

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук; **Н.И.КУЧЕРОВА**; НТУ «ХПИ»

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА БЕСКОНЕЧНУЮ ПЛАСТИНУ-ПОЛОСУ

Розглянуто рішення прямої та оберненої нестационарних задач для нескінченної пластини-полоси. Досліджується дія на пластину імпульсного навантаження. Пластина-полоса моделюється теорією Кірхгофа-Лява. При розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра застосовується метод А.С.Апарцина.

Solutions of direct and inverse non-stationary problems for infinite plate-strip are considered. An impulse load action on plate is explored. The simulation of the plates-strip deforming is based on classic Kirchhoff's theory. The Volterra integral equations are solved by using Aparcin's method.

В данной работе представлены решения прямой и обратной задач для бесконечной пластины-полосы под воздействием импульсной нагрузки. В ней производится дальнейшее развитие способов идентификации (распознавания) внешних импульсных воздействий на элементы конструкций по их проявлениям деформационного характера, наблюдающимся в некоторых точках нагружаемых упругих тел. В качестве объекта исследования выбрана бесконечная пластина-полоса, нагружаемая нестационарно. Аналогичные исследования были выполнены ранее, например, для стержней, пластин круглой и прямоугольной форм и для цилиндрических оболочек конечной длины. Описания соответствующих решений представлена в монографии [1].

В связи с тем, что решение обратной задачи в значительной степени базируется на решении соответствующей прямой задачи, то целесообразно в начале настоящей работы привести решение прямой задачи в предположении, что импульсная нагрузка, воздействующая на деформируемый объект, задана, то есть известна.

Рассмотрим прямоугольную пластину, ограниченную прямыми $x = 0$; $x = l$. Вдоль оси y пластина является бесконечной при $y \rightarrow \pm\infty$ (рис. 1).

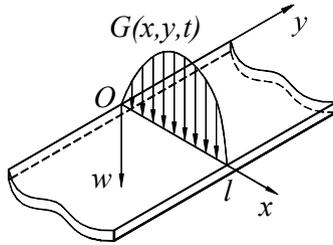


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины-полосы

1. Решение прямой задачи. Прямая задача о нестационарных колебаниях сводится к решению уравнения классической теории поперечных колебаний пластины

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y, t), \quad (1)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины; w – прогиб; ρ – объемная плотность материала; t – время; $P(x, y, t)$ – функция, описывающая нормальную поперечную нагрузку.

Задачу решаем с начальными условиями: $w|_{t=0} = 0$; $\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0$ и краевыми условиями, заданными на границе бесконечной пластины-полосы: $w|_{x=0} = 0$; $w|_{x=l} = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0, l} = 0$; $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} w(x, y, t) = 0$.

Пусть внешняя нагрузка интенсивностью во времени $P(t)$ сосредоточена вдоль линии $y = 0$, а по переменной x изменяется по закону синуса, то есть $P(x, y, t) = P(t)\delta(y) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, где $\delta(y)$ – дельта-функция.

Решение уравнения (1) было произведено с помощью использования преобразований Лапласа и Фурье [2, 3]. Оно осуществлялось аналогично построению решения для мембраны-полосы [4] и имеет вид

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{c\rho h} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{P(\tau)}{(c_1^2 + z^2)} \cdot \sin c(c_1^2 + z^2)(t - \tau) d\tau \cdot \cos|yz| dz \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{D/\rho h}$; $c_1 = \pi/l$.

Для численного нахождения прогиба расчет по выражению (2) производился с применением матричной формы записи. Для чего применялось следующее соотношение

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad (3)$$

где \mathbf{A} – матрица, соответствующая ядру $K(t - \tau)$, элементы которой находятся по формуле $a_{ji} = K[(j - i) \cdot \Delta t]$; $\Delta t = T/M$ – шаг во времени (T – рассматриваемый промежуток времени; M – количество разбиений промежутка времени,

принятом при исследовании). В нашем случае

$$K(t) = \frac{\Delta z'}{\pi \cdot c \cdot \rho \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\sin \left[c \cdot \left[c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2 \right] \cdot (m \cdot \Delta t) \right] \cdot \cos \left[y \cdot (n \cdot \Delta z') \right]}{c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2};$$

здесь $\Delta z' = Z/N$ – шаг интегрирования (Z – интервал интегрирования).

