др. [3], Л.И. Седов [4] и др. Нелинейность обусловлена поведением материала и наличием больших деформаций. Кроме того, к существенному усложнению приводят неклассическая форма тела, неоднородность его механических свойств, анизотропия и т.п. В таких случаях необходимо использовать численные методы, основанные на вариационных принципах меха-