При численных расчетах согласно соотношению (3) принимались следующие исходные данные: функция $P(t)$ изменялась как единичная функция Хевисайда ($P(t) = P_0 \cdot H(t)$), где интенсивность действующей нагрузки $P_0 = 105$ Н; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $h = l/11$ м; $l = 0,4$ м; $\nu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³. Кривая прогиба, получаемая в соответствии с выражением (3), представлена на рис. 2 (кривая 3).

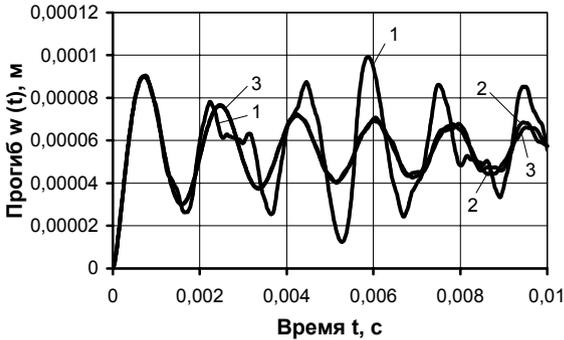


Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени

Для проверки достоверности полученного решения сравним его с решением для пластины ограниченных размеров прямоугольной формы, которое получаем для варианта пластины тоже теории Кирхгофа-Лява.

Упомянутое решение уравнения (1), отвечающее колебаниям прямоугольной пластины, описываются следующим выражением

$$w(x, y_1, t) = \frac{2P_0}{b\rho h} \cdot \sum_{n=0}^N \left[\frac{1 - \cos c_2 \lambda_n t}{(c_2 \lambda_n)^2} \cdot \sin \frac{n\pi \zeta}{b} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \right]. \quad (4)$$

Выражение (4) записано в декартовой системе координат (x, y_1) . Связь между y и y_1 в формулах (2) и (4) такова, что ордината $\zeta = b/2$ отвечает середине вдоль длины пластины. В формуле (4) b – длина пластины, a – ее ширина, $c_2 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, $\lambda_n = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$. Кривые, получаемые при численном анализе

данного выражения, показаны на рис. 2, причем кривая 3 соответствует кривой на рис. 2, если параметр b принять равным 20 м. Хорошая сопоставляемость указанных кривых и подтверждает достоверность полученного решения (3). Укажем также, что кривая 1 – $b = 2$ м; кривая 2 – $b = 10$ м.

2. Решение обратной задачи. Для нахождения неизвестной нагрузки (ее восстановления или идентификации) использовалось выражение (3) и числен-

ные значения перемещения во времени $w(x,y,t)$, которые были получены при решении прямой задачи. Эти значения являлись исходными данными для выполнения тестового расчета. Обратная задача является некорректной и сводится в своей основе решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода [5].

С целью избежания математических трудностей при решении некорректной обратной задачи, присущих численному анализу уравнения Вольтерра первого рода, можно перейти к уравнению Вольтерра второго рода, выполнив, например, дифференцирование по времени соответствующего уравнения для неизвестной нагрузки. С учетом отмеченного, выражение для определения временной составляющей неизвестной нагрузки будет иметь вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{w}', \quad (5)$$

где \mathbf{A}^{-1} – обратная матрица; \mathbf{w}' – скорость изменения перемещения, и она равна $\mathbf{w}' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{P}$. Здесь \mathbf{A}' – матрица, соответствующая продифференцированному ядру $K(t - \tau)$ по времени, и это ядро равно

$$K(t)' = \frac{\Delta z'}{\pi \cdot \rho \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^N \cos[c \cdot (c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2) \cdot m \Delta t] \cdot \cos[y \cdot (n \cdot \Delta z')]. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения удалена от точки приложения нагрузки, то есть $y \neq 0$, а именно примем, что $y = 0,14$ м. На основании выражения (5) и численных данных, которые использовались ранее при решении прямой задачи, получим кривые изменения нагрузки во времени. Соответствующие кривые изменения перемещения (кривая 1) и его скорости (кривая 2), отвечающие решению прямой задачи, представлены на рис.3. Подчеркнем, что данные, представленные на рис. 3, используются при решении обратной задачи в качестве исходных.

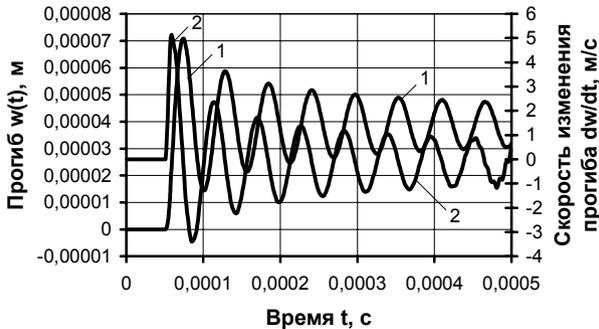


Рисунок 3 – Изменение прогиба и его первой производной во времени

На рис. 4 представленная кривая («ступенька» Хевисайда), идентифицированная по приведенным исходным данным.

Как видно из рисунка, кривая изменения нагрузки соответствует функции $P(t) = P_0 \cdot H(t)$, которая принималась для решения прямой задачи.

В заключение рассмотрим произвольное задание нагрузки на анализе одного примера.

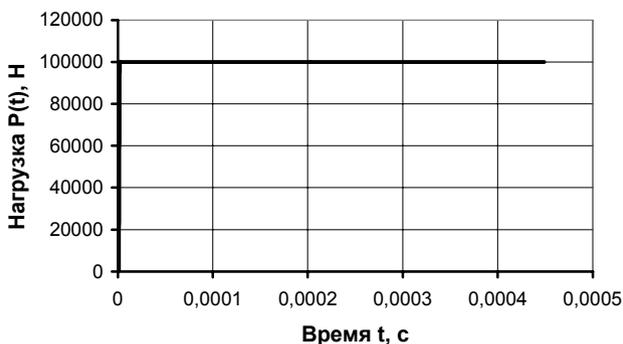


Рисунок 4 – Изменение нагрузки во времени

Пример: прогиб (сплошная линия) в точке пластины $y = 0,14$ м, как функция времени, и его скорость (пунктирная линия) изменения имеют вид, представленный на рис. 5.

Выполнив процедуру восстановления воздействующей нагрузки, получим ее изменение во времени, график которой приведен на рис. 6.

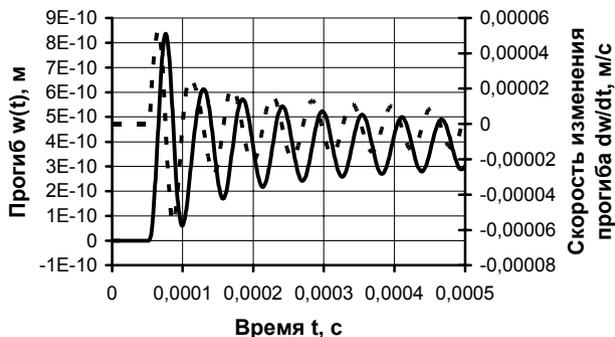


Рисунок 5 – Изменение прогиба и его первой производной во времени

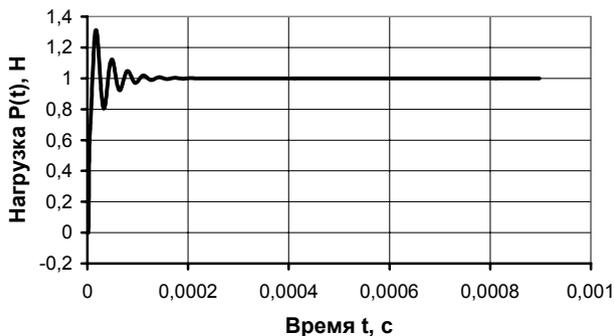


Рисунок 6 – Изменение нагрузки во времени

Если произвести расчет прогиба пластины в соответствующей точке по идентифицированной нагрузке, используя соотношения прямой задачи, то будем иметь кривую прогиба, совпадающую с кривой на рис. 5 на визуальном уровне восприятия.

Рассмотренные задачи относятся к типу динамических задач теории упругости. Обратная задача – некорректная, – она сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода с невырожденным ядром, численное решение которого было осуществлено способом, близким к методу квадратур, предлагаемым А.С.Апарциным [5]. Применение этого подхода позволило получить решение поставленной обратной задачи сравнительно простым способом, обладающим свойством регуляризации при соответствующем подборе расчетных параметров.

Список литературы: 1. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарамата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 3. Снедон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с. 4. Янютин Е.Г., Кучерова Н.И. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу // Вестник ХНАДУ. – 2006. – 32. – С. 80-83. 5. Апарцин А.С. О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур // Иркутск. – 1976. – Вып. 4. – С. 79 – 88.

Поступила в редколлегию 12.04.2007